

不圆度对圆环和圆管静水压力下临界荷载的影响

邓长根

(同济大学 建筑工程系,上海 200092)

摘要:采用最小二乘法求解曲率半径对称波动变化的非理想圆环在均匀静水压力作用下的平面内稳定性问题,分别求得了反对称屈曲和对称屈曲的临界荷载系数。当不圆度参数 $\beta=0.4$ 时,反对称屈曲的临界荷载系数降低67.71%。用最小相对误差拟合法得到了精度较高的临界荷载系数拟合公式,其最大相对误差仅为 $\pm 0.76\%$ 。采用平面应变假设,推广得到非理想长圆管在均匀静水压力作用下的临界荷载计算公式,并应用于某工程中长圆钢管的局部稳定性计算,算例中当外径在最大允许外径和公称外径之间波动变化时,临界荷载降低2.58%。

关键词:圆环;临界荷载;不圆度;静水压力;最小二乘法

中图分类号:TU311.2 **文献标志码:**A

1 引言

圆环、圆拱在径向外压力作用下的平面内失稳和圆管、圆柱壳在径向外压力作用下的局部失稳是经典的稳定性问题,在水利、采矿及土木等工程设计验算中常会遇到。众所周知,这类稳定性问题对初始缺陷很敏感,与实际含有初始缺陷的圆环、圆管的临界荷载相比,理想圆环、圆管的临界荷载偏大。

在径向外压力作用下,影响圆环或圆管临界荷载的因素有屈曲后外压力的方向、荷载缺陷和几何缺陷等初始缺陷。

圆环与圆管屈曲后外压力的方向有三种可能形式:垂直于变形后表面的静水压力、方向保持不变的保向压力、指向屈曲前截面圆心的向心压力^[1]。因为静水压力、向心压力为非保守力,在这类荷载作用下的结构稳定性理论分析、数值计算有一定难度,多数商用有限元软件要么不适用,要么计算结果误差较大。

圆环或圆管荷载缺陷包括荷载不均匀变化,例如波形扰动静水压力^[2]。圆环或圆管几何缺陷包括截面壁厚和外径的偏差等,例如壁厚波动变化^[3]、截面不圆度^[4,5]。在设计规范^[4-6]允许偏差范围内,圆环或圆管的临界荷载降幅,需要给出一个简便的实用计算公式。

本文针对曲率半径关于两个正交轴对称波动

变化的非理想圆环在均匀静水压力作用下的平面内稳定性问题,采用傅里叶级数逼近圆环屈曲微分方程的解,用最小二乘法导出圆环屈曲的特征方程,进一步求得圆环屈曲的临界荷载系数,得出临界荷载系数拟合公式。把非理想圆环在均匀静水压力作用下的临界荷载计算公式推广到非理想长圆管在均匀静水压力作用下的临界荷载计算公式,并应用于某工程中长圆钢管的局部稳定性计算。

2 非理想圆环屈曲微分方程

2.1 非理想圆环的不圆度和初始曲率半径

我国无缝钢管尺寸、外形、重量及允许偏差^[4]定义圆钢管的不圆度参数 β 如下:

$$\beta = \frac{D_{\max} - D_{\min}}{(D_{\max} + D_{\min})/2} \quad (1)$$

式中 D_{\max} 为钢管同一横截面的实测外径最大值, D_{\min} 为实测外径最小值。

欧洲钢结构设计规范壳结构补充条款^[5]定义圆管的不圆度参数(out-of-roundness) β_e 如下:

$$\beta_e = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{d_{\text{nom}}} \quad (2)$$

式中 d_{\max} 为实测最大内径, d_{\min} 为实测最小内径, d_{nom} 为公称内径。

以下参照上述圆管的不圆度参数式(1,2)来定义非理想圆环的不圆度参数。如图1所示的实际(非理想)圆环,设其中面轴线可用极坐标 r 和 θ 表示,其中 $r = r(\theta)$ 是角坐标 θ 的函数:

$$r(\theta) = R_0 [1 + 0.5\beta\cos(2\theta)] \quad (3)$$

收稿日期:2009-08-25;修改稿收到日期:2009-12-28.

基金项目:国家自然科学基金(50478107)资助项目.

作者简介:邓长根(1962-),男,博士,教授

(E-mail: dengcg@tongji.edu.cn).

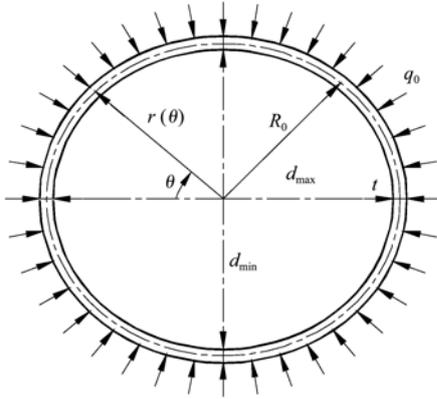


图1 均匀静水压力作用下的非理想圆环

Fig. 1 Imperfect circular ring under uniform hydrostatic pressure

式中 R_0 为实际圆环中面轴线的平均半径, $\beta \in [-0.4, 0.4]$ 为实际圆环的不圆度参数。不圆度参数是反映实际圆环偏离理想圆环的一种几何缺陷参数, 当 $\beta = 0$ 时圆环变成无缺陷的理想圆环, 此时 R_0 是相应理想圆环中面轴线的半径。

