

文章编号:1000-6893(2010)09-1796-06

基于原子内聚力与表面能等效的内聚裂纹模型

姚寅, 黄再兴

(南京航空航天大学 航空宇航学院, 江苏 南京 210016)

A Surface-energy Equivalent Cohesive Crack Model Based on Atomic Cohesive Force

Yao Yin, Huang Zaixing

(College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and
Astronautics, Nanjing 210016, China)

摘 要: 从非局部连续介质理论出发,采用一种新的理性力学方法对裂纹前缘内聚应力分布规律进行研究。首先,在内聚裂纹表面引入非局部应力边界条件,从而将内聚区内表面诱发张力(非局部表面残余)与内聚应力等价联系起来;然后,利用能量平衡关系,得到仅与表面能密度相关的 I 型裂纹内聚力新的本构方程。最后,在推导结果的基础上,计算一个具体的脆性断裂算例研究内聚区内表面能与内聚应力随裂纹张开位移(COD)变化的分布规律。由计算结果发现,裂纹尖端应力奇异性消除,且应力最大值不一定出现在裂纹尖端,而是发生在裂纹尖端周围的内聚区内。

关键词: 非局部应力边界条件; 内聚裂纹模型; 能量平衡; 表面能; 表面诱发张力; 裂纹尖端张开位移; 脆性断裂

中图分类号: V231.95; O346.1 文献标识码: A

Abstract: Starting with the nonlocal continuum theory, a new rational mechanics method is applied to study logically the cohesive stress law of ahead of a crack tip. First, the equivalence between the cohesive stress and the surface-induced traction (nonlocal surface residual) within the cohesive zone is established by introducing nonlocal stress boundary conditions on the crack surface. Then, by means of the energy balance relation, a new cohesive stress law of Mode I crack is obtained which is only concerned with the surface energy density within the cohesive zone. On the basis of the results, a concrete example of brittle fracture is calculated to investigate the distribution of surface energy and cohesive stress which changes with the variation of crack opening displacement (COD). Finally, a summary of the study is provided and several conclusions are made. The results show that the stress singularity at the crack tip is removed, and the maximum stress may occur within the cohesive zone away from the crack tip.

Key words: nonlocal stress boundary condition; cohesive crack model; energy balance; surface energy; surface-induced traction; crack tip opening displacement; brittle fracture

裂纹尖端应力解奇异现象一直是断裂理论研究中一个广泛引人关注的问题。研究者们采用多种多样的方法试图予以解决,其中 D. S. Dugdale^[1]和 G. I. Barenblatt^[2]给出的内聚裂纹模型是非常著名和行之有效的一种方法。通过引入裂纹前缘的原子内聚力区 d , 消除了裂纹尖端应力奇异性。但此理论也有不完善之处,最大的争议就在于作为内聚区边界条件的内聚应力分布规律函数应如何确定。D. S. Dugdale^[1]将内聚应力视为常数,数值上等于材料的屈服极限。虽然达到了数学处理上的简化,但显然与物理事实不

符合。G. I. Barenblatt^[2]考虑到原子间相互作用力随距离增加而衰减的特点,认为内聚应力是内聚区裂纹面上各点裂纹张开位移(COD)的函数。但由于符合这一特性的具体解析形式较难给出,大多数实际情况中仍假设内聚力为常数。在之后的研究中,众多研究者作了大量艰苦探索,试图揭示内聚应力准确的分布规律^[3-9]。他们的工作为建立内聚应力-张开位移的解析关系提供了一定参考依据,但仍未给出一个统一并具有说服力的内聚应力表述形式。直到 20 世纪 90 年代, A. Needleman^[10]和 V. Tvergaard^[11]等由研究塑性材料的界面特性入手,提出内聚力-裂纹张开位移的分布规律呈现出宏观损伤问题中应力-应变软化曲线特征。这一思想逐渐被研究者们广泛接

