文章编号: 1001-0920 (2012) 02-0291-04

基于 LMI 的线性时变周期系统的稳定性及鲁棒控制

张雪峰, 杨 明
(东北大学 理学院，沈阳 110819)

摘 要: 线性时变周期 (LTVP) 系统的能控性、能观性、稳定性、镇定性等问题的研究一般需要依赖于系统的状态转移矩阵. 但是, 获得一般 LTVP 系统的状态转移矩阵十分困难. 借鉴解决线性定常系统鲁棒控制问题的思路, 把周期问题转化为一类范数有界问题, 避开了求取系统状态转移矩阵; 设计了基于 LMI 的使 LTVP 系统镇定的无记忆反馈控制器和基于 LMI 的使 LTVP 系统鲁棒镇定无记忆反馈控制器, 仿真算例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 线性时变周期系统；稳定性；鲁棒 H_∞ 控制；线性矩阵不等式
中图分类号: TP18　　**文献标识码:** A

Stability and robust control based on LMIs of linear time-varying periodic systems

ZHANG Xue-feng, *YANG Ming*
(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China．Correspondent：ZHANG Xue-feng, E-mail：fushun-info@tom.com)

Abstract: All of the solutions of controllability, observability, stability and stabilization of linear time-varying periodic(LTVP) system depend on its state transition matrix. However, it is very difficult to obtain the state transition matrix of an ordinary LTVP system. By using the thought of solving robust control of the linear time invariant systems, the periodic problem is converted into a kind of norm bounded problems. The calculation of the state transition matrix of LTVP systems is avoided. The linear matrix inequalities(LMIs) based memoryless state controllers of stabilization and robust stabilization of LTVP systems are designed. Two numerical examples are provided to demonstrate the effectiveness of the proposed methods.

Key words: linear time-varying periodic system；stability；robust H_∞ control；linear matrix inequalities

1 引 言

在物理和工程技术中, 许多问题最终都能转化为具有周期系数的线性微分方程组. 例如弹性力系统的动力学稳定性, 大功率发射的参数共振及质子加速器, 天体力学中的数值问题以及激光物理、卫星姿态控制、直升飞机传动系统、生态系统和经济系统中周期环境的竞争平衡等[1]. 线性时变周期 (LTVP) 系统是一类重要而复杂的系统, 该系统最近引起了众多应用方面的关注. 文献 [2] 研究了离散周期系统的模型匹配问题, 通过一个周期的状态反馈控制律, 配置一个时变周期系统的极点, 使得时变周期系统经过状态反馈被转换成一个闭环定常系统. Vicente[3]考虑了离散周期系统极点配置的问题,其主要贡献是实现了利用周期的输出反馈配置周期系统的单值矩阵极点. 陈阳舟[4]研究了周期时变线性系统的一般线性二次型最优控制和小增益定理和正实性定理, 将时不变系统的小增益定理和正实性定理推广到周期时变系统. 王平等人[5]研究了如何配置线性周期系统的特征指数, 有效地应用于磁控小卫星的控制器设计. 谈侃等人[6]研究了线性时变周期系统的鲁棒稳定及 H_∞ 控制, 给出了带有结构性不确定的线性时变周期系统二次稳定的充要条件.

周期系统的基本理论可以追溯到 Floquet 的著作[7]. 在利用 Floquet 方法之前, 需要首先计算系统的状态转移矩阵. 状态转移矩阵一般表达成一个无穷级数的形式, 数值计算较为困难. 到目前为止, 关于 LTVP 系统的能控性、能观性、稳定性、能稳性等问题的主要研究方法都依赖于其系统的状态转移矩

收稿日期: 2011-04-21；**修回日期:** 2011-07-04.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60774097)；国家留学基金项目(20103023).
作者简介: 张雪峰(1966−), 男, 副教授, 博士, 从事时变周期系统、粗糙集理论等研究；杨明(1987−), 男, 硕士生, 从事时变周期系统、无线传感器网络的研究.

阵. 通过借鉴鲁棒控制的思想, 本文将周期问题转化为一类范数有界问题, 避开了讨论状态转移矩阵, 设计了基于线性矩阵不等式 (LMI) 的使LTVP系统鲁棒镇定的无记忆状态反馈控制器.