当实际圆环的最小内径与最大内径分别为 d_{min} 和 d_{max} , 最小外径与最大外径分别为 D_{min} 和 D_{max} 时, 设圆环厚度 t 为常数, 可用以下公式计算 β 和 R_0 :

$$|\beta| = \frac{D_{max} - D_{min}}{2R_0} = \frac{d_{max} - d_{min}}{2R_0} \quad (4)$$

$$R_0 = \frac{D_{max} + D_{min}}{4} - \frac{t}{2} = \frac{d_{max} + d_{min}}{4} + \frac{t}{2} \quad (5)$$

可以看出, 不圆度参数 β_e 按截面外径定义, β_i 按截面内径定义, 而式(4)所示的不圆度参数 β 按中面轴线直径定义。三者会由于径厚比变化产生细小的差别。

根据式(3)可计算出实际圆环未受力时的初始曲率半径 $\rho_0(\theta)$, 它也是角坐标 θ 的函数:

$$\rho_0(\theta) = \frac{[r^2(\theta) + r'^2(\theta)]^{3/2}}{|r^2(\theta) + 2r'(\theta)r''(\theta) - r(\theta)r''^2(\theta)|} = R_0 \frac{[1 + \beta^2 + \beta \cos(2\theta) - 0.75\beta^2 \cos^2(2\theta)]^{3/2}}{1 + 2\beta^2 + 3\beta \cos(2\theta) - 0.75\beta^2 \cos^2(2\theta)} > 0 \quad (3)$$

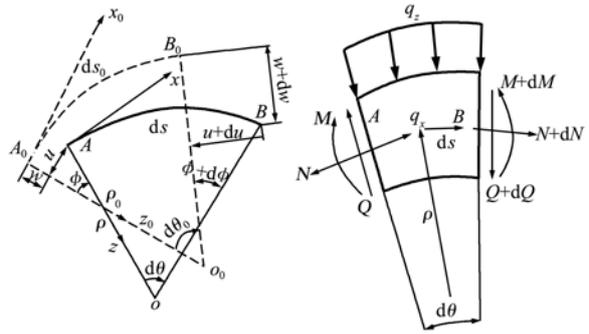
为了求得初始曲率半径的近似表达式, 首先进行变量替换:

$$y = \cos(2\theta)$$

$$\rho_y(y, \beta) = \frac{[1 + \beta^2 + \beta y - 0.75\beta^2 y^2]^{3/2}}{1 + 2\beta^2 + 3\beta y - 0.75\beta^2 y^2} > 0 \quad (4)$$

当 $\theta = \pi/4$ 时, $y = \cos(2\theta) = 0$, $\rho_y(y, \beta)$ 在此处泰勒级数展开:

$$\rho_y(y, \beta) \approx \rho_{0,0}(\beta) + \sum_{k=1}^6 \frac{1}{k!} \rho_{0,k}(\beta) y^k$$



(a) 微单元变形前后坐标系和位移 (b) 屈曲后微单元内力

图2 曲杆微单元的位移和受力图

Fig. 2 The displacements and forces of a curved segment

$$\rho_{0,0}(\beta) = \rho_y(0, \beta), \rho_{0,k}(\beta) = \frac{\partial^k \rho_y(0, \beta)}{\partial y^k} \quad (5)$$

进一步可求出实际圆环未受力时的初始曲率半径高精度近似表达式:

$$\rho_0 = \rho_0(\theta) = R[1 + \beta_1 \cos(2\theta) + \beta_2 \cos(4\theta)] \quad (6)$$

$$R = C_{\rho_0}(\beta) \cdot R_0, \beta_1 = \frac{C_{\rho_1}(\beta)}{C_{\rho_0}(\beta)}, \beta_2 = \frac{C_{\rho_2}(\beta)}{C_{\rho_0}(\beta)} \quad (7)$$

$$C_{\rho_0}(\beta) = \rho_{0,0}(\beta) + \frac{\rho_{0,2}(\beta)}{4} + \frac{\rho_{0,4}(\beta)}{64} + \frac{\rho_{0,6}(\beta)}{2304} \quad (8)$$

$$C_{\rho_1}(\beta) = \rho_{0,1}(\beta) + \frac{\rho_{0,3}(\beta)}{8} + \frac{\rho_{0,5}(\beta)}{192} \quad (9)$$

$$C_{\rho_2}(\beta) = \frac{\rho_{0,2}(\beta)}{4} + \frac{\rho_{0,4}(\beta)}{48} + \frac{\rho_{0,6}(\beta)}{1536} \quad (10)$$

以上参数是 β 的函数。例如, $\beta = 0.1$ 时, 可求得平均曲率半径放大系数, $C_{\rho_0} = 1.018225$, 曲率半径波动参数 $\beta_1 = -0.153624$ 和 $\beta_2 = 0.023302$ 。

2.2 非理想圆环的平衡微分方程

以下推导这种变曲率圆环在均匀静水压力 q_0 作用下的平衡微分方程。不失一般性, 将圆环视为小曲率平面曲杆, 从中截取一微单元段进行分析, 如图2所示。规定随动坐标轴是: 屈曲变形前, 切向为坐标 x_0 , 指向曲率中心的法向为坐标 z_0 ; 屈曲变形后, 切向为坐标 x , 指向曲率中心的法向为坐标 z 。设微段 $A_0 B_0$ 未变形前的微弧长、曲率半径及所对的中心角分别为 $ds_0 = \rho_0 d\theta_0$, $\rho_0, d\theta_0$, 屈曲变形后移动到 AB , 相应的微弧长、曲率半径及所对的中心角分别为 $ds = \rho d\theta, \rho, d\theta$ 。曲杆截面朝着曲率中心沿曲率半径的位移用 w 表示, 曲杆截面朝着弧长 s 的正方向沿切线的位移用 u 表示, 如图2(a)所示。轴力 N 、剪力 Q 、弯矩 M 和切向分布荷载 q_x 、法