受,并通过研究金属聚合物保护膜界面破坏等实际问题,提出若干种符合上述特征的内聚应力函数^[11-13]。其中, J. H. Rose 等^[14]通过研究双金属界面间结合能与原子分离作用的关系,提出一种指数型内聚力分布规律。而 X. P. Xu^[15]和 M. J. van den Bosch 等^[16]在此基础上进一步完善函数形式,使指数型表达式能够从唯象的角度较准确地描述内聚力分布情况,并保证函数连续性,有利于数学处理。目前指数型函数已经成为应用较广的一种内聚力分布规律。然而这一形式仍然有其本身的缺陷,主要体现在函数含有一定数目的未知参数,确定过程较繁琐,使最终结果具有不确定性,且普适性受到限制^[16-17]。此外,现有的指数型内聚力分布函数大多是通过针对不同材料界面问题进行数值研究得到的,直接用于内聚裂纹模型仍缺乏必要的理论基础。因此,如何确定内聚应力分布规律仍是值得深入研究的问题,有必要寻找新的途径和方法予以解决。

最近, Z. X. Huang^[18]在对非局部基础理论研究中,将物体内部长程相互作用截断于表面而形成的表面诱发张力(非局部表面残余)引入应力边界条件,建立了一种新的非局部应力测度。本文将这一理论思想应用于内聚区模型,使其与裂纹表面性质联系起来,这样就为推导内聚应力分布规律提供了一条新的途径,即从考察裂纹面上表面物理量变化情况入手,进而导出内聚应力的分布函数。本文的推导过程完全在理性力学的框架下进行,这在以前关于内聚区模型的研究中从未涉及过,所得到的结果较之以前的唯象内聚力函数具有更加坚实的理论基础^[16-17],且所含未知参数数目较少,更易于确定其具体形式。最终的计算结果证明,使用新的内聚力函数计算得到的结果能够有效地消除裂纹尖端应力的奇异性。

1 理论推导

1.1 内聚裂纹模型

根据内聚裂纹模型的特点^[1-2],设平面理想裂纹半长从 $a-d$ 延伸至 a ,在裂纹两端形成长度为 d 的内聚区。在 $a-d < |x| < a$ 范围内的内聚区裂纹面上作用由于原子脱聚而产生的内聚应力 σ_{coh} ,整体裂纹面 $s_\sigma(t)$ 上处处作用表面诱发张力 γ ,无穷远处作用均布荷载 p ,其大小为 p ,如图 1 所示。裂纹面上无外载作用,则非局部应力边界条件可以写为^[18]

$$t \cdot n = \gamma \quad (1)$$

式中: t 为非局部应力张量; n 为裂纹面上单位法矢量; γ 为表面诱发张力,由文献^[18]可知, γ 是由于物体内部非局部长程相互作用截断于裂纹表面而产生的,并与裂纹面上表面能的变化密切相关。而在内聚区 $a-d < |x| < a$ 内,必有

$$t \cdot n = \gamma = \sigma_{\text{coh}} \quad (2)$$

式(2)表示在内聚区内,内聚应力 σ_{coh} 和表面诱发张力 γ 是等价的。而这在物理上很好解释,因为 σ_{coh} 和 γ 都是由于材料内部原子间长程相互作用截断于宏观裂纹表面而形成的,具有相同的物理本质。这样就将内聚应力与表面诱发张力等价联系起来,为下文利用理性力学方法推导内聚力分布规律奠定了基础。