2 LTVP系统的稳定性

考虑一个LTVP连续时间系统[8]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in \boldsymbol{R}^n, u(t) \in \boldsymbol{R}^m$, 并且 $A(t): \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $B(t): \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^{n\times m}$ 和 $C(t): \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^{r\times n}$ 是以 T 为周期的分段连续函数. $\boldsymbol{R}^n$ 表示 n 维实数空间. 系统 (1) 的状态转移矩阵用 $\varPhi(t,\tau)$ 表示, $\varPhi(t,\tau)$ 由如下微分方程唯一确定:

$$\begin{cases} \dot{\varPhi}(t,\tau) = A(t)\varPhi(t,\tau), \\ \varPhi(\tau,\tau) = I. \end{cases} \tag{2}$$

容易验证

$$\dot{\varPhi}(t+T,\tau+T) =$$
$$A(t+T)\varPhi(t+T,\tau+T) = A(t)\varPhi(t+T,\tau+T),$$

且 $\varPhi(\tau+T,\tau+T) = I$, 即 $\varPhi(t+T,\tau+T)$ 也满足式 (2). 因此有 $\varPhi(t+T,\tau+T) = \varPhi(t,\tau)$, 矩阵 $\varPhi(T,0)$ 称作单值矩阵, 它在线性时变周期系统中十分重要. 通过利用鲁棒控制中处理时变不确定性的思想, 可以把LTVP系统简化成一种范数有界的鲁棒扰动的形式.

对于系统 (1), $A(t)$ 和 $B(t)$ 是分段连续的, 且它们是范数有界的, 即存在一个常数 $\rho(0<\rho<\infty)$ 使得 $A^{\mathrm{T}}(t)A(t) \leqslant \rho^2 I$, $B(t)B^{\mathrm{T}}(t) \leqslant \rho^2 I$. 不失一般性, 设 $A(t) = A + M\varDelta_1(t)E$, $B(t) = B + M\varDelta_2(t)F$, 其中 A, M, E, F 是适当维数的常数矩阵, $\varDelta_i^{\mathrm{T}}(t)\varDelta_i(t) \leqslant I$, $i=1,2$. 下面给出几个必要的引理.

引理1[9] LTVP系统 (1) 是渐近稳定的, 如果存在一个对称正定矩阵 P, 使得

$$A^{\mathrm{T}}(t)P + PA(t) < 0,\ \forall t.$$

引理2[9] (Schur 补引理) 对于任意给定的实矩阵 S_1, S_2 和 S_3 (其中 $S_1 = S_1^{\mathrm{T}}, S_3 > 0$), 有

$$S_1 + S_2 S_3^{-1} S_2^{\mathrm{T}} < 0,$$

当且仅当

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^{\mathrm{T}} & -S_3 \end{bmatrix} < 0.$$

引理3[10] 给定适当维数复数矩阵 $\varOmega, \varGamma$ 和 $\varXi$, 其中 $\varOmega$ 是对称的, 则

$$\varOmega + \varGamma F(t)\varXi + \varXi^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)\Gamma^{\mathrm{T}} < 0$$

对任意的 $F(t)$ 满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I$, 当且仅当存在一个数 $\epsilon > 0$, 使得

$$\varOmega + \epsilon\varGamma\varGamma^{\mathrm{T}} + \epsilon^{-1}\varXi^{\mathrm{T}}\varXi < 0.$$

下面给出比渐近稳定的稳定性要强的Riccati稳定概念.

定义 1 LTVP系统 (1) 被称为Riccati稳定的, 如果对于任意的正交矩阵 $F(t), F^{\mathrm{T}}(t)F(t) = I$, 存在一个对称正定矩阵 P 使得

$$(A+MF(t)\Delta(t)E)^{\mathrm{T}}P + P(A+MF(t)\Delta(t)E) < 0,\ \forall t.$$

定理 1 LTVP系统 (1) 是Riccati稳定的, 当且仅当存在一个对称正定矩阵 X 和一个正常数 ϵ 使得

$$\begin{bmatrix} AX + XA^{\mathrm{T}} + \epsilon MM^{\mathrm{T}} & XE^{\mathrm{T}} \\ EX & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0. \tag{3}$$

证明 由定义 (1), 可得LTVP系统 (1) 是Riccati稳定的, 当且仅当存在一个对称正定矩阵 P 使得式 (3) 成立, 即

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + PMF(t)\Delta(t)E +$$
$$E^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}(t)F^{\mathrm{T}}(t)M^{\mathrm{T}}P < 0. \tag{4}$$

由引理3可知, 不等式 (4) 成立当且仅当存在一个常数 $\epsilon > 0$, 使得

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + \epsilon PMM^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} + \epsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E < 0. \tag{5}$$

由引理2, 不等式 (5) 等价于

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + \epsilon PMM^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} & E^{\mathrm{T}} \\ E & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0. \tag{6}$$

将不等式 (6) 左右同时乘以对角阵 $\mathrm{diag}(P^{-1}, I)$, 并令 $X = P^{-1}$, 则可得不等式 (3). □

由上面的讨论知, LTVP系统的Riccati稳定蕴涵系统渐近稳定.