向分布荷载 q_z ，按图 2(b) 所示方向为正。

采用小变形(小应变、小转角)及平截面假设，可以导出平面曲杆的平衡微分方程^[1]为

$$\frac{dN}{d\theta} - Q + \rho q_x = 0 \quad (11)$$

$$\frac{dQ}{d\theta} + N + \rho q_z = 0, \frac{dM}{d\theta} = \rho Q \quad (12,13)$$

微单元相对原始位置的转角 ϕ ，曲率改变量 κ 和杆轴的伸长应变 ϵ 分别为^[1]：

$$\phi = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{d\omega}{d\theta} + u \right] \quad (14)$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\rho} \frac{d\phi}{d\theta} = -\frac{M}{EI} \quad (15)$$

$$\epsilon = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{du}{d\theta} - \omega \right] = \frac{N}{EA} \quad (16)$$

式中 EI 为圆环平面内弯曲刚度， EA 为轴向刚度，以下假设 EI 和 EA 为常数。从方程(11,12)中消去 N 得到：

$$\frac{d^2 Q}{d\theta^2} + Q - \rho q_x + \frac{d(\rho q_z)}{d\theta} = 0 \quad (17)$$

忽略轴向变形 ϵ ，仅保留内力、变形及其导数的线性项，可由式(14~16)导出：

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{d\phi}{d\theta} \right], \frac{d\phi}{d\theta} = -\rho_0 \frac{M}{EI}$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \rho_0 \phi, \omega = \frac{du}{d\theta} \quad (18)$$

在均匀静水压力 q_0 作用下，屈曲后外压力的方向垂直于变形后的中面轴线，因此，切向分布荷载 $q_x=0$ ，法向分布荷载 $q_z=q_0$ 。把这些表达式代入式(17)，得

$$\rho \frac{d^2}{d\theta^2} \left[\frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\theta} \right] + \frac{dM}{d\theta} + q_0 \rho \frac{d\rho}{d\theta} = 0 \quad (19)$$

仅保留弯矩 M 及其导数的线性项，最终导出变曲率非理想圆环平面内弯曲平衡微分方程：

$$\frac{d^3 M}{d\theta^3} - \frac{2\rho'_0 d^2 M}{\rho_0 d\theta^2} + \left[1 + \frac{2\rho'_0{}^2 - \rho_0 \rho''_0}{\rho_0^2} + \frac{q_0 \rho_0^3}{EI} \right] \frac{dM}{d\theta} + \frac{3q_0 \rho'_0 \rho_0^2}{EI} M + q_0 \rho'_0 \rho_0 = 0 \quad (20)$$

引入以下无量纲参数：

$$\lambda = \frac{q_0 R^3}{EI}, \bar{M}(\theta) = \frac{M(\theta)R}{EI}$$

$$D_4(\theta) = \frac{\rho'_0(\theta) \rho_0(\theta)}{R^2} \quad (21)$$

$$D_0(\theta) = \frac{3\rho'_0(\theta) \rho_0(\theta)^2}{R^3} = \sum_{k=1}^6 \alpha_{0k} \sin(2k\theta) \quad (22)$$

$$\begin{cases} \alpha_{01} = -6\beta_1(1 + \beta_2) - 3\beta_1(\beta_1^2/2 + \beta_2^2) \\ \alpha_{02} = -6\beta_1^2 - 3\beta_2(4 + 2\beta_1^2 + \beta_2^2) \\ \alpha_{03} = -\beta_1(18\beta_2 + 3\beta_1^2/2 + 9\beta_2^2/2) \\ \alpha_{04} = -6\beta_2(2\beta_2 + \beta_1^2) \\ \alpha_{05} = -15\beta_1\beta_2^2/2, \alpha_{06} = -3\beta_2^3 \end{cases} \quad (23)$$

$$D_1(\theta) = 1 + \frac{2\rho'_0(\theta)^2 - \rho_0(\theta)\rho''_0(\theta)}{\rho_0^2(\theta)} = \alpha_{10} + \sum_{k=1}^6 \alpha_{1k} \cos(2k\theta) \quad (24)$$

$$\begin{cases} \alpha_{10} = 1 + 2\beta_1^2 + 8\beta_2^2 - 6\beta_1^2\beta_2 \\ \alpha_{11} = \beta_1(4 + 6\beta_2 - \beta_1^2 - 14\beta_2^2) \\ \alpha_{12} = 4\beta_2(4 + \beta_1^2 - \beta_2^2) - 6\beta_1^2 \\ \alpha_{13} = \beta_1(-26\beta_2 + 5\beta_1^2 + 9\beta_2^2) \\ \alpha_{14} = 2\beta_2(-12\beta_2 + 13\beta_1^2) \\ \alpha_{15} = 41\beta_1\beta_2^2, \alpha_{16} = 20\beta_2^3 \end{cases} \quad (25)$$

$$D_2(\theta) = -\frac{2\rho'_0(\theta)}{\rho_0(\theta)} = \sum_{k=1}^6 \alpha_{2k} \sin(2k\theta) \quad (26)$$

