

冻土蠕变模拟实验的相似条件^①

王廷栋¹ 赵希淑¹ 吴紫汪² 刘永智²

(1 兰州大学力学系, 730000; 2 中国科学院兰州冰川冻土研究所冻土工程国家重点实验室, 730000)

提 要 从线性粘弹性理论出发, 在满足 Boltzmann 叠加原理的情况下, 给出了模型实验应满足的一般相似条件。由此出发, 进一步讨论了冻土蠕变模拟实验的相似条件, 得出了由模型实验结果计算原型应力、应变及位移的公式。

关键词 冻土蠕变 模拟实验 相似条件

当冻土受到外力作用时, 产生不可逆再造作用, 导致在很小外力作用下出现应力松弛和蠕变变形, 即冻土的强度和变形随时间而变化(崔托维奇, 1985)。聚合物在恒定温度下, 它的变形随着外力作用的时间而改变。当作用时间较长(或很长)时, 分子链段发生各种不同的调整, 宏观上显示出蠕变现象的特征(阿克洛尼斯等, 1986)。冻土与聚合物的这种宏观的粘弹性力学性质的相似表现, 给我们用光粘弹性塑料(聚合物)来模拟冻土蠕变提供了可能性, 也就是说, 可以用光粘弹性的实验方法来进行冻土预报。这种蠕变模拟研究的基础基于下列假设: 1) 材料均匀, 各向同性; 2) 蠕变变形和应力之间具有线性关系——叠加原理成立。对混凝土、木材、塑性等材料的研究表明, 在一定应力水平下(如二分之一极限强度)这些假设是正确的。崔托维奇(1985)指出: 如果我们不考虑冻土总结构不可逆压密变形中的渗透-迁移部分, 则可把塑性冻土看作服从叠加蠕变理论的连续准均质体。

1 线性粘弹性体模拟实验的相似条件

对于粘弹性体进行应力分析时, 可以写出平衡方程、几何关系、本构关系以及边界条件。对于我们将要研究的蠕变问题, 即准静态问题, 可有如下平衡方程:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (1)$$

几何关系

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}) \quad (2)$$

当然, 它应当满足连续性条件。

^①本文于1994年11月8日收到; 属中国科学院兰州冰川冻土研究所冻土工程国家重点实验室资助项目“冻土蠕变的光粘弹性研究”的阶段成果。

本构关系

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(x,t) = & \frac{1+\mu}{E} \sigma_{ij}(x,t) - \frac{\mu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}(x,t) \\ & + \int_{-\infty}^t L_{ijkl}(t-T) \sigma_{kl}(x,T) dT \end{aligned} \quad (3)$$

边界条件

$$\sigma_{ij} n_j = P_i \quad (\text{在 } S\sigma \text{ 上}) \quad (4)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad (\text{在 } Su \text{ 上}) \quad (5)$$

式中: σ_{ij} , ε_{ij} 为应力、应变张量; f_i , P_i , \bar{u}_i 表示体力、面力、位移矢量; T 为时间变量; t 为当前时间; E , μ 为弹性模量和泊松比; δ_{ij} 为克罗内克 (Kroneck) 符号, 当 $i=j$ 时表示正应力、应变间的关系, 当 $i \neq j$ 时表示剪应力、应变间关系。

现在考虑两个粘弹性体物体的静力相似问题 (Хесина, 1975), 用带“'”的量表示另一粘弹性物体, 设此两粘弹性物体的各物理量之间的相似常数关系如下:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{ij}(t)}{\sigma'_{ij}(t)} = C_\sigma, \quad \frac{\varepsilon_{ij}(t)}{\varepsilon'_{ij}(t)} = C_\varepsilon, \quad \frac{u_i(t)}{u'_i(t)} = C_u, \\ \frac{f_i(t)}{f'_i(t)} = C_f, \quad \frac{P_i(t)}{P'_i(t)} = C_P, \quad \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}'_i} = C_{\bar{u}}, \\ \frac{L_{ijkl}(t-T)}{L'_{ijkl}(t-T)} = C_L, \quad \frac{x_i}{x'_i} = C_l, \quad \frac{t}{t'} = \frac{T}{T'} = C_t, \\ \frac{\mu}{\mu'} = C_\mu, \quad \frac{E}{E'} = C_E \end{aligned} \quad (6)$$

将上述关系式代入式(1)—(5)可得:

