

冻土 CT 实验的数学方程

蒲毅彬 吴紫汪 马巍 常小晓 廖全荣

(中国科学院兰州冰川冻土研究所冻土工程国家重点实验室, 730000)

摘要 通过数学分析和实验回归推导出冻土 CT 实验的数学方程, 建立了 CT 数值图像每点数据与冻土参数的准确联系, 解决了 CT 定量分析中长期困扰人们的被测物体 CT 数据的吸收量偏差、射线硬化偏差、外围物体与样品边缘卷积影响等项偏差。通过对不同尺寸、密度、扫描环境的样品 CT 图像数据测量验证, 该方程能较精确应用, 为 CT 定量分析打下必要基础。

关键词 冻土实验 CT 扫描 数学方程

1907 年, 德国数学家 Radon 推导出根据一系列线积分求解被积函数空间分布的投影与反投影积分方程:

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L} F(\alpha,\beta) \times G(\beta) d\beta \quad (1)$$

式中: $f(x, y)$ 为坐标 (x, y) 处的 CT 值; L 为线积分长度; $F(\alpha, \beta)$ 为在空间方位 α 角且探测器方位 β 角的投影值; $G(\beta)$ 为 β 角的卷积核函数。

1969 年, 英国工程师 Housfield 建立了医用 CT 机的标准方程:

$$H_u = \frac{\mu - \mu_w}{\mu_w} \times 1000 \quad (2)$$

式中: H_u 为 CT 图像的数值; μ 为该点的 X 线吸收系数; μ_w 为纯水的 X 线吸收系数。

为了实现式(2), CT 机的设计者们作了多方面的努力, 采用与所观测对象(人体头部/体部)吸收 X 线相仿的均匀模型校准图像, 采用 X 线准直器和滤线器使射线在空间和波谱上比较均衡, 采用边缘探测器修正瞬间电路及 X 线剂量起伏变化等等(师宇东, 1986)。这些方法使 CT 图像的数据有了定量意义, 医生们可以根据图像数据分析病情, 成为医生诊断的基本依据之一。但是, 式(2)的应用具有很大的局限, 被测物体的几何形状、尺寸、位置、密度分布等都会造成图像数据的改变, 因此, 人体 CT 图像数据只能作为大致参考。用不完善投影重建图像必须对式(1)加入滤波因子。各种反投影算法均不能消除被测物的运动伪影、与标准模型吸收不一致的射线硬化伪影、高吸收反差边界的卷积计算伪影等; 同时, CT 机构造的技术参数也限定了 CT 图像的空间分辨率和密度分辨率。因此, CT 图像的分析一直只带有半定量的意义。

利用 CT 进行科学试验研究是一种崭新的很有意义的方法, 在冻土科研中可以非破坏地观察样品内部的结构变化, 可以对实验过程进行动态分析, 所得到的定量图像能够描述冻土参数, 因此, 建立 CT 图像的精确实验数学方程就成为十分必要的。

CT 的冻土实验需要可变的低温环境, 需要模拟自然条件的各向压力, 在 CT 机的扫描平面上不能存在金属物体。为此, 一个在三方向可以做到从室温到 -30°C 调整, 压强 $0\sim 30\text{ MPa}$ 变化的非金属实验装置被研制出来, 用此装置进行了 500 例不同直径, 不同密度和含水量, 不同压力和温度的土壤、冰、水、岩石、煤炭和其它矿物样品的 CT 观测, 通过已知参数与 CT 图像数据的对比计算, 逐步推导出可以实用的 CT 冻土实验的数学方程。所研制的实验装置的 CT 扫描断面如图 1 所示。

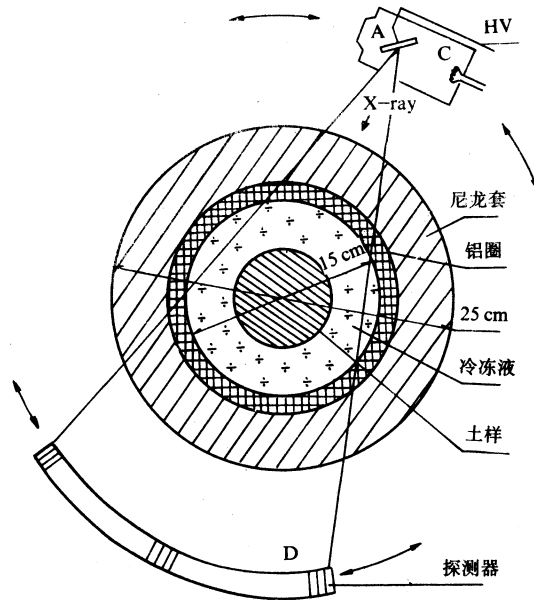


图 1 冻土 CT 扫描断面示意图

Fig.1 Profile of CT scanning for frozen soil

为标定图像数据与冻土参数的关系, 实验中反复改变已知冻土的尺寸、形状、摆放位置、密度及 CT 扫描条件, 对各个图像进行了逐点数据分析, 并根据 CT 成像理论推导出比较准确的实用方程。步骤如下:

(1) 正如 Housfield 所规定的, 物质对 X 线吸收系数 μ 与图像数据 H 成线性关系。而 μ 决定于物质的原子组分和密度, 同时与 X 线阳极靶面和电压密切相关(亚沃尔斯基, 1959)。冻土中主要参数是干容重和含水量, 某种土含有不同组分的多种原子, 不便依此计算其吸收系数。在一定的阳极电压和土质情况下, 可以通过实验得出该土比重为 1 时的吸收系数 μ' 。简化式(2), 水的吸收系数设为 1, 则写出:

$$\mu = \gamma_d (\mu' + W) \quad (3)$$

式中: γ_d 为土的干容重; μ' 为该土的 X 线吸收系数, 通过试验得到兰州黄土

$\mu' = 1.2178$; W 为含水量百分比。

(2) 实验说明, 当样品与标准模型(直径 25 cm 纯水)的尺寸和吸收系数不一致时, H 值发生明显变化, 比之于模型的过量吸收使 H 值减少, 反之使 H 值增大。因此对式(2)加入修正项:

$$H_a = (\mu - 1)A(R' - r)$$

式中: A 是比例系数; R' 是预吸收后扫描野等效半径, 无实验仓时 $R' = 12.5$, 图 1 所示实验仓内 $R' = 6.18$, 仓内注油后 $R' = 4.23$, r 为样品半径。

(3) CT 图像中难免存在射线硬化伪影, 这是因为当 $\mu \neq 1$ 时宽谱 X 射线中较软部分的吸收与模型有较大差异, 无法完全校准。通过对均匀样品图像的逐点测量图像数据差异呈 2 次幂随位置变化, 写出修正项

$$H_b = (\mu - 1)B[R^2 - (R + x - r)^2]$$

式中: B 为比例系数, x 为测点离扫描中心的距离。

(4) 从图一的试验仓结构看到, 为传递侧向温度的仓内铝套具有对 X 线很高的吸收系数($\mu = 4$), 由物理光学可知, 卷积算法的点扩散函数会导致形如 $F = f(x - x_0)$ 的数据变化, 此变化会造成样品数据的改变。由多次试验推导出此修正项:

$$H_c = \frac{C(\mu_o - \mu)}{(R - x)^{\frac{2}{3}}}$$

使用加铝套试验仓时 $\mu_o = 4$ 。

(5) 与校准模型不一样(一般较之小)的样品其边缘也有较强烈的卷积效应, 如其外围是较低密度的介质, 样品边缘数据也以 $f(x - x_0)$ 的形式减小, 同样经试验计算推导出修正项

$$H_d = \frac{D(\mu - \mu_i)}{(r - x)^{\frac{2}{3}}}$$

注冷却油时 $\mu_i = 0.9$, 样品外为空气时 $\mu_i = 0$ 。

综合 1-5 项, 写出

$$H_p = [(\mu - 1)(1 + A(R' - r) - B(R^2 - (R + x - r)^2))$$

$$+ \frac{C(\mu_o - \mu)}{(R - x)^{\frac{2}{3}}} - \frac{D(\mu - \mu_i)}{(r - x)^{\frac{2}{3}}}] \times 1000 \quad (4)$$

式中: $A = 0.0379$; $B = 0.0024$; $C = 0.05547$; $D = 0.0168$ 。

式(4)反映了专用 CT 试验仓内样品的逐点数值方程, 样品加试验仓的整体越接近标准模型, 越可以省略掉某些修正项而回复到式(2)。参数 R' 表示样品的外围环境, 无

试验仓时 $R'=12.5$, 有仓或注油时 R' 相应减小。参数 R 为样品卷积扩散的边界半径。试验表明, 式(4)对 μ 在 0.1~3.5 间, r 在 1.5~12.5 间能比较准确的体现样品各点的 CT 数值。A、B、C、D 四个常数在此条件下适用。