$$\begin{cases} \alpha_{21} = \beta_1(4 - 2\beta_2 + \beta_1^2 + 2\beta_2^2) \\ \alpha_{22} = 2\beta_2(4 + 2\beta_1^2 + \beta_2^2) - 2\beta_1^2 \\ \alpha_{23} = \beta_1(-6\beta_2 + \beta_1^2 + 3\beta_2^2) \\ \alpha_{24} = 4\beta_2(-\beta_2 + \beta_1^2) \\ \alpha_{25} = 5\beta_1\beta_2^2, \alpha_{26} = 2\beta_2^3 \end{cases} \quad (27)$$

$$D_3(\theta) = \left[\frac{\rho_0(\theta)}{R} \right]^3 = \alpha_{30} + \sum_{k=1}^6 \alpha_{3k} \cos(2k\theta) \quad (28)$$

$$\begin{cases} \alpha_{30} = 1 + 3(2\beta_1^2 + 2\beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2)/4 \\ \alpha_{31} = 3\beta_1(1 + \beta_2 + \beta_1^2/4 + \beta_2^2/2) \\ \alpha_{32} = 3\beta_2(1 + \beta_1^2/2 + \beta_2^2/4) + 3\beta_1^2/2 \\ \alpha_{33} = \beta_1(3\beta_2 + \beta_1^2/4 + 3\beta_2^2/4) \\ \alpha_{34} = 3\beta_2(2\beta_2 + \beta_1^2)/4 \\ \alpha_{35} = 3\beta_1\beta_2^2/4, \alpha_{36} = \beta_2^3/4 \end{cases} \quad (29)$$

代入式(20)后，得到无量纲化后的非理想圆环平面内弯曲平衡微分方程：

$$\frac{d^3 \bar{M}(\theta)}{d\theta^3} + D_2(\theta) \frac{d^2 \bar{M}(\theta)}{d\theta^2} + (D_1(\theta) + \lambda D_3(\theta)) \frac{d\bar{M}(\theta)}{d\theta} +$$

$$D_0(\theta) \bar{M}(\theta) = -\lambda D_4(\theta) \quad (30)$$

2.3 非理想圆环的屈曲微分方程

为了分析非理想圆环平面内屈曲，设荷载参数 $\lambda = \lambda_b$ 时，圆环发生屈曲，无量纲弯矩 $\bar{M}(\theta)$ 出现微小变化：

$$\bar{M}(\theta) = \bar{M}_0(\theta) + \bar{M}_b(\theta) \quad (31)$$

式中 屈曲前的弯矩 $\bar{M}_0(\theta)$ 代表基本平衡路径上的

解,圆环屈曲引起的弯矩(微小增量) $\bar{M}_b(\theta) \neq 0$ 代表屈曲模态,满足以下非理想圆环屈曲微分方程:

$$\frac{d^3 \bar{M}_b(\theta)}{d\theta^3} + D_2(\theta) \frac{d^2 \bar{M}_b(\theta)}{d\theta^2} + D_0(\theta) \bar{M}_b(\theta) + (D_1(\theta) + \lambda D_3(\theta)) \frac{d\bar{M}_b(\theta)}{d\theta} = 0 \quad (32)$$

忽略轴向变形后,圆环屈曲引起的位移(微小增量)为转角变形 $\phi_b(\theta)$,无量纲切向位移 $\bar{u}_b(\theta) = u_b(\theta)/R$,无量纲法向位移 $\bar{w}_b(\theta) = w_b(\theta)/R$,它们可以根据以下微分方程求解:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_b(\theta)}{d\theta} &= -\frac{\rho_0(\theta)}{R} \bar{M}_b(\theta), \quad \bar{w}_b(\theta) = \frac{d\bar{u}_b(\theta)}{d\theta} \\ \frac{d^2 \bar{u}_b(\theta)}{d\theta^2} + \bar{u}_b(\theta) &= \frac{\rho_0(\theta)}{R} \phi_b(\theta) \end{aligned} \quad (33)$$

3 非理想圆环屈曲的特征方程

3.1 反对称屈曲

采用傅里叶级数逼近非理想圆环屈曲微分方程(32)的解。当圆环发生反对称屈曲时,设无量纲弯矩 $\bar{M}_b(\theta)$ 为反对称的傅里叶级数:

$$\bar{M}_b(\theta) = \sum_{j=1}^n a_j \sin(2j\theta) \quad (34)$$

式中 n 为傅里叶级数的项数, $a_j(j=1,2,\dots,n)$ 为待定系数。由式(33)可求出转角变形 $\phi_b(\theta)$ 。无量纲切向位移 $\bar{u}_b(\theta)$ 和无量纲法向位移 $\bar{w}_b(\theta)$ 。不难验证,以上解能够满足连续性条件 $\bar{M}_b(-\pi) = \bar{M}_b(\pi)$, $\phi_b(-\pi) = \phi_b(\pi)$, $\bar{u}_b(-\pi) = \bar{u}_b(\pi)$, $\bar{w}_b(-\pi) = \bar{w}_b(\pi)$ 和边界条件 $\bar{w}_b(0) = \bar{u}_b(0) = 0$, $\bar{w}_b(\pi) = 0$ 。

将式(34)代入式(32),用最小二乘法可导出反对称屈曲的特征方程组如下:

$$(\lambda_s^2 [C_{s2}] - 2\lambda_s [C_{s1}] + [C_{s0}]) \{x_s\} = \{0\} \quad (35)$$