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}(t)}{\partial x'_j} + \frac{C_l C_f}{C_\sigma} f'_i(t) = 0 \quad (7)$$

$$\varepsilon'_{ij}(t) = \frac{1}{2} \frac{C_u}{C_\varepsilon C_l} \left[\frac{\partial u'_i(t)}{\partial x'_j} - \frac{\partial u'_j(t)}{\partial x'_i} \right] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ij}(x,t) = & \frac{1+C_\mu \mu'}{C_\varepsilon C_E E'} C_\sigma \sigma'_{ij}(x,t) - \frac{C_\mu \mu'}{C_\varepsilon C_E E'} C_\sigma \sigma'_{kk}(x,t) \\ & + \frac{C_\sigma C_L C_l}{C_E} \int_{-\infty}^t L'_{ijkl}(t-T') \sigma'_{kl}(x,T') dT' \end{aligned} \quad (9)$$

$$\sigma'_{ij} n_j = \frac{C_P}{C_\sigma} P'_i \quad (10)$$

$$u'_i = \frac{C_{\bar{u}}}{C_u} \bar{u}'_i \quad (11)$$

根据相似第一定理(基尔皮契夫, 1963), 两现象相似, 则其相似指标为 1。即式(1) —(5)和式(7) —(11) 分别相同时要求下列条件成立:

$$\frac{C_l C_f}{C_\sigma} = 1, \quad \text{即相似准则 } K_1 = \frac{l f}{\sigma} = \frac{l' f'}{\sigma'} = \text{const.} \quad (12)$$

$$\frac{C_u}{C_\varepsilon C_l} = 1, \quad \text{即相似准则 } K_2 = \frac{u}{\varepsilon l} = \frac{u'}{\varepsilon' l'} = \text{const.} \quad (13)$$

$$C_\mu = 1, \quad \text{即相似准则 } K_3 = \mu = \mu' = \text{const.} \quad (14)$$

$$\frac{C_\sigma}{C_\varepsilon C_E} = 1, \quad \text{即相似准则 } K_4 = \frac{\sigma}{\varepsilon E} = \frac{\sigma'}{\varepsilon' E'} = \text{const.} \quad (15)$$

$$C_E C_L C_t = 1, \quad \text{即相似准则 } K_5 = ELt = E'L't' = \text{const.} \quad (16)$$

$$\frac{C_P}{C_\sigma} = 1, \quad \text{即相似准则 } K_6 = \frac{P}{\sigma} = \frac{P'}{\sigma'} = \text{const.} \quad (17)$$

$$\frac{C_{\bar{u}}}{C_u} = 1, \quad \text{即相似准则 } K_7 = \frac{\bar{u}}{u} = \frac{\bar{u}'}{u'} = \text{const.} \quad (18)$$

根据相似第三定理: 若现象的单值条件相似, 且由其相似常数构成的相似指标为 1(即全部由单值量构成的相似准则——决定准则相等)则现象相似。对我们讨论的问题, 其相似条件为: 1) 几何相似; 2) 边界条件相似; 3) 对模型和原型 K_3, K_5 取相同值。即满足上述相似条件两粘弹性现象(模型和原型)相似。此时依式(12), (13), (15)由模型实验结果来计算原型的应力、应变及位移。

如果体积力可以忽略, 则式(12)不出现。如果仅是应力边界条件, 则式(18)不出现。

2 冻土模拟实验的相似条件

崔托维奇(1985)将冻土蠕变分为两种类型: 衰减蠕变及非衰减蠕变。

目前已用于实践的衰减蠕变核的表达式:

(1) 指数型核

$$L_1(t) = \delta e^{-\delta_1 t} \quad (19)$$

(2) Ржаницын 核

$$L_2(t) = \frac{\delta e^{-\delta_1 t}}{t^{\delta_2}} \quad (20)$$

(3) 札列茨基核

$$L_3(t) = \frac{T}{(T+t)^\alpha} \quad (21)$$

式中: $\delta, \delta_1, \delta_2, T$ 是通过实验确定的蠕变参数。

非衰减蠕变可用如下形式的蠕变核来描述:

(4) Дюффинг 指数型核

$$L_4(t) = \delta t^{-\delta_2} \quad (22)$$

(5) 附有等应变速度($\dot{\varepsilon}_0$)项指数型核

$$L_5(t) = \delta e^{-\delta_1 t} + \dot{\varepsilon}_0 \quad (23)$$

冻土蠕变的本构关系一般给出为一维形式(崔托维奇, 1985):

$$\varepsilon = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t L(t-T)\sigma(T)dT$$

其中: $L(t-T)$ 为蠕变核。

现在从上式出发讨论冻土蠕变的相似条件。此式与前述一般粘弹性的本构关系式(3)相比, 存在着泊松比 μ 的差别。由式(3)出发得到的相似条件要求模型和原型的泊松比相等(即式(14)成立)。此相似条件一般得不到满足。此对实验结果的影响尚需进一步研究。