3 LTVP系统的镇定性

下面给出保持闭环LTVP系统 (8) 的镇定性的无记忆控制器存在的充分条件.

定理 2 对于闭环LTVP系统 (8), 如果存在对称正定矩阵 X 和矩阵 W 以及大于零的常数 ϵ_1, ϵ_2 使得

$$\begin{bmatrix} \varOmega + (\epsilon_1+\epsilon_2)MM^{\mathrm{T}} & XE^{\mathrm{T}} & W^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}} \\ EX & -\epsilon_1 I & 0 \\ FW & 0 & -\epsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{7}$$

$\varOmega = AX + XA^{\mathrm{T}} + BW + W^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$, 则 $K = WX^{-1}$, $u(t) = Kx(t)$ 为无记忆状态反馈控制律, 使闭环系统

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)K)x(t) \tag{8}$$

渐近稳定.

证明 由 $A(t) = A + M\varDelta_1(t)E$, $B(t) = B + M\varDelta_2(t)F$, 令 $u(t) = Kx(t)$ 是使系统 (8) 渐近稳定的状态反馈控制律, 则由引理1, 有

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + PBK + K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P + PM(\varDelta_1(t)E +$$

$$\Delta_2(t)FK)+(\Delta_1(t)E+\Delta_2(t)FK)^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}P<0.$$

左右同乘 P^{-1}, 并令 $X=P^{-1}, W=KX$, 则可得

$$\begin{aligned}&AX+XA^{\mathrm{T}}+BW+W^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\\&M\Delta_1(t)EX+M\Delta_2(t)FW+\\&XE^{\mathrm{T}}\Delta_1^{\mathrm{T}}(t)M^{\mathrm{T}}+W^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}\Delta_2^{\mathrm{T}}(t)M^{\mathrm{T}}<0.\end{aligned}$$

通过两次利用引理 3, 可得

$$\begin{aligned}&\Omega+\epsilon_1MM^{\mathrm{T}}+\epsilon_1^{-1}XE^{\mathrm{T}}EX+\\&\epsilon_2MM^{\mathrm{T}}+\epsilon_2^{-1}W^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}FW<0,\end{aligned}$$

其中 $\Omega=AX+XA^{\mathrm{T}}+BW+W^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$. 由引理 2, 可得不等式 (7). □

4 LTVP 系统的鲁棒镇定性

给定带有结构性不确定 LTVP 系统

$$\dot{x}(t)=(A(t)+\Delta A(t))x(t)+(B(t)+\Delta B(t))u(t). \quad (9)$$

假设 1 $A(t), B(t)$ 是适当维数的分段连续实有界的 T 周期阵值函数, 由它们组成的系统是标称系统, 且有

$$[\,A(t)\ \ B(t)\,]=[\,A\ \ B\,]+M\Delta(t)[\,E\ \ F\,].$$

其中: A, B, M, E, F 为具有适当维数的矩阵, $\Delta(t)$ 的元为 Lebesgue 可测的且满足 $\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t)\leqslant I$.

假设2 $\Delta A(t), \Delta B(t)$ 表示不确定性, 有

$$[\,\Delta A(t)\ \ \Delta B(t)\,]=[\,H_1(t)\,]F(t)[\,E_1(t)\ \ E_2(t)\,].$$

其中: $H_1(t), E_1(t), E_2(t)$ 为适应维数的分段连续实有界的 T 周期阵值函数, $F(t)$ 的元为 Lebesgue 可测的且满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$, $\forall t$. 系统 (9) 可重写为

$$\begin{aligned}\dot{x}=&[A+\bar{H}_1(t)\bar{\Delta}(t)\bar{E}_1(t)]x+\\&[B+\bar{H}_1(t)\bar{\Delta}(t)\bar{E}_2(t)]u.\end{aligned}$$

其中

$$\bar{H}_1(t)=[\,M_1\ \ H_1(t)\,],\ \bar{E}_1(t)=\begin{bmatrix}N_1\\E_1(t)\end{bmatrix},$$

$$\bar{E}_2(t)=\begin{bmatrix}N_2\\E_2(t)\end{bmatrix},\ \bar{\Delta}(t)=\begin{bmatrix}\Delta(t)&0\\0&F(t)\end{bmatrix}.$$

本节中假设 $H_1(t), E_1(t), E_2(t)$ 为定常矩阵 H_1, E_1, E_2.

