

非线性非齐次 Markov 跳变系统的贝叶斯滤波

赵顺毅¹ 刘飞¹

摘要 针对具有时变不确定转移概率的非线性非齐次 Markov 跳变系统, 提出一种贝叶斯状态估计方法. 该方法首次采用带约束高斯概率密度函数刻画转移概率的真实特性. 然后, 基于参考概率空间法, 将实际的概率测度投影到理想概率空间, 得出信息变量的递归表达式. 同时, 在贝叶斯框架内给出转移概率矩阵的最大后验估计式. 进一步, 采用粒子逼近法求解转移概率矩阵的最大后验估计, 解决非线性函数的多重积分问题, 进而获取状态估计值. 最后, 通过一个仿真示例表明该方法的有效性.

关键词 非线性非齐次 Markov 跳变系统, 贝叶斯估计, 参考概率空间, 粒子逼近

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.00485

Bayesian Filtering for Non-linear Markov Jump Systems with Non-homogeneous Transition Probabilities

ZHAO Shun-Yi¹ LIU Fei¹

Abstract A method of Bayesian state estimation is presented for non-linear non-homogeneous Markov jump systems where the transition probabilities (TPs) are time-variant and uncertain. The proposed method firstly utilizes constrained Gaussian probability density function to describe the real characters of TPs, and then the recursion of information state is obtained by using the reference probability method by which the actual probability measure is mapped into an ideal one. Meanwhile, the maximum a posterior (MAP) estimate of transition probability matrix is given in the Bayesian framework. To implement the MAP estimation and solve the problem of multiple integral of non-linear function, particle approximation is employed further. Finally, an example is simulated to illustrate the effectiveness of our method.

Key words Non-linear non-homogeneous Markov jump systems, Bayesian estimation, reference probability method, particle approximation

工程实际中大量的动力学系统, 由于随机突变引起系统的跳变, 诸如互联子系统的变化、元件的故障等, 而这种随机变化规律通常遵循 Markov 过程, 此类系统被称为 Markov 跳变系统^[1]. 该模型本质上是不同结构动态系统的跳变或切换, 转移概率刻画了这种相互作用的机理, 描述了系统跳变行为的随机性. 若在系统运行的整个过程中, 转移概率矩阵

收稿日期 2011-04-20 录用日期 2011-12-02

Manuscript received April 20, 2011; accepted December 2, 2011

国家自然科学基金 (60974001, 61104121), 高等学校学科创新引智计划 (B12018), 中央高校基本科研业务费专项资金 (JUDCF11039) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60974001, 61104121), Programme of Introducing Talents of Discipline to Universities (B12018), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (JUDCF11039)

本文责任编辑 钟麦英

Recommended by Associate Editor ZHONG Mai-Ying

1. 轻工过程先进控制教育部重点实验室 江南大学自动化研究所 无锡 214122

1. Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry (Ministry of Education), Institute of Automation, Jiangnan University, Wuxi 214122

不随时间发生变化, 则相应的 Markov 过程为齐次的, 除此之外则被称为非齐次的^[2]. 由于其特殊的信息结构, 近 20 年来, 针对齐次 Markov 跳变系统取得了很多研究成果^[3-4], 并被广泛应用于机动目标跟踪、通信系统、故障诊断等领域. 它们均假定有限状态的 Markov 过程满足齐次性, 然后, 在此基础上获取状态的估计值.

然而, 由于客观环境的复杂性、多变性, 实际系统的转移概率很难长时间保持稳定, 非齐次 Markov 过程普遍存在于工程实际系统中, 如再入体的软着陆问题、网络控制系统中的随机丢包和时延、系统工程中的组件故障率问题等. 另一方面, 由于客观因素的不确定性, 转移概率的时变特征往往伴随着随机性, 即每一时刻的转移概率值并不确定, 并不能用特定的轨迹来描述. 并且, 转移概率并不能通过直接测量获取, 在工程实际中, 往往是通过大量的物理、半物理实验或数学仿真获取, 其结果均是对真值的一种逼近, 这就使得其不确定性进一步加深. 而转移概率是系统结构的基本参数, 精确的转移概率可大大提高算法的估计性能. 为此, 在估计过程中考虑转移概率的时变性、不确定性十分必要. 针对此类问题, 文献 [5] 将转移概率定义为随系统状态变化而变化的确定性变量, 在此基础上研究了随机混杂系统的估计问题. 然而, 一般情况下, 转移概率的动态轨迹是随机的, 这使得该方法的可行性受到了极大的限制. 此外, 对非齐次 Markov 链的分析基本集中于纯数学领域^[2, 6], 工程中针对该问题的报道仍尚少, 且缺乏一种有效方法来刻画非齐次转移概率的真实特性.