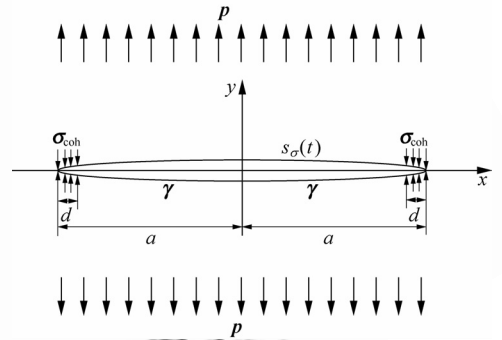


图1 平面内聚裂纹模型

Fig. 1 Plane cohesive crack model

1.2 内聚应力解析形式推导

设内聚裂纹模型中裂纹面上不受外载,仅有表面诱发张力 γ (非局部表面残余)作用(如图 1 所示),由能量平衡关系, γ 做的功等于表面能的变化,故有

$$\frac{d}{dt} \int_{s_\sigma(t)} \psi(x) ds_\sigma = \int_{s_\sigma(t)} \gamma(x) \cdot \mathbf{v}(x) ds_\sigma \quad (3)$$

式中: $s_\sigma(t)$ 为计入内聚区的裂纹整体表面积,其与时间有关; ds_σ 为当前构型下的裂纹面微面元; x 为 $s_\sigma(t)$ 上任意点坐标; $\psi(x)$ 为裂纹面上各点的表面能密度函数; d/dt 表示物质时间导数; $\mathbf{v}(x)$ 为 $s_\sigma(t)$ 上各点的速度,则 $dx/dt = \mathbf{v}$ 。对式(3)左端进行一系列推导,最终利用 Green-Stokes 定理得到表面能在裂纹面上的运输定理形式为

$$\frac{d}{dt} \int_{s_\sigma(t)} \psi(x) ds_\sigma = \int_{s_\sigma(t)} [\nabla \psi \cdot (\mathbf{n}_\sigma \otimes \mathbf{n}_\sigma) + \psi(\mathbf{n}_\sigma \cdot \nabla) \mathbf{n}_\sigma] \cdot \mathbf{n}_\sigma ds_\sigma$$

$$v ds_\sigma + \int_{\partial s_\sigma(t)} [\psi(\mathbf{I} - \mathbf{n}_\sigma \otimes \mathbf{n}_\sigma) \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n}_l d l_\sigma \quad (4)$$

式中: \mathbf{n}_σ 为裂纹面 $s_\sigma(t)$ 上的单位法向矢量; \mathbf{n}_l 和 \mathbf{l}_σ 分别为 $s_\sigma(t)$ 边界曲线 $\partial s_\sigma(t)$ 的单位法向矢量和切向矢量, 如图 2 所示。

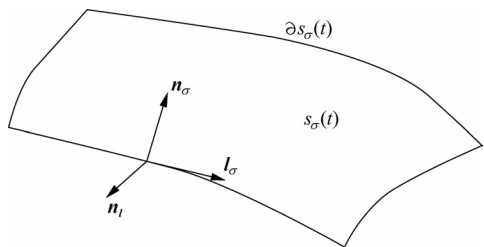


图 2 与 $s_\sigma(t)$ 和 $\partial s_\sigma(t)$ 相关的 $\mathbf{n}_\sigma, \mathbf{n}_l, \mathbf{l}_\sigma$

Fig. 2 $\mathbf{n}_\sigma, \mathbf{n}_l$ and \mathbf{l}_σ with respect to $s_\sigma(t)$ and $\partial s_\sigma(t)$

对于图 1 中的平面裂纹而言, 裂纹面 $s_\sigma(t)$ 退化为一条平面曲线 Γ , 此时 $\mathbf{n}_\sigma, \mathbf{n}_l$ 和 \mathbf{l}_σ 分别对应 Γ 上的单位主、副法向矢量和切向矢量, 如图 3 所示。

