第 24 卷　第 2 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 24　No. 2
2003 年 6 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Jun. 2003

文章编号: 1007- 2985(2003) 02- 0077- 02

次内射模的特征

詹建明
(湖北民族学院数学系, 湖北 恩施　445000)

摘　要: 引进次内射维数的概念, 给出次内射模的一些性质, 并用次内射模及维数刻划了次半单环、Noether 环及遗传环的性质. 主要结论为: ( ) 左 $R-$ 模 M 是次内射模　$\mathrm{SId}_R M = 0$. ( ) 环 R 为次半单环　$\mathrm{SID}(R) = 0$. ( ) 环 R 为 Noether 环　每个次内射模是内射模.

关键词: 次内射模; 次内射维数; 次半单环; Noether 环; 遗传环
中图分类号: O153.3　　文献标识码: A

称左 $R-$ 模 M 为 $FP-$ 内射模[1], 如果对任何有限生成自由左 $R-$ 模 P 的任何有限生成子模 K, 每个 K 到 M 的同态都可扩张成 P 到 M 的同态; 称 M 为 $F-$ 内射模($P-$ 内射模)[2], 如果对任何有限生成(主)左理想 I, 任何左 $R-$ 模同态 $f: I$　M 均存在 y　M 使 $f(a) = ay$, 对所有 a　I; 称 M 为左 $R-$ 模[4], 若对任何有限生成左 $R-$ 模 N 及 N 的扩模 M, 每个 N 到 E 的同态 f 都可以扩张为 M 到 E 的同态. 文中的环均指有单位元的的结合环, 模指左酉模.

显然, 内射模类　次内射模类　$FP-$ 内射类　$F-$ 内射模类　$P-$ 内射模类.

1　次内射模的性质

由于内射模是次内射模, 因而每一个左 $R-$ 模 M 均有次内射分解, 即存在正合序列

$$O \quad M \quad E^0 \quad E^1 \qquad E^n$$

其中每个 E^i 均是次内射模.

定义 1　若左 $R-$ 模 M 有如下形状的次内射分解:

$$0 \quad A \quad E^0 \quad E^1 \qquad E^n \quad 0,$$

则在 M 的所有这种形状的次内射分解中, 必有 1 个次内分解其中的非负整数 n 是最小的, 这个最小的 n 称为左 $R-$ 模 M 的次内射维数, 记为 $\mathrm{SId}_R M$, 若没有上述形状的分解, 则记 $\mathrm{SId}_R M =$.

关于次内射模的次内射维数, 有如下结论:

定理 1　左 $R-$ 模 M 是次内射模　$\mathrm{SId}_R M = 0$.

证明　设 M 是次内射模, 则 M 有次内射分解 $0 \quad M \quad E^0 \quad 0$, 其中 $E^0 = M$, $E^i = 0$, i　1, $= 1_M$, 则 $\mathrm{SId}_R M = 0$. 反之, 设 $\mathrm{SId}_R M = 0$, 则 M 有一个次内射分解 $0 \quad M \quad E^0 \quad 0$, 其中 $E^i = 0$, i　1. 则 A　E^0, 于是 M 是次内射模.

定义 2　设 R 是环, 则称 $\mathrm{SID}(R) = \mathrm{SUP}\{\mathrm{SId}_R M \mid M \quad {}_R\mathscr{M}\}$ 为环 R 的次内射维数.

收稿日期: 2002- 09- 24
基金项目: 湖北省教育厅重点科研基金资助项目(2002X10)
作者简介: 詹建明(1972-), 男, 湖北黄冈人, 硕士, 湖北民族学院数学系讲师, 主要从事同调代数研究.

环 R 的内射维数 ID(R) 与次内射维数 SID(R), 有如下关系:

定理 2　对于任意环 R, SID(R)　ID(R)

证明　设 M 是任意左 R - 模, 则 $SId_R M$　$Id_R M$. 事实上, 若 $Id_R M$　n, 则存在 1 个内射分解

$$0 \quad M \quad E^0 \quad E^1 \qquad E^n \quad 0.$$

由于内射模是次内射模, 因而上述分解也是 M 的次内射分解, 即 $SId_R M$　$Id_R M$, 又由 M 的任意性, 则 SID(R)　ID(R).

2　用次内射模刻划一类环

定义 3[1]　称左 R - 模 M 为次半单模, 如果 M 的每个有限生成子模是 M 的直和项.

定义 4[1]　称环 R 为次半单的, 如果每个左 R - 模是次半单的.

引理 1　对于环 R, 下述条件等价: ( ) R 为次半单环; ( ) 每个左 R - 模是次内射模.

证明　( )　( ) 设 R 为次半单环, E 为任一左 R - 模, N 为有限生成子模且 N　M, 则 N 为 M 的直和项, 从而 N 到 E 的任一同态都可以扩成 M 到 E 的同态, 因此, E 是次内射模.

( )　( ) 设 E 是任意次内射模, 则对任何有限生成模 N 及 N 的扩模 M, 每个 N 到 E 的同态 f 都可以扩成 M 到 N 的的同态, 即 N 为 E 的直和项, 从而 E 是次半单模, 由 M 的任意性, 则 R 为次半单环.

定理 3　环 R 为次半单环　SID(R) = 0.

证明　由定理 1 知, M 是次半单的　$SId_R M$ = 0, 再由引理 1 知, R 为次半单环　每一个左 R - 模是次内射的. 从而由 M 的任意性, R 为次半单环　$SId_R M$ = 0.

定理 4　环 R 为 Noether 环　每一个次内射模是内射模.

证明　设 R 为 Noether 环, E 为次内射模, 由于 R 的每一个左理想 I 都是有限生成的, 从而 I 到 E 的任一同态都可以扩成 R 到 E 的同态, 由 Baer 准则知, E 为内射模.

若每一个次内射模都为内射模, 则内射模直和亦为内射模, 从而 R 为 Noether 环.

定理 5　环 R 为遗传环, 则内射模的商模是次内射模.

证明　由遗传环性质知, 内射模的商模是内射模, 又内射模是次内射模, 故命题成立.

最后, 笔者提出 1 个问题: 定理 5 逆命题成立吗?

参考文献:

[1] JAIN S. Flat and FP- Injective[J]. Proc. A. M. S. 1997, (2): 437- 442.

[2] DANIAO R F. Coflat Rings and Modules[J]. Pac. J. Math, 1997, (2): 349- 369.

[3] 陈建龙. FP - 内射环和 IF - 环的几 个特征[J]. 数学研究与评论, 1992, (3): 395- 400.

[4] 朱占敏. 次内射模, 次半单模(环) [J]. 东北师大学报(自然科学版), 2000, (12): 12- 16.

[5] ANDERSON F W, FULLER K R. Rings and Categories of Modules[M]. Springer- Verlag, 1974.

Characterizations of Subinjective Modules

ZHAN Jian-ming

(Dept. of Math, Hubei Institute for Nationalities Enshi, Hubei 445000)

Abstract: This paper introduces the concept of subinjective dimension and obtains the nature of subinjective modules. Moreover subsemisimple ring, noether ring and hereditary ring are characteristiced. The main results are: ( ) Any left R- module M is subinjective module if and only if $SId_R M$ = 0. ( ) A ring R is subsemisimple ring if and only if SID (R) = 0. ( ) A ring R is Noether if and only if every subinjective module is injective.

Key words: subinjective modules; subinjective dimension; subsemisimple rings; noether rings; hereditary rings