式中 $\{x_s\}$ 为 n 阶列向量; $[C_{s2}]$, $[C_{s1}]$ 和 $[C_{s0}]$ 为 $n \times n$ 阶矩阵:

$$\{x_s\}^T = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n) \quad (36)$$

$$[C_{s2}] = [B_s]^T \text{diag}\{W\} [B_s] \quad (37)$$

$$[C_{s1}] = \frac{[A_s]^T \text{diag}\{W\} [B_s] + [B_s]^T \text{diag}\{W\} [A_s]}{2} \quad (38)$$

$$[C_{s0}] = [A_s]^T \text{diag}\{W\} [A_s] \quad (39)$$

式中 $\text{diag}\{W\}$ 是反映加权值的 $(n+7) \times (n+7)$ 阶对角矩阵,其对角元素为 $W_i(i=1,2,\dots,n+7)$,

本文取 $W_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2[2(i-1)\theta] d\theta (i=1,2,\dots,n+7)$; $[A_s]$, $[B_s]$ 为 $(n+7) \times n$ 阶矩阵:

$$[A_s] = [A^{(4)}] - [A^{(2)}] \text{diag}\{d^{(2)}\} - [A^{(1)}] \text{diag}\{d^{(1)}\} + \frac{[A^{(0)}]}{2} \quad (40)$$

$$[B_s] = [A^{(3)}] \text{diag}\{d^{(1)}\} \quad (41)$$

式中 $\text{diag}\{d^{(m)}\}(m=1,2)$ 是 $n \times n$ 阶对角矩阵,其对角元素为 $d_j^{(m)}$; $[A^{(m)}](m=0,1,2,3,4)$ 和 $[B^{(m)}]$, $[C^{(m)}](m=0,1,2,3)$ 是 $(n+7) \times n$ 阶矩阵,其元素分别为 $A_j^{(m)}$, $B_j^{(m)}$ 和 $C_j^{(m)}$:

$$d_j^{(m)} = m \cdot j^m (m=1,2; j=1,2,\dots,n) \quad (42)$$

$$[A^{(m)}] = [B^{(m)}] - [C^{(m)}] (m=0,2) \quad (43)$$

$$[A^{(m)}] = [B^{(m)}] + [C^{(m)}] (m=1,3) \quad (44)$$

$$A_{ij}^{(4)} = (2j)^3 (j=1,2,\dots,n; i=j+1) \quad (45)$$

$$B_{ij}^{(m)} = \begin{cases} \alpha_{mk} (m=0,2; k=1,\dots,6; j=1,\dots,n; i=j+k+1) \\ -\alpha_{mk} (m=0,2; k=1,\dots,6; i=2,\dots,n; j=i+k-1) \end{cases} \quad (46)$$

$$B_{ij}^{(m)} = \begin{cases} 2\alpha_{m0} (m=1,3; j=1,\dots,n; i=j+1) \\ \alpha_{mk} (m=1,3; k=1,\dots,6; j=1,\dots,n; i=j+k+1) \\ \alpha_{mk} (m=1,3; k=1,\dots,6; i=2,\dots,n; j=i+k-1) \end{cases} \quad (47)$$

$$C_{ij}^{(m)} = C_{ji}^{(m)} = \alpha_{mk} (m=0,1,2,3; i=1,\dots,6; j=1,\dots,7-i; k=i+j-1) \quad (48)$$

以上矩阵中,未列出的其他元素均为0。

求解矩阵特征值问题式(35),求得复数特征值和特征向量。特征值的实部作为屈曲荷载因子的近似值,设其中最小的正值为 λ_{s1} ;特征值的虚部作为近似值误差的一种度量。特征向量的实部作为屈曲模态。计算圆环平面内反对称屈曲的临界荷载系数 $\lambda_{cr} = \lambda_{s1} / C_{\rho_0}^3(\beta)$,进一步可求得临界荷载 $q_{0,cr} = \lambda_{cr} EI / R_0^3$ 。

3.2 对称屈曲

当圆环发生对称屈曲时,设无量纲弯矩 $\bar{M}_b(\theta)$ 为对称的傅里叶级数:

$$\bar{M}_b(\theta) = \frac{b_0}{2} + \sum_{j=1}^n b_j \cos(2j\theta) \quad (49)$$

式中 $b_j(j=0,1,2,\dots,n)$ 为待定系数, n 为傅里叶级数的项数。由求得转角变形 $\phi_b(\theta)$ 如下:

$$\phi_b(\theta) = -\frac{\theta(b_0 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2)}{2} - \sum_{j=1}^{n+2} c_j \sin(2j\theta) - C_\phi \quad (50)$$

式中 c_j 是 b_j 的线性组合, C_ϕ 为待定系数。以上解需要满足连续性条件:

$$\bar{M}_b(-\pi) = \bar{M}_b(\pi), \quad \phi_b(-\pi) = \phi_b(\pi) \quad (51)$$

第一个条件自动满足,由第二个条件导出:

$$b_0 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 = 0 \quad (52)$$

进一步可以求出无量纲切向位移 $\bar{u}_b(\theta)$ 和无量纲法向位移 $\bar{w}_b(\theta)$ 。不难验证,它们能够满足连续性条件 $\bar{u}_b(-\pi) = \bar{u}_b(\pi)$, $\bar{w}_b(-\pi) = \bar{w}_b(\pi)$ 和边界条件 $\bar{w}_b(0) = \bar{u}_b(0) = 0, \bar{u}_b(\pi) = 0$ 。

将式(49)代入式(32),并利用式(52)消去 b_0 ,用最小二乘法可导出对称屈曲的特征方程组如下:

$$(\lambda_c^2 [C_{c2}] - 2\lambda_c [C_{c1}] + [C_{c0}]) \{x_c\} = \{0\} \quad (53)$$