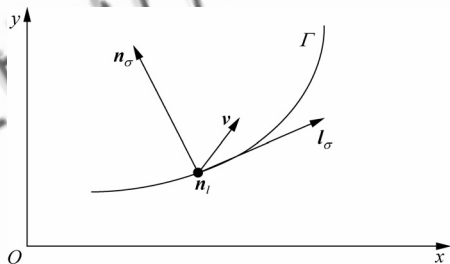


图 3 在裂纹曲线上的 $\mathbf{n}_\sigma, \mathbf{n}_l, \mathbf{l}_\sigma$

Fig. 3 $\mathbf{n}_\sigma, \mathbf{n}_l$ and \mathbf{l}_σ on crack curve Γ

由图 3 可知 \mathbf{n}_l 垂直于 Oxy 平面, 则有 $\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{v} = 0, \mathbf{n}_l \cdot \mathbf{n}_\sigma = 0$ 。联立式(3)和式(4)得

$$\frac{d}{dt} \int_{s_\sigma(t)} \psi(\mathbf{x}) ds_\sigma = \int_{s_\sigma(t)} [\nabla \psi \cdot (\mathbf{n}_\sigma \otimes \mathbf{n}_\sigma) + \psi(\mathbf{n}_\sigma \cdot \nabla) \mathbf{n}_\sigma] \cdot \mathbf{v} ds_\sigma = \int_{s_\sigma(t)} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) ds_\sigma \quad (5)$$

式(5)对所有 \mathbf{v} 均成立, 因此得到表面诱发张力 $\boldsymbol{\gamma}$ 与表面能密度相关的表述形式为

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla \psi \cdot (\mathbf{n}_\sigma \otimes \mathbf{n}_\sigma) + \psi(\mathbf{n}_\sigma \cdot \nabla) \mathbf{n}_\sigma \quad (6)$$

对于 I 型平面裂纹, 设图 3 中裂纹曲线 Γ 上的曲率半径为 R , 则 $\mathbf{n}_\sigma \cdot \nabla = 1/R$, 又由曲面几何中梯度的表示形式, 最终推得 $\boldsymbol{\gamma}$ 的法向分量 γ_{n_σ} 为

$$\gamma_{n_\sigma} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}_\sigma = \nabla \psi \cdot \mathbf{n}_\sigma + \psi(\mathbf{n}_\sigma \cdot \nabla) = \partial_{n_\sigma} \psi + \frac{\psi}{R} \quad (7)$$

式中: ∂_{n_σ} 为裂纹面上的法向导数。经分析可知, 在理想裂纹面 $0 < |x| < a - d$ 范围内, 表面能密度 ψ 可视为常数, 因此式(7)化简为

$$\gamma_{n_\sigma} = \Delta p = \frac{\psi}{R} \quad (8)$$

式(8)即为著名的 Young-Laplace 方程, 这和利用微元法对理想裂纹面分析得到的结果是一致的。而在内聚区部分 ($a - d < |x| < a$), 由于上下裂纹面原子相互作用的影响占主导地位, 表面能不再均匀分布, 而成为内聚区内裂纹张开位移 δ 的函数。联立式(2)和式(7), 内聚应力表示为

$$\gamma_{n_\sigma}(\delta) = \sigma_{\text{coh}}(\delta) = \partial_{n_\sigma} \psi(\delta) + \frac{\psi(\delta)}{R} \quad (9)$$

式中: σ_{coh} 为 $\boldsymbol{\sigma}_{\text{coh}}$ 在 I 型裂纹问题中退化而成的标量形式。这样就得到 I 型裂纹内聚应力 σ_{coh} 仅与材料表面性质相关的本构形式。注意到式(9)完全是在理性力学框架下推导得到, 与唯象的内聚力表述相比具有更坚实的物理基础。