本文给出一种在转移概率时变且不确定情况下的非线性 Markov 跳变系统的贝叶斯滤波算法. 该方法首次将转移概率定义为随机变量并采用带约束高斯概率密度函数来刻画其特性. 不同于文献 [5], 本文转移概率在任意时刻的值并不确定. 在此基础上, 我们给出了在任意时刻令转移概率矩阵的任意一行满足归一化约束的充要条件. 进一步, 借助参考概率空间法^[7] 将实际概率测度映射到另一理想概率空间, 此时, 系统状态的估计转化为了信息变量的递推求解. 在贝叶斯框架内给出转移概率矩阵在每一时刻的最大后验估计式. 然而, 由于转移概率的随机性以及滤波过程中涉及到了非线性函数的多重积分问题, 直接求取信息变量的解析解几乎不可能. 为此, 我们采用粒子逼近方法^[8-9], 利用一系列离散采样值近似地实现转移概率的最大后验估计及获取信息变量的粒子递归式, 进而得到系统状态的估计值. 仿真结果表明, 本文方法不仅具有较好的滤波效果且对非齐次转移概率的不确定性具有较强的鲁棒性.

1 模型描述及预备知识

定义概率空间 (Ω, F, P) , 考虑如下非线性离散 Markov 跳变系统:

$$\begin{aligned} x_k &= f(r_k, x_{k-1}, w_k) \\ y_k &= g(r_k, x_k, v_k) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $x_k \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态变量; $y_k \in \mathbf{R}^p$ 为测量变量, 定义 $Y_k = \{y_1, \dots, y_k\}$ 为直到 k 时刻的观测序列集合; w_k 和 v_k 分别为互不相关的系统噪声和量测噪声; 系统在 k 时刻的运行模式由 r_k 确定, $\{r_k, k \geq 0\}$ 是一取值于有限状态空间 $M = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\}$ 的连续时间、离散状态的 Markov 链, 其中, \mathbf{e}_i 为在 i 处为 1, 其余为零的 m 维单位向量. f, g 分别为离散非线性时不变系统方程和测量方程. 本文考虑 Markov

过程从模态 \mathbf{e}_i 跳变到 \mathbf{e}_j 的转移概率随时间发生变化, 即:

$$\pi_{ij}^k = P_r(r_k = \mathbf{e}_j | r_{k-1} = \mathbf{e}_i, k) \quad (2)$$

其中, $1 \leq i, j \leq m$. 为表示方便, 将 k 时刻的系统模态定义为 $r_k^j = \{r_k = \mathbf{e}_j\}$. 此时, 非齐次转移概率矩阵为

$$\Pi_k = [\boldsymbol{\pi}_1^k, \boldsymbol{\pi}_2^k, \dots, \boldsymbol{\pi}_m^k]^T \quad (3)$$

其中, $[\cdot]^T$ 表示矩阵的转置, $\boldsymbol{\pi}_i^k = [\pi_{i1}^k, \pi_{i2}^k, \dots, \pi_{im}^k]^T$. 进一步, 假设:

$$p(\boldsymbol{\pi}_1^k, \dots, \boldsymbol{\pi}_m^k) = \prod_{i=1}^m p(\boldsymbol{\pi}_i^k) \quad (4)$$