对一个扫描断面, 需要根据其 CT 值 H_p 和各环境参数反推 μ , 进而根据冻土物理过程和其它条件确定该点的干容重 γ 和含水量 W , 从这些量的变化详细考察冻土内部各点的变化量。同时, 图像数据中极值点、各部位数据方差、各部位数据及全断面均值的变化都对冻土结构变化有明确的指示意义。对全样品 CT 均值计算推导如下:

全样品均值是各点 CT 值的累积除以样品面积 S

$$H = \iint_s \frac{H_p}{s} = \Sigma \frac{H_p}{s} \quad (5)$$

A 项是线性关系, 其均值表现形式不变: $H_a = A(\mu-1)(R-r)$

B 项积分算得:

$$H_b = B(\mu-1)\left(\frac{4}{3}R \cdot r - \frac{5}{6}r^2\right)$$

C 项积分算得:

$$H_c = 6C(4-\mu)\left[\frac{1}{4}(R-r)^{\frac{4}{3}} - R(R-r)^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{4}R^{\frac{4}{3}}\right]/r^2$$

D 项积分算得:

$$H_d = D(\mu-\mu_0)\left[\frac{1}{4}(R-r)^{\frac{4}{3}} - R(r-R)^{\frac{1}{3}}\right]/r^2$$

最后, 将以上均值修正合并, 得到

$$\bar{H} = (\mu-1 + H_a - H_b + H_c - H_d) \times 1000 \quad (6)$$

式(4)和式(6)既附和 CT 物理、数学概念, 又经过相当的实验数据证实。表 1 是一些冻土样品的均值测量结果与计算结果的对照, 从表 1 可见, 测量和计算吻合的相当好。

表 1 各种试验条件土样 CT 均值的测量与计算比较

Table 1 Comparison between the calculated and measured CT values at the some conditions

试验条件	R'	r	r_d	W (%)	μ	H_a	H_b	H_c	H_d	H 计	H 测
仓内满样	6.18	7.5	1.538	26	2.27	-51	-86	79	0	1 218	1 223
仓内小样	6.18	3.09	1.541	26	2.27	113	-70	31	-42	1 310	1 306
无仓大样	12.5	7.5	1.639	18	2.29	226	-228	0	-7	1 282	1 284
无仓中样	12.5	5.0	1.61	20	2.28	365	-182	0	-31	1 430	1 422
无仓小样	12.5	3.09	1.540	26	2.27	458	-126	0	-104	1 506	1 511
注油小样	4.23	3.1	1.519	27	2.26	52	-69	31	-25	1 250	1 253

CT 均值的测量计算对冻土结构的变化特别有用, 全面统计值数据可靠, 是监控被扫描样品的基本数据。有了方程(4)、(6)及 CT 图像各种数据, 对图像定量分析才摆脱了模糊的概念, CT 实验进入了数学分析的水平。

应用以上数学方程对单轴和三轴冻土蠕变过程进行了 CT 定量分析, 准确可靠地测算出体积、密度变化规律; 对渤海海冰的 CT 分析测算出海冰的密度和空隙率; 对陕西黄陵煤样和岩石的 CT 分析, 分别对煤样的层理结构和岩石在不同制损条件下再承载的组织结构破坏过程获得了图像和数据描述; 对冻土在一定温度梯度下的模型试验取得了水分迁移过程中的数量; 对不同含水量的冻土内部冻结面的移动过程也进行了有效的观察和分析。凡此种种及今后更多的有效实验都要以此 CT 实验的数学方程为基础, 必将获得超出其它实验方法和常规 CT 观测的卓有成效的成果。

参 考 文 献

- 亚沃尔斯基, 伊. 维. 1959. X 射线学基础. 北京: 地质出版社, 78~129.
师宇东. 1986. 医用诊断电子仪器与技术. 北京: 电子工业出版社, 102~159.

CT Mathematical Equation of CT Experiment on Frozen Soil

Pu Yibin, Wu Ziwang, Ma Wei, Chang Xiaoxiao and Liao Quanrong

(State-Key Laboratory of Frozen Soil Engineering, LIGG, CAS, 730000)

Abstract

This paper introduces the mathematical equation of CT tests on frozen soil using physical analysis and experiment data regression. Contrasting the parameters of frozen soil and CT image number, the difference between sample CT number and standard model has been solved. These differences are section density, X-ray hardening, the convolution of lag and edge of the sample. Comparing poly-sample CT images, this equation can definitively describe the change of frozen soil, which is the base of CT quantitative analysis.

Key words: frozen soil experiment, CT scanning, mathematical equation