首先讨论指数型核, 它的蠕变核为

$$L_1(t) = \delta e^{-\delta_1 t}$$

设 $\delta / \delta' = C_\delta$, $\delta_1 / \delta'_1 = C_{\delta_1}$, 则由式(16)

$$K_5 = ELt = E'L't' = \text{const.}$$

的条件可得

$$K'_5 = E\delta t = E'\delta't' = \text{const.} \quad (24)$$

$$K''_5 = \delta_1 t = \delta'_1 t' = \text{const.} \quad (25)$$

即前述对模型和原型 K_5 取相同值的要求, 在此时变为 K'_5, K''_5 取相同值。可以看出 K''_5 给出了相似时刻的约束条件

$$t = \frac{\delta'_1}{\delta_1} t' \quad (26)$$

其次, 讨论 Ржаницын 核, 它的蠕变核为

$$L_2(t) = \frac{\delta e^{-\delta_1 t}}{t^{\delta_2}}$$

类似的讨论可满足式(16)的相似条件是

$$E\delta = E'\delta' = \text{const.} \quad (27)$$

$$\delta_1 = \delta'_1 = \text{const.} \quad (28)$$

$$\delta_2 = \delta'_2 = \text{const.} \quad (29)$$

$$t = t' = \text{const.} \quad (30)$$

再次, 讨论札列茨基核, 它的蠕变核为

$$L_3(t) = \frac{T}{(T+t)^2}$$

我们认为增加一待定参量 A , 取下式较为合适

$$L_3(t) = \frac{AT}{(T+t)^2}$$

此时满足式(16)的相似条件是

$$EA = E'A' \quad (31)$$

接着, 讨论 Дюффинг 指数型核, 它的蠕变核为

$$L_4(t) = \delta t^{-\delta_2}$$

满足式(16)的相似条件是

$$E\delta = E'\delta' = \text{const.} \quad (32)$$

$$\delta_2 = \delta'_2 = \text{const.} \quad (33)$$

$$t = t' = \text{const.} \quad (34)$$

最后, 讨论附有等应变速度 $\dot{\epsilon}_0$ 项的指数型核, 它的蠕变核为

$$L_5(t) = \delta e^{-\delta_1 t} + \dot{\epsilon}_0$$

满足式(16)的相似条件是

$$E\delta t = E'\delta' t' = \text{const.} \quad (35)$$

$$E\dot{\epsilon}_0 t = E'\dot{\epsilon}'_0 t' = \text{const.} \quad (36)$$

$$\delta_1 t = \delta'_1 t' = \text{const.} \quad (37)$$

此时得到的结果自然比 $L_1(t)$ 时多一项相似准则式(36)。

3 几点看法

综上所述, 冻土蠕变模拟时, 模型材料的流变参量是要满足相似条件的要求, 故而受到严格的限制。但由于模型材料的多样性, 在一定允许的精度范围内基本上满足相似条件要求的模型材料还是可以得到的。

前述相似条件式(30), (34)说明模型实验和原型的相似时刻是相同的, 这样就不能以较短的模型实验时间所得的结果去预报较长时间原型的情况, 这对模型实验是一种不利因素。

蠕变模拟实验时材料特性参数的测定需要在小变形时精度高, 大变形时有足够量程的仪器设备, 且要能长时间进行测量, 对仪器设备的稳定性有较高要求。

参 考 文 献

- 阿克洛尼斯 J J, 麦克奈特 W J, 1986. 聚合物粘弹性引论. 北京: 科学出版社, 58
 基尔皮契夫 M B, 1963. 相似理论. 北京: 科学出版社, 22
 崔托维奇 H A, 1985. 冻土力学. 北京: 科学出版社, 113, 125
 Хесина Г А, 1975. Метод фотоупругости Москва Стройиздат, 27

The Analogic Conditions of Simulation Test of Frozen Soil

Wang Tingdong¹, Zhao Xishu¹, Wu Ziwang² and Liu Yongzhi²

(1 *Mechanics Department of Lanzhou University, 730000*; 2 *State Key Laboratory of Frozen Soil Engineering, LIGG, CAS, 730000*)

Abstract

The analogic conditions applied to model experiment are generally presented in this paper, according to the linear theory of viscoelasticity and satisfying the Boltzmann's principle of superposition and further discussed for creep of frozen soils. Based on these, the formulas for calculating stress, strain, and displacement are obtained, from which the model experimental results can be applied to the relative practical problem.

Key words: creep of frozen soil, simulation test, analogic condition