式中 $\{x_c\}$ 为 n 阶列向量, $[C_{c2}]$, $[C_{c1}]$ 和 $[C_{c0}]$ 为 $n \times n$ 阶矩阵:

$$\{x_c\}^T = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n) \quad (54)$$

$$[C_{c2}] = [B_c]^T [B_c] \quad (55)$$

$$[C_{c1}] = ([A_c]^T [B_c] + [B_c]^T [A_c])/2 \quad (56)$$

$$[C_{c0}] = [A_c]^T [A_c] \quad (57)$$

式中 $[A_c]$ 和 $[B_c]$ 为 $(n+6) \times n$ 阶矩阵:

$$[A_c] = [F^{(4)}] - [F^{(2)}] \text{diag}\{d^{(2)}\} - [F^{(1)}] \text{diag}\{d^{(1)}\} + ([F^{(0)}] - [F^{(5)}])/2 \quad (58)$$

$$[B_c] = [F^{(3)}] \text{diag}\{d^{(1)}\} \quad (59)$$

式中 $\text{diag}\{d^{(m)}\} (m=1,2)$ 是 $n \times n$ 阶对角矩阵式(42), $[F^{(m)}] (m=0,1,2,3,4,5)$ 和 $[G^{(m)}], [H^{(m)}] (m=0,1,2,3)$ 是 $(n+6) \times n$ 阶矩阵,其元素分别为 $F_{ij}^{(m)}, G_{ij}^{(m)}, H_{ij}^{(m)}$ 和 $[F^{(5)}]$ 由式(52)导出:

$$[F^{(m)}] = [G^{(m)}] + [H^{(m)}] \quad (m=0,2) \quad (60)$$

$$[F^{(m)}] = [G^{(m)}] - [H^{(m)}] \quad (m=1,3) \quad (61)$$

$$F_{ij}^{(4)} = (2j)^3 \quad (i=j=1, \dots, n) \quad (62)$$

$$F_{ij}^{(5)} = \alpha_{0,ij} \beta_j \quad (i=1, \dots, 6; j=1, 2) \quad (63)$$

$$G_{ij}^{(m)} = \begin{cases} \alpha_{mk} (m=0,2; k=1, \dots, 6; j=1, \dots, n; i=j+k) \\ -\alpha_{mk} (m=0,2; k=1, \dots, 6; i=1, \dots, n-1; j=i+k) \end{cases} \quad (64)$$

$$C_{ij}^{(m)} = \begin{cases} 2\alpha_{m0} (m=1,3; j=1, \dots, n; i=j) \\ \alpha_{mk} (m=1,3; k=1, \dots, 6; j=1, \dots, n; i=j+k) \\ \alpha_{mk} (m=1,3; k=1, \dots, 6; i=1, \dots, n-1; j=i+k) \end{cases} \quad (65)$$

$$H_{ij}^{(m)} = H_{ji}^{(m)} = \alpha_{mk} (m=0,1,2,3; i=1, \dots, 5; j=1, \dots, 6-i; k=i+j) \quad (66)$$

以上矩阵中,未列出的其他元素均为0。

求解矩阵特征值问题式(53),求得复数特征值和特征向量。特征值的实部作为屈曲荷载因子的近似值,设其中最小的正值为 λ_{c1} 。计算圆环平面内对称屈曲的临界荷载系数 $\lambda_{cr} = \lambda_{c1} / C_{p0}^3(\beta)$,进一步可求得临界荷载 $q_{0,cr} = \lambda_{cr} EI / R_0^3$ 。

4 非理想圆环临界荷载系数

4.1 临界荷载系数计算

在计算临界荷载系数之前,首先讨论解的收敛

表1 屈曲解的收敛性

Tab.1 Solution convergence of buckling

n	反对称屈曲		对称屈曲	
	λ_{cr}	R_{max}	λ_{cr}	R_{max}
14	0.968542	2.778×10^{-4}	1.154500	2.769×10^{-4}
16	0.968585	2.565×10^{-4}	1.154706	3.569×10^{-5}
18	0.968585	2.603×10^{-4}	1.154707	3.211×10^{-5}
20	0.968586	2.510×10^{-4}	1.154710	1.268×10^{-5}
22	0.968586	2.508×10^{-4}	1.154710	1.024×10^{-5}

表2 临界荷载系数 λ_{cr}

Tab.2 Critical load coefficients λ_{cr}

β	反对称屈曲		对称屈曲	
	λ_{cr}	$e_k(\%)$	λ_{cr}	$e_k(\%)$
0.00	3.000000	0.00	3.000000	0.00
± 0.04	2.945019	-1.83	2.969331	-1.02
± 0.08	2.789193	-7.03	2.876552	-4.11
± 0.12	2.555857	-14.80	2.720129	-9.33
± 0.16	2.275465	-24.15	2.501508	-16.62
± 0.20	1.980488	-33.98	2.232852	-25.57
± 0.24	1.700259	-43.32	1.942940	-35.24
± 0.28	1.454870	-51.50	1.670308	-44.32
± 0.32	1.252451	-58.25	1.444708	-51.84
± 0.36	1.092029	-63.60	1.275195	-57.49
± 0.40	0.968586	-67.71	1.154710	-61.51