2 算例及分析

利用第 1 节推导结果计算一个具体的脆性断裂的算例, 考察 I 型裂纹表面能及内聚应力在内聚区的分布。考虑一块含有裂纹(如图 1 所示)的无限大玻璃薄板, 有关材料常数为: 弹性模量 $E = 6.2 \times 10^4$ MPa, 泊松比 $\nu = 0.3$, 外加无穷远处拉伸荷载 $p = 18$ MPa, 设含内聚区的裂纹半长 $a = 1.4$ mm。由于式(9)涉及裂纹面上的曲率半径和法向导数, 故需要知道裂纹的形状。对 I 型裂纹而言, 可使用其经典位移解来近似描述图 1 中裂纹面上的张开位移, 即

$$u_y = \frac{1 + \kappa}{4\mu} p \sqrt{a^2 - x^2} \quad |x| < a \quad (10)$$

式中: $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; $\mu = E/[2(1 + \nu)]$ 。由于材料的内部特征长度远小于宏观裂纹长度, 故使用经典位移形式的合理性可以保证^[19]。此时可认为裂纹面张开成一个椭圆, 即

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{u_y^2}{[a(1 + \kappa)p/(4\mu)]^2} = 1 \quad (11)$$

式中: a 为长半轴; $a(1 + \kappa)p/(4\mu)$ 为短半轴。为简便起见, 令 $\lambda = (1 + \kappa)/(4\mu)$, 则短半轴 $b = \lambda pa$, $y = u_y$ 。由椭圆的几何特点, 即可得到裂纹面上各点的曲率半径及法向导数公式。

对式(9)左端的内聚应力 σ_{coh} 进一步处理。由脆性断裂机制可知^[20], 内聚区裂纹面上单位面积内 σ_{coh} 所做的功 W 全部转化为由于原子脱聚而形

成的上下裂纹表面的表面能密度 ψ , 故有

$$W = 2\psi(\delta) = \int_0^\delta \sigma_{\text{coh}}(t) dt \quad (12)$$

式中: t 为积分参数; 注意到 $\delta = 2u_y$, 且内聚区内 u_y 仍满足式(10)。将式(12)对 δ 求导可得

$$\sigma_{\text{coh}} = \frac{dW}{d\delta} = 2 \frac{d\psi}{d\delta} = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{d\psi}{du_y} = \frac{d\psi}{du_y} \quad (13)$$

联立式(9)~式(11)和式(13), 可得到仅在内聚区成立的关于表面能密度 ψ 的一阶微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{du_y} + f(u_y)\psi &= 0 \\ f(u_y) &= \lambda^4 p^4 a^2 u_y / \{ [(1 + \lambda^2 p^2) u_y^2 - \\ &u_y \sqrt{\lambda^4 p^4 a^2 + (1 - \lambda^2 p^2) u_y^2} - \\ &\lambda^4 p^4 a^2] [\lambda^4 p^4 a^2 + (1 - \lambda^2 p^2) u_y^2] \} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

在内聚区末端 $|x|=a$ 处, $u_y=0$, 设图 1 中理想裂纹尖端 $|x|=a-d$ 处的裂纹尖端张开位移 (CTOD) 值为 δ_i , 则 $0 < u_y < \delta_i/2$ 。但由于内聚区长度 d 未知, 无法由式(10)得到 δ_i 。考虑到 $|x|=a-d$ 是内聚区与理想裂纹部分的分界点, 其对应的内聚力处于即将消失的临界状态, 因此 $|x|=a-d$ 处裂纹张开位移 δ_i 应恰好等于原子间相互作用的有效距离, 即材料内部长程相互作用的有效半径 r_c , 也称之为非局部影响半径^[21], 由此可得 u_y 在内聚区内的最大值为

$$u_y |_{|x|=a-d} = r_c/2 \quad (15)$$

u_y 的定义域界定为 $[0, r_c/2]$, 其中非局部影响半径 r_c 是反映材料内部微观特性的一个常数。联立式(10)和式(15)即可求出内聚区长度 d 。选取不同的 r_c 值进行计算, 发现所得结果基本符合文献^[20]中反映出的 r_c 和 d 的关系, 从而可验证上述处理方法的合理性。

下面对式(14)进一步无量纲化, 令

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{\psi}{pa} \\ u_y^* &= \frac{u_y}{\lambda^2 p^2 a} \\ r_c^* &= \frac{r_c}{\lambda^2 p^2 a} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