定理 3 LTVP 系统 (1) 是渐近稳定的, 如果存在一个对称正定矩阵 X 和一个正常数 ϵ 使得

$$\begin{bmatrix}XA^{\mathrm{T}}+XA+\epsilon\bar{H}_1\bar{H}_1^{\mathrm{T}}&X\bar{E}_1^{\mathrm{T}}\\\bar{E}_1X&-\epsilon I\end{bmatrix}<0.$$

证明方法与定理 1 类似, 此略.

定理 4 对于闭环 LTVP 系统 (1), 如果存在对称正定矩阵 X 和矩阵 W 以及大于零的常数 ϵ_1, ϵ_2 使得

$$\begin{bmatrix}\Omega+(\epsilon_1+\epsilon_2)\bar{H}_1\bar{H}_1^{\mathrm{T}}&X\bar{E}_1^{\mathrm{T}}&W^{\mathrm{T}}\bar{E}_2^{\mathrm{T}}\\\bar{E}_1X&-\epsilon_1I&0\\W\bar{E}_2&0&-\epsilon_2I\end{bmatrix}<0, \quad (10)$$

则 $K=WX^{-1}$, $u(t)=Kx(t)$ 为无记忆状态反馈控制律, 使闭环系统

$$\dot{x}(t)=(A(t)+\Delta A(t)+(B(t)+\Delta B(t))K)x(t) \quad (11)$$

渐近稳定. 其中 Ω 表示的与定理 2 中的相同.

证明方法同定理 2 类似, 此略.

5 仿真算例

例 1 考虑一个具有如下参量的 LTVP 系统:

$$A(t)=\begin{bmatrix}-\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\cos^2 t&1-\frac{3}{4}\sin t\cos t\\-1-\frac{3}{4}\sin t\cos t&-\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\sin^2 t\end{bmatrix},$$

$$B(t)=\begin{bmatrix}1-\frac{1}{2}\sin(2t)\\1-\frac{1}{2}\cos(2t)\end{bmatrix}.$$

它们可以表示如下:

$$\begin{aligned}&A(t)=\\&\begin{bmatrix}-\frac{5}{8}&1\\-1&-\frac{5}{8}\end{bmatrix}+\frac{3}{4}\begin{bmatrix}\cos^2 t&-\sin t\cos t\\-\sin t\cos t&\sin^2 t\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&1\\-1&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}+\frac{3}{8}\begin{bmatrix}\cos(2t)&-\sin(2t)\\-\sin(2t)&-\cos(2t)\end{bmatrix},\\&B(t)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\sin(2t)\\-\cos(2t)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

闭环系统可以表述如下:

$$\dot{x}(t)=(A+M\Delta_1(t)E+BK+M\Delta_2(t)FK)x(t).$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&1\\-1&-\frac{1}{4}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ M=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

$$E=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&0\\0&\frac{3}{4}\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

$$\Delta_1(t)=\Delta_2(t)=\Delta(t)=\begin{bmatrix}\cos(2t)&\sin(2t)\\\sin(2t)&\cos(2t)\end{bmatrix}.$$

则有 $\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t)=I$. 通过求解定理 2 中的线性矩阵不等式 (7), 得到 LMIs(7) 的可行解如下:

$$X=\begin{bmatrix}7.258\,6&-0.141\,3\\-0.141\,3&39.272\,9\end{bmatrix},$$

$$W=[\,-25.908\,8\ \ -25.496\,1\,],$$

$$\epsilon_1=39.994\,7,\ \epsilon_2=42.360\,4.$$

因此, 由定理 2, 可以选择

$$u(t) = [\,-3.5823 \;\; -0.6621\,]x(t)$$

作为 LTVP 系统所期望的无记忆状态反馈控制律.