性。以圆环反对称屈曲为例,式(34)表示的 $\bar{M}_b(\theta)$ 是关于 θ 反对称的、在区间 $\theta \in [-\pi, \pi]$ 内完备的傅里叶级数,当级数的项数 n 足够多时,临界荷载系数 λ_{cr} 会收敛到精确解;当 $\beta \neq 0$ 时, $\bar{M}_b(\theta)$ 不能精确满足微分方程式(32),屈曲模态 $a_j (j=1, \dots, n)$ 按 $\max |a_j| = 1$ 标准化后,可求得残数最大值 R_{max} 。

表1列出了不圆度参数最大取值 $\beta = 0.4$ 时, λ_{cr} 和 R_{max} 随傅里叶级数的项数 n 变化的规律。可以看出,当 $n = 20$ 时, λ_{cr} 已收敛到小数后第6位。因此,以下数值计算中,对 $\beta \in [-0.4, 0.4]$ 的所有参数,取 $n = 20$ 足够满足精度要求。

取 $n = 20, \beta \in [-0.4, 0.4]$ 变化,分别计算圆环反对称屈曲、对称屈曲的临界荷载系数 λ_{cr} ,如表2所示。表2中 $e_k = (\lambda_{cr}/3.0 - 1) \times 100\%$,反映了实际圆环偏离理想圆环导致的临界荷载系数的降幅。

从表2可以看出:(1) $\beta = 0$ 时,求得理想圆环的临界荷载系数 $\lambda_{cr} = 3$,与文献[1]的相应解析解相同;(2) λ_{cr} 关于 β 对称;(3) 以 $\beta = 0$ 的解析解为基准,随着不圆度参数 $|\beta|$ 增大, λ_{cr} 单调降低;当 $\beta = \pm 0.4$ 时,反对称屈曲、对称屈曲的临界荷载系数降幅分别达到 67.71% 和 61.51%。(4) $|\beta|$ 相同时,反对称屈曲 λ_{cr} 小于对称屈曲 λ_{cr} 。

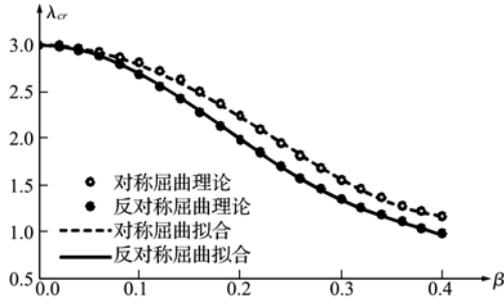


图3 λ_{cr} 与 β 关系曲线
Fig. 3 λ_{cr} vs. β curves

4.2 临界荷载系数拟合公式

λ_{cr} 与 β 关系曲线及其拟合曲线如图3所示,用最小相对误差拟合法得到圆环临界荷载系数 λ_{cr} 的拟合公式。

反对称屈曲:

$$\lambda_{cr} = 3 - 32.442\beta^2 + 196.934\beta^4 - 461.153\beta^6 \quad (67)$$

对称屈曲:

$$\lambda_{cr} = 3 + 1.153|\beta| - 36.094\beta^2 + 54.201|\beta|^3 \quad (68)$$

以上拟合公式的适用范围为 $\beta \in [-0.4, 0.4]$, 其最大相对误差分别为 $\pm 0.70\%$ 和 $\pm 0.76\%$ 。

5 非理想圆管临界荷载公式及应用

5.1 非理想长圆管临界荷载计算公式

当公称外径为 D 的圆截面柱壳的长度大于临界长度 $L_c = 1.11D\sqrt{D/t}$ 时^[6], 称为圆截面长柱壳, 本文简称为长圆管。对于长度远远大于该临界长度的长圆管, 采用平面应变假设, 将长圆管在均匀静水压力作用下的稳定性问题简化为单位宽度 $b = 1$ 的等价圆环在均匀静水压力作用下的稳定性问题, 其临界压力计算公式:

$$q_{0cr} = \frac{\lambda_{cr} E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{R_0} \right)^3 \quad (69)$$

式中 λ_{cr} 选反对称屈曲对应的拟合公式(67), E 为弹性模量, μ 为泊松比。

5.2 算例

某煤矿瓦斯抽放孔施工过程中, 当截面为 $\phi 560 \times 12$ mm 的无缝钢管下沉至深度约 471 m 时, 因管外护壁泥浆压力过大引起钢管中部局部失稳, 导致钢管卡死在护壁套管内。以下分析因钢管外径波动和钢管壁厚偏差可能引起的钢管临界压力的降幅。

根据无缝钢管尺寸、外形、重量及允许偏差^[4] 的规定, 该瓦斯抽放钢管尺寸类别为普通钢管尺寸

表3 长圆钢管的临界压力

Tab. 3 Critical pressures of long circular steel tubes

厚度 t (mm)	外径变 化特征	D_{max} (mm)	D_{min} (mm)	β (%)	q_{0cr} (MPa)	e_q (%)
公称 厚度 12.0	公称外径	560	560	0.00	4.754	0.00
	最大变到最小	567	551.6	2.81	4.732	-0.47
	最大变到公称	567	560	1.27	4.631	-2.58
最小 厚度 10.5	最大允许外径	567	567	0.00	4.576	-3.74
	公称外径	560	560	0.00	3.159	-33.56
	最大变到最小	567	551.6	2.81	3.144	-33.87
10.5	最大变到公称	567	560	1.27	3.073	-35.36
	最大允许外径	567	567	0.00	3.041	-36.03