与式(14)联立, 得到化简的方程形式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi^*}{du_y^*} + f^*(u_y^*)\psi^* &= 0 \\ f^*(u_y^*) &= u_y^* / \{ [(1 + \lambda^2 p^2) u_y^{*2} - \\ &u_y^* \sqrt{1 + (1 - \lambda^2 p^2) u_y^{*2}} - 1] \cdot \\ &[1 + (1 - \lambda^2 p^2) u_y^{*2}] \} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

u_y^* 的取值范围为 $[0, r_c^*/2]$ 。对脆性断裂问题, δ_i 取纳米量级^[20], 令 $r_c = 10 \text{ nm}$, 可得 $r_c^* = 20.0$ 。对式(17)求数值解, 得到内聚区表面能密度 ψ^* 随张开位移 u_y^* 的分布曲线, 如图 4 所示。

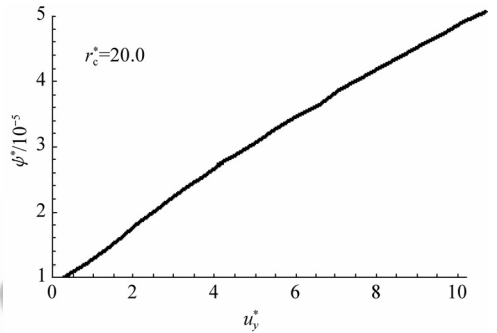


图 4 内聚区表面能密度随裂纹张开位移分布曲线
Fig. 4 Surface energy density vs COD in cohesive zone

由图 4 可以看出, 由于原子间相互作用的影响, 内聚区内表面能不会像在理想裂纹面上一样为常数, 而是随 u_y^* 的增大而单调递增, 说明张开位移越大, 内聚应力需要做的功就越多, 转化成的表面能也就越大。另外, 虽然由图判断表面能的曲线几乎呈线性递增, 但实际上随着位移的增加, 表面能的增长速率是缓慢变小的, 这一变化趋势在表面能密度随内聚区尺寸变化的分布曲线中可以得到比较清楚的体现。

图 5 中, $x^* = x/a$ 为内聚区各点位置的无量纲坐标, 定义域为 $[1-d/a, 1]$ 。图 5 清楚地反映出了内聚区内表面能的变化趋势, 越接近内聚区与理想裂纹面交界处, 表面能增长幅度就越小, 有逐渐趋于常数的趋势。这与理想裂纹面上表面能均匀分布的性质是一致的, 从而证明上述结果的合理性。

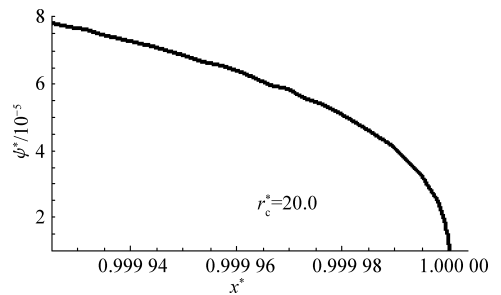


图 5 表面能密度随内聚区尺寸分布曲线
Fig. 5 Surface energy density vs cohesive zone size

下面考察内聚应力的分布规律, 由式(13)、式(16)和式(17)反解得到无量纲内聚应力为

$$\sigma_{\text{coh}}^* = \lambda^2 p \sigma_{\text{coh}} = \frac{d\psi^*}{du_y^*} = -f^*(u_y^*)\psi^* \quad (18)$$

由于从式(17)很难直接解得 ψ^* 的解析形式,故可根据图4的曲线数值拟合得到内聚区表面能的二次多项式形式为

$$\psi^* = a_1 u_y^{*2} + a_2 u_y^* + a_3 \quad (19)$$

式中: a_1 、 a_2 和 a_3 均为拟合系数,代入式(18),即得到内聚应力的近似表示形式为

$$\sigma_{\text{coh}}^*(u_y^*) = -u_y^* (a_1 u_y^{*2} + a_2 u_y^* + a_3) / \{ [1 + \lambda^2 p^2 u_y^{*2} - u_y^* \sqrt{1 + (1 - \lambda^2 p^2) u_y^{*2}} - 1] \cdot [1 + (1 - \lambda^2 p^2) u_y^{*2}] \} \quad (20)$$