为了能够很好地刻画转移概率的时变性与不确定性, 本文将集合 $\{\boldsymbol{\pi}_i^k, k \in T\}$ 认为是一个多维高斯随机过程, 同时考虑到所有概率均定义在 $[0, 1]$ 区间内, 则对于随机变量 $\boldsymbol{\pi}_i^k$ 有:

$$p(\boldsymbol{\pi}_i^k) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}_i^k - \mathbf{p}_i)^T \delta_i^{-1}(\boldsymbol{\pi}_i^k - \mathbf{p}_i)\right]}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} \det^{\frac{1}{2}}(\delta_i)}, \quad \boldsymbol{\pi}_i^k \in C_i^k \quad (5)$$

式中, C_i^k 为 $\boldsymbol{\pi}_i^k$ 的约束区域; \mathbf{p}_i, δ_i 为已知高斯函数的均值向量和协方差矩阵, 分别为 $\mathbf{p}_i = [p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im}]^T$,

$$\delta_i = \begin{bmatrix} \delta_{i1,i1} & \delta_{i1,i2} & \cdots & \delta_{i1,im} \\ \delta_{i2,i1} & \delta_{i2,i2} & \cdots & \delta_{i2,im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{im,i1} & \delta_{im,i2} & \cdots & \delta_{im,im} \end{bmatrix}$$

其中, $\delta_{ij,il} = \text{cov}(\pi_{ij}^k, \pi_{il}^k)$ 为转移概率 π_{ij}^k 与 π_{il}^k 的协方差, 均值向量 \mathbf{p}_i 满足 $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$. 考虑到任意时刻离散 Markov 系统转移概率矩阵中任意一行的元素和应为 1. 为此, 我们给出其充要条件为

$$\sum_{l=1}^m \delta_{ij,il} = 0 \quad (6)$$

其中, $i, j = 1, 2, \dots, m$, 其充要性证明如下.

证明. 充分性证明: 已知 $\delta_{ij,il} = \text{cov}(\pi_{ij}^k, \pi_{il}^k)$, 则有:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \text{cov}(\pi_{ij}^k, \pi_{il}^k) &= \sum_{l=1}^m (\mathbf{E}[\pi_{ij}^k \pi_{il}^k] - \mathbf{E}[\pi_{ij}^k] \mathbf{E}[\pi_{il}^k]) = \\ &= \sum_{l=1}^m \mathbf{E}[\pi_{ij}^k \pi_{il}^k] - \mathbf{E}[\pi_{ij}^k] \sum_{l=1}^m \mathbf{E}[\pi_{il}^k] = \\ &= \mathbf{E}[\pi_{ij}^k \sum_{l=1}^m \pi_{il}^k] - \mathbf{E}[\pi_{ij}^k] \sum_{l=1}^m p_{il} \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $i, j = 1, 2, \dots, m$. 已知 $\sum_{l=1}^m p_{il} = 1, \sum_{l=1}^m \delta_{ij,il} = 0$, 则:

$$\mathbf{E}[\pi_{ij}^k \sum_{l=1}^m \pi_{il}^k] - \mathbf{E}[\pi_{ij}^k] = 0 \quad (8)$$

显然, 一般情况下 $\pi_{ij}^k \neq 0$, 此时 $\sum_{l=1}^m \pi_{il}^k = 1$. 必要性证明: 由式 (7) 易知, 若 $\sum_{l=1}^m \pi_{il}^k = 1$, 则有:

$$\sum_{l=1}^m \delta_{ij,il} = E[\pi_{ij}^k] - E[\pi_{ij}^k] = 0 \quad (9)$$

□

可以看出, 只要协方差矩阵 δ_i 内任意一行元素和为零, 即可保证依分布 (5) 的 π_i^k 满足元素和为 1. 此时, 由式 (4) 知非齐次转移概率矩阵的概率分布为

$$p(\Pi_k) = N(\Pi_k; p, \delta), \quad \Pi_k \in C_k \quad (10)$$

其中, C_k 为 Π_k 的约束区域, $N(\cdot)$ 为多维高斯分布, $p = [p_1, p_2, \dots, p_m]^T$, $\delta = \text{diag}\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$. 易知, 以同等信息量为前提, 传统的常数转移概率矩阵为