组, 属第三系列特殊用途钢管, 尺寸允许偏差参照“非标准化为主的钢管”确定; 采用“非标准化外径允许偏差”等级 ND1, 外径允许偏差 $+1.25\%$ 和 -1.50% ; 采用“非标准化壁厚允许偏差”等级 NS1, 壁厚允许偏差 $+15\%$ 和 -12.5% 。

钢管弹性模量 $E = 2.06 \times 10^5$ MPa, 泊松比 $\mu = 0.3$ 。计算结果见表3, 其中 e_q 为外径偏差和厚度偏差引起的临界压力的降幅。

从表3可以看出, 钢管外径变化对临界压力的影响规律: 以公称厚度、公称外径的理想圆管为基准: (1) 当外径从最大变到最小(最大外径偏大 1.25% 、最小外径偏小 1.50%) 时, 尽管此时不圆度最大, 但由于其平均外径比公称外径更小, 不圆度对临界压力的影响相对较小; (2) 当外径从最大变到公称(最大外径偏大 1.25% 、最小外径为公称外径) 时, 此时不圆度居中, 临界压力降低 2.58% ; (3) 当钢管为最大允许外径的理想圆管时, 临界压力降低 3.74% 。

由表3可知, 由于外径允许偏差显著小于壁厚允许偏差, 在规范允许偏差内, 外径偏大导致临界压力的降幅不如壁厚偏小导致的降幅显著。

6 结 语

(1) 针对曲率半径关于两个正交轴对称波动变化的非理想圆环在均匀静水压力作用下的平面内稳定性问题, 采用傅里叶级数逼近圆环屈曲微分方程的解, 用最小二乘法导出屈曲特征方程, 分别求得反对称屈曲和对称屈曲的临界荷载系数 λ_{cr} 。以理想圆环的临界荷载系数为基准, 随着截面不圆度参数 $|\beta|$ 增大, 非理想圆环的临界荷载系数 λ_{cr} 单调降低。当不圆度参数 $\beta = 0.4$ 时, 反对称屈曲、对称屈曲的临界荷载系数降幅分别达 67.71% 和 61.51% 。

(2) 用最小相对误差拟合法得到了精度较高的非理想圆环反对称屈曲、对称屈曲的临界荷载系数 λ_{cr} 拟合公式, 其最大相对误差仅为 $\pm 0.70\%$ 和 $\pm 0.76\%$ 。

(3) 非理想圆环反对称屈曲 λ_{cr} 小于对称屈曲 λ_{cr} , 因此非理想圆环先发生反对称屈曲, 临界荷载计算公式中应选反对称屈曲对应的 λ_{cr} 拟合公式。

(4) 采用平面应变假设, 把上述非理想圆环的临界荷载系数拟合公式推广到非理想长圆管在均匀静水压力作用下的临界压力计算公式, 并给出了某煤矿瓦斯抽放圆钢管的局部稳定性算例。算例结果表明, 在规范允许偏差内, 钢管外径不均匀偏大导致临界压力的降幅仅为 2.58% , 不如钢管壁厚偏小导致的降幅显著。

参考文献 (References):

- [1] Dinnik A N. 拱的稳定性[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1958. (Dinnik A N. *The Stability of Arches*[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1958. (in Chinese))
- [2] 杨 辉. 波形扰动分布荷载对钢构件及单层网壳结构稳

定性的影响[D]. 上海: 同济大学, 2009. (YANG Hui. The influence of fluctuating loads on the stability of steel members and single-layer latticed shells [D]. Shanghai: Tongji University, 2009. (in Chinese))

- [3] 邓长根. 壁厚对称波动圆环在静水压力作用下的临界外压[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2011, 41(2): 347-351. (DENG Chang-gen. Critical pressure of circular ring with symmetric fluctuant wall thickness under hydrostatic pressure[J]. *Journal of Southeast University (Natural Science Edition)*, 2011, 41(2): 347-351. (in Chinese))
- [4] 中华人民共和国国家标准. GB/T 17395-2008 无缝钢管尺寸、外形、重量及允许偏差[S]. 北京: 中国标准出版社, 2008. (GB/T 17395-2008 Dimensions, Shapes, Masses, and Tolerances of Seamless Steel Tubes[S]. Beijing: China Standardization Press, 2008. (in Chinese))
- [5] ENV 1993-1-6. Eurocode 3 Design of Steel Structures, Part 1-6 [S]. Brussels: European Committee for Standardisation, 1999.
- [6] Antaki G A. *Piping and Pipeline Engineering: Design, Construction, Maintenance, Integrity, and Repair*[M]. New York: Marcel Dekker, 2003.

Influence of out-of-roundness on the critical loads of circular rings and circular tubes under hydrostatic pressure

DENG Chang-gen

(Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The in-plane buckling problem of a circular ring with symmetric fluctuant radius of curvature under uniform hydrostatic pressure is solved with Least Squares Method, and the critical load coefficients of antisymmetric buckling and symmetric buckling are calculated, respectively. The critical load coefficient of antisymmetric buckling is reduced by 67.71% for out-of-roundness parameter $\beta=0.4$. High precision formulas, the relative errors of which are within $\pm 0.76\%$, of the critical load coefficients are obtained by minimum-relative-error data fitting. Based on the plane strain hypothesis, the critical load formulas are extended to a long circular tube with fluctuant radius of curvature under uniform hydrostatic pressure. The formulas are applied to the calculation of local buckling of a long circular steel tube, and the critical load is reduced only by 2.58% for the diameter fluctuating between the allowable maximum diameter and the nominal diameter.

Key words: circular ring; critical load; out-of-roundness; hydrostatic pressure; least squares method