例 2 考虑一个具有如下参量的 LTVP 系统 (其中 A, B, M, E, F, 与例 1 相同):

$$H_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix},\; E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},\; E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

利用 Matlab LMI 工具箱求解可行解函数 feasp, 通过求解定理 4 中的线性矩阵不等式 (10) 的可行解, 可以得到如下可行解:

$$X = \begin{bmatrix} 10.3244 & 0.2971 \\ 0.2971 & 128.9679 \end{bmatrix},$$

$$W = [\,-109.3882 \;\; -99.3155\,],$$

$$\epsilon_1 = 146.7749,\; \epsilon_2 = 250.2591.$$

因此, 由定理 4, 可以选择

$$u(t) = [\,-10.5736 \;\; -0.7457\,]x(t)$$

作为 LTVP 系统所期望的无记忆状态反馈控制律. 令 $x_0 = [\,-1 \;\; 2\,]^{\mathrm{T}}$, 容易验证, 对于任意 t, 开环 LTVP 系统 (9) 系统矩阵 $A(t)$ 的特征值的实部都等于 $1/8 > 0$, 即系统 (9) 不稳定. 闭环 LTVP 系统 (11) 的状态曲线如图 1 所示, 图 1 可以利用 Matlab 的普通微分方程函数 ode45 绘制. 无记忆状态反馈控制律 $u(t) = Kx(t)$, 可以使得闭环 LTVP 系统 (11) 在 10 s 左右达到稳定状态.

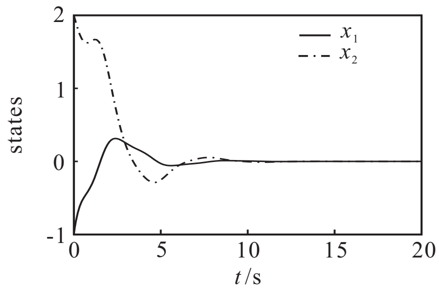

图 1 闭环 LTVP 系统

6 结 论

本文提出了一个不依赖于系统状态转移矩阵的讨论 LTVP 系统中镇定性的新方法, 给出了基于 LMI 方法的稳定性分析和能稳定控制器的设计方法; 同时给出了 LTVP 系统鲁棒 H_∞ 镇定的条件, 并设计了 LTVP 系统的 H_∞ 鲁棒控制器; 最后给出数值仿真的算例, 验证了所提方法的有效性. 本文方法也适用于一般时变系统, 但相关的结论有待进一步的研究.

参考文献(References)

[1] 秦元勋, 王慕秋, 王联. 运动稳定性理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
(Qin Y X, Wang M Q, Wang L. Theory and application of movement stability[M]. Beijing: Sciences Press, 1981.)

[2] Colaneri P, Kucera V. The model matching problem for periodic discrete-time systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(10): 1472-1476.

[3] Vicente H, Ana U. Pole-assignment problem for discrete-time linear periodic systems[J]. Int J of Control, 1987, 46(2): 687-697.

[4] 陈阳舟. 周期时变线性系统的一般线性二次型最优控制[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(4): 415-418.
(Chen Y Z. General linear quadratic optimal control for periodically time-varying linear systems[J]. Control Theory & Applications, 2002, 19(4): 415-418.)

[5] 王平, 李铁寿, 吴宏鑫. 线性周期系统特征值指数的配置[J]. 自动化学报, 2004, 30(4): 530-538.
(Wang P, Li T S, Wu H X. Charaeteristic exponent assignment for linear periodic system[J]. Acta Automatica Sinica, 2004, 30(4): 530-538.)

[6] 谈侃, 王朝珠. 线性时变周期系统的鲁棒稳定及 H_∞ 控制[J]. 自动化学报, 1996, 22(5): 611-614.
(Tan K, Wang C Z. Robust stabilization of linear time-varing periodic systems and H_∞ control[J]. Acta Automatica Sinica, 1996, 22(5): 611-614.)

[7] Kabamba P T. Monodromy eigenvalue assignment in linear periodic aystems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1986, 31(10): 950-952.

[8] 张雪峰, 宋文安. 具有周期 T 的线性时变系统的稳定性[C]. 全国青年管理科学与系统科学论文集, 1991, 1(1): 534-538.
(Zhang X F, Song W A. Stability of linear time-varying systems with T period[C]. Proc of China Youth Management Science and System Science, 1991, 1(1): 534-538.)

[9] 张庆灵, 张雪峰, 翟丁. 控制理论基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
(Zhang Q L, Zhang X F, Zhai D. Fundamentals of control theory[M]. Beijing: Higher Education Press, 2008.)

[10] Petersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems[J]. Systems & Control Letters, 1987, 29(8): 351-357.