由式(20)可绘出内聚应力随裂纹张开位移 u_y^* 变化的分布曲线,如图6所示。

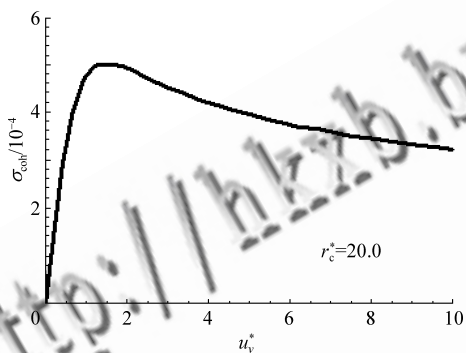


图6 内聚应力随裂纹张开位移的分布曲线

Fig. 6 Cohesive stress vs COD in cohesive zone

由图6可知内聚应力随张开位移的分布曲线与原子间相互作用力随原子间距变化的规律类似,体现出内聚区内原子内聚力起主要作用的特点。整体变化趋势符合 A. Needleman^[10] 和 V. Tvergaard^[11] 等的结论,在内聚裂纹尖端 $|x|=a$ 处为零,而后随 u_y^* 增加而迅速增大,在距裂纹尖端不远处达到峰值,因此最大应力值并非如经典弹性理论预测的那样发生在理想裂纹尖端 $|x|=a-d$ 处,而是在裂纹前缘的内聚区中出现,并且无奇异性,这与 A. Simone 等在非局部理论框架下处理裂纹问题得到的结论^[22] 是一致的。

当内聚应力达到峰值后,随着张开位移持续增加,应力值开始缓慢减小,呈现出明显的软化特征,说明内聚区本质上为裂纹前缘的应力屈服区域。在理想裂纹尖端 $|x|=a-d$ 处应力减小至有限值,消除奇异性,体现出内聚裂纹模型的物理特性。另外注意到算例中所研究的玻璃是脆性材料,由脆性材料的损伤特性可知,其应力在软化阶段一般不会随变形的增大而一直减小到零,而本文的结果则体现了这一物理事实。因此,图6给出的内聚应力分布规律是比较准确、合理的。

3 结论

(1) 通过能量平衡关系,推导得到裂纹面上表面能的输运定理形式,将其用于平面内聚裂纹模型,得到仅与材料表面性质相关的内聚应力本构方程。与以往的研究不同,这一结果完全是在理性力学框架下推导得到的,因此较之唯象内聚模型具有更坚实的物理基础。新的内聚力函数充分考虑了裂纹尖端附近微观结构对内聚力分布的影响,且与以往的内聚力分布规律相比含有较少的未知参数,更易于确定其具体形式。

(2) 在理论推导的基础上,通过具体算例揭示内聚区表面能与内聚应力随裂纹张开位移 u_y^* 变化的分布规律。其中,内聚裂纹面上表面能的变化情况在以前的研究中很少涉及。在内聚区内,由于原子内聚力的影响,表面能与尺寸相关,将随着张开位移的增大而单调递增,但其增长速率将逐渐变小,越接近理想裂纹面,表面能将越趋于常数,这与理想裂纹面上原子间作用可忽略的前提是一致的。

