文章编号: 1007- 2985(2003)03- 0001- 02

# Fermat 商中的完全方幂

乐 茂华
(湛江师范学院数学系, 广东 湛江　524048)

摘　要: 设 $p$ 是奇素数, $x$ 和 $n$ 是大于 1 的奇数. 证明了: 当 $p \equiv 7 \pmod{12}$ 时, Fermat 商 $F(p, x)$ 不是 $n$ 次方幂.

关键词: Fermat 商; 完全方幂; 指数 diophantine 方程
中图分类号: O15　　文献标识码: A

设 $\mathbf{Z}_+$, $\mathbf{P}$ 分别是全体正整数和奇素数的集合. 对于奇素数 $p$ 和整数 $a$, 根据 Fermat 小定理[1] 可知, 当 $a$ 不是 $p$ 的倍数时, $a^{p-1}-1$ 是 $p$ 的倍数. 由此可知 $(a^{p-1}-1)/p$ 是正整数, 此类正整数称为 Fermat 商, 记作 $F(p, a)$. Fermat 商的基本性质是数论及其相关领域的一个引人关注的课题[2]. 笔者在本文中主要讨论 Fermat 商中的完全方幂问题. 根据 Fermat 商的定义, 该问题可归结为方程

$$x^{p-1}-1 = py^n \quad x, y, n \in \mathbf{Z}_+, p \in \mathbf{P}, x > 1, y > 1, n > 1 \tag{1}$$

的求解问题. 对此, Osada 和 Terai[3,4] 已解决了 $n$ 和 $x$ 为偶数以及 $x$ 为小于 50 的奇数等情况. 乐茂华[5] 证明了: 当 $p \equiv 1 \pmod 4$ 且 $p > 4.10^{176}$ 时, 方程(1) 无解 $(x, y, n, p)$. 此后, 曹珍富[6] 证明了上述结果中的条件 $p > 4.10^{176}$ 可以略去. 至此, 方程(1) 的求解问题还剩下 $p \equiv 3 \pmod 4$ 且 $x$ 和 $n$ 都是奇数的情况尚未解决. 由于当 $n$ 是大于 1 的奇数时, $n$ 必有奇素因数 $q$, 而且 $n$ 次方幂也是 $q$ 次方幂, 所以此时方程(1) 可写成

$$x^{p-1}-1 = py^q \quad x, y \in \mathbf{Z}_+, p, q \in \mathbf{P}, x > 1, 2 \nmid x, y > 1. \tag{2}$$

定理 1　当 $p \equiv 7 \pmod{12}$ 时, 方程(2) 无解 $(x, y, p, q)$.

证明　设 $(x, y, p, q)$ 是方程(2) 的一组解. 因为 $x$ 是奇数, 所以 $y$ 是偶数. 又因

$$\gcd(x^{(p-1)/2}+1, x^{(p-1)/2}-1) = 2,$$

故从(2) 式可得

$$x^{(p-1)/2}+1 = \begin{cases} 2^{q-1}pr^q, \\ 2pr^q, \\ 2^{q-1}r^q, \\ 2r^q, \end{cases} \quad x^{(p-1)/2}+1 = \begin{cases} 2s^q, \\ 2^{q-1}s^q, \\ 2ps^q, \\ 2^{q-1}ps^q, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $r, s$ 是适合 $y = 2rs$ 的正整数. 另外, 由于 $p \equiv 7 \pmod{12}$, 所以 $(p-1)/2$ 是 3 的奇倍数, 故有 $\frac{p-1}{2} = 3t$, 其中 $t$ 是正奇数.

设 $X = x^t$. 当 $x^{(p-1)/2}+1 = 2^{q-1}pr^q$ 时, 由(3) 式可知

$$X^3 - 1 = 2s^q. \tag{4}$$

收稿日期: 2003- 04- 15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271104); 广东省自然科学基金资助项目(011781); 广东省教育厅自然科学基金资助项目(0161)

作者简介: 乐茂华(1952- ), 男, 上海市人, 湛江师范学院数学系教授, 主要从事数论研究.

由于 $X$ 是奇数, $\gcd(x-1,(x^3-1)/(x-1))=1$ 或 3, 故从(4) 式可得

$$X-1=2a^q, X^2+X+1=b^q, \tag{5}$$

或者

$$X-1=2\ 3^{q-1}a^q, X^2+X+1=3b^q, \tag{6}$$

其中 $a, b$ 是适合 $b>1$ 的正整数. 假如(5) 式成立, 则从文献[7, 8] 可知(5) 式中第 2 个等式仅当$(X, b, q)=(18, 7, 3)$ 时成立. 因为从(5) 式中第 1 个等式可知 $X$ 必须是奇数, 所以(5) 式不可能成立. 同样, 从文献[7] 可知(6) 式中第 2 个等式不成立, 由此可知(4) 式不成立.

当 $x^{(p-1)/2}+1=2pr^q$ 时, 从(3) 式可知

$$X^3-1=2^{q-1}s^q. \tag{7}$$

从(7) 式可得

$$x-1=2^{q-1}a^q, X^2+X+1=b^q, \tag{8}$$

或者

$$x-1=2^{q-1}3a^q, X^2+X+1=3b^q, \tag{9}$$

其中 $a, b$ 是适合 $b>1$ 的正整数. 运用上节的方法, 从(8), (9) 式可知(7) 式不可能成立.

由于从文献[7, 8] 可知, 适合

$$X^2-X+1=b^q \quad b>1$$

的正整数仅有$(X, b, q)=(19, 7, 3)$; 不存在适合

$$X^2-X+1=3b^q \quad b>1$$

的正整数$(X, b, q)$. 同理可证(3) 式中另外 2 种情况都不成立. 综上所述即得定理 1.

参考文献:

[1] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1979.

[2] RIBENBOIM P. 13 Lectures on Fermat s Last Theorem [M]. New York: Springer Verlag, 1979.

[3] OSADA H, TERAI N. Generalization of Lucas Theorem for Fermat Quotient [J]. C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 1989, 11: 115-120.

[4] TERAI N. Generalization of Lucas Theorem for Fermat Quotient [J]. Tokyo J. Math., 1990, 13: 277-287.

[5] LE Mao-hua. A Note on the Diophantine Equation $x^{p-1}-1=py^q$ [J]. C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 1993, 15: 121-124.

[6] CAO Zhen-fu. The Diophantine Equation $x^4-y^4=z^p$ and $x^4-1=dy^q$ [J]. C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 1999, 21: 23-27.

[7] NAGELL T. Des Equations Indeterminees $x^2+x+1=y^n$ et $x^2+x+1=3y^n$ [J]. Norsk Matematisk Forenings Skrifter, 1921, 2: 14.

[8] LJUNGGREN W. Einige Bemerkungen Uber Die Darstellung Ganzer Zahlen Durch Binare Kubische Formenmir Positive Diskriminante [J]. Acta Math., 1942, 75: 1-21.

# Perfect Powers in Fermat Quotients

LE Mao-hua

(Department of Mathematics, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang 524048, Guangdong China)

**Abstract**: Let $p$ be an odd prime, and $x$ and $n$ be odd integers with $\min(x, n)>1$. The author proves that if $p$ 7 (mod 12), the Fermat quotient $F(p, x)$ is not an $n$th perfect power.

**Key words**: Fermat quotient; perfect power; exponential diophantine equation