(3) 内聚应力随张开位移的分布曲线与原子间相互作用力随原子间距变化的规律类似,体现出原子内聚力起主要作用的特点。由计算结果可以发现裂纹尖端应力奇异性消除,且应力最大值不一定出现在裂纹尖端,而是发生在裂纹尖端周围的内聚区内,从而通过新的内聚力分布函数验证了 A. Simone 等在非局部理论框架下处理裂纹问题得到结论的正确性。当内聚应力达到峰值后,随着张开位移持续增加,应力值开始缓慢减小至有限值,呈现出软化特征。由脆性材料的损伤特性可知,应力在软化阶段一般不会随着变形的增大而减小到零,本文的结果则反映了这一物理事实。

参 考 文 献

- [1] Dugdale D S. Yielding of steel sheets containing slits[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1960, 8(2): 100-104.
- [2] Barenblatt G I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture[J]. Advances in Applied Mechanics, 1962(7): 55-129.
- [3] Willis J R. A comparison of the fracture criteria of Griffith and Barenblatt[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1967, 15(3): 151-162.
- [4] Smith E. The structure in the vicinity of a crack tip; a general theory based on the cohesive zone model[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1974, 6(2): 213-222.

- [5] Reinhardt H W. Crack softening zone in plain concrete under static loading[J]. Cement and Concrete Research, 1985, 15(1): 42-52.
- [6] Bilby B A, Cottrell A H, Swinden K H. The spread of plastic yield from a notch[J]. Proceedings of Royal Society London: Series A, 1963, 272(1350): 304-314.
- [7] Rice J R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks[J]. Journal of Applied Mechanics, 1968, 35(2): 379-386.
- [8] Rice J R. Dislocation nucleation from a crack tip: an analysis based on the Peierls concept[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1992, 40(2): 239-271.
- [9] Foote R M L, Mai Y W, Cottrell B. Crack growth resistance curves in strain-softening materials[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1986, 34(6): 593-607.
- [10] Needleman A. An analysis of tensile decohesion along an interface[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1990, 38(3): 289-324.
- [11] Tvergaard V, Hutchinson J W. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1992, 40(6): 1377-1397.
- [12] Tvergaard V. Effect of fiber debonding in a Whisker-reinforced metal[J]. Material Science and Engineering: A, 1990, 125(2): 203-213.
- [13] Needleman A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding[J]. Journal of Applied Mechanics, 1987, 54(3): 525-531.
- [14] Rose J H, Ferrante J, Smith J R. Universal binding energy curves for metals and bimetallic interfaces[J]. Physics Review Letters, 1981, 47(9): 675-678.
- [15] Xu X P, Needleman A. Void nucleation by inclusions debonding in a crystal matrix[J]. Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering, 1993, 1(2): 111-132.
- [16] van den Bosch M J, Schreurs P J G, Geers M G D. An improved description of the exponential Xu and Needleman cohesive zone law for mixed-mode decohesion[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2006, 73(9): 1220-1234.
- [17] Sorensen B F, Jacobsen T K. Determination of cohesive laws by the J integral approach[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2003, 70(14): 1841-1858.
- [18] Huang Z X. Formulations of nonlocal continuum mechanics based on a new definition of stress tensor[J]. Acta Mechanica, 2006, 187(1-4): 11-27.
- [19] Eringen A C, Spiziale C G, Kim B S. Crack-tip problem in nonlocal elasticity[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1977, 25(5): 339-356.
- [20] Lawn B R, Wilshaw T R. Fracture of brittle solids[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1975: 78-95.
- [21] Bazant Z P, Jirasek M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2002, 128(11): 1119-1149.
- [22] Simone A, Askes H, Sluys L J. Incorrect initiation and propagation of failure in nonlocal and gradient-enhanced media[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41(2): 351-363.

作者简介:

姚寅(1981—) 男,博士研究生。主要研究方向:非局部基本理论及其在断裂、损伤方面的应用。
E-mail: yaoyin104@yahoo.com.cn

黄再兴(1966—) 男,博士,教授,博士生导师。主要研究方向:广义连续介质力学的基本理论及应用。
E-mail: huangzx@nuaa.edu.cn

(编辑:徐晓)