$$\Pi = p = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \quad (11)$$

由高斯分布的特点可知, 标准差越大, 函数在均值处的跨度也就越大, 按此密度采样所得随机数的分布也就越平稳. 利用此性质, 可以直观地刻画出时变转移概率的随机性. 下面, 我们给出两种特殊情况: 1) 当标准差趋于零时, 表明当前转移概率没有不确定性, 即为已知的均值, 此时, 式 (10) 退化为式 (11). 因此, 转移概率为常数的 Markov 跳变系统可视为本文模型的一个特例; 2) 当标准差趋于无穷时, 表明对当前所使用的均值完全不信任, 即当前系统转移概率的信息不可获取.

2 贝叶斯滤波算法

贝叶斯理论给出了状态估计问题解的一般化结构, 即在最小化平均代价准则的基础上, 结合已知观测序列 Y_k , 系统自身动态及先验信息获取状态的后验估计. 定义如下代价函数:

$$J(\hat{x}_k, x_k) = (x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T \quad (12)$$

易知, 此时贝叶斯估计等价于最小均方差估计.

$$\hat{x}_k^{Bay} = \int x_k p(x_k | Y_k) dx_k = E[x_k | Y_k] \quad (13)$$

2.1 参考概率空间法

参考概率空间法是通过构建中间信息变量来求解期望值的一种方法. 针对本文所研究系统, 定义一新理想参考概率空间 $\{\Omega, F, P^*\}$, 在其概率测度 P^* 下, 有如下假设: 1) 状态序列 $\{x_k\}$ 、测量序列 $\{y_k\}$ 及模态序列 $\{r_k\}$ 彼此之间相互独立; 2) 对于任意时刻, 模态序列 $\{r_k\}$ 为均匀分布, 即

$$P_r^*(r_k^j | r_{k-1}^i) = \frac{1}{m}, \quad 1 \leq j \leq m \quad (14)$$

理想概率测度和实际概率测度之间的 R-N (Radon-Nikodym) 距离由 Λ_k^* 来定义:

$$\Lambda_k^* = \frac{p(y_{0:k}, x_{0:k}, r_{0:k})}{p^*(y_{0:k}, x_{0:k}, r_{0:k})} \quad (15)$$

根据实际系统的结构及理想概率空间下各变量间的相互独立性, Λ_k^* 可分解为

$$\Lambda_0^* = 1$$

$$\Lambda_k^* = \prod_{l=1}^k \frac{mp(y_l | x_l, r_l)p(x_l | x_{l-1}, r_l)P_r(r_l | r_{l-1}, l)}{p^*(y_l)p^*(x_l)} \quad (16)$$

此时, 式 (13) 可转换为

$$E[x_k | Y_k] = \frac{E^*[\Lambda_k^* x_k | Y_k]}{E^*[\Lambda_k^* | Y_k]} \quad (17)$$

在时刻 k , 定义如下单位信息变量^[10]:

$$\alpha_k(x_k) dx_k = E^*[\Lambda_k^* I(x_k \in dx_k) | Y_k] \quad (18)$$

其中, $I(x_k \in dx_k)$ 为 dx_k 的指示函数, 当且仅当 $x_k \in dx_k$ 为 1, 其余为 0. 依据此定义, 可得

$$E[x_k | Y_k] = \frac{E^*[\Lambda_k^* x_k | Y_k]}{E^*[\Lambda_k^* | Y_k]} = \int x_k \bar{\alpha}_k(x_k) dx_k \quad (19)$$

其中, $\bar{\alpha}_k(x_k)$ 为标准化后的信息变量, 由下式给定:

$$\bar{\alpha}_k(x_k) = \frac{\alpha_k(x_k)}{\int \alpha_k(\gamma) d\gamma} \quad (20)$$

可以看出, 此时对系统状态的估计转变为对 $\bar{\alpha}_k(x_k)$ 的求解, 只要获取当前时刻 $\bar{\alpha}_k(x_k)$ 的解析式, 便可计算出系统状态的估计值. 下面由定理 1 给出其递推表达式.

定理 1. 假设系统在 k 时刻与 $k-1$ 时刻的模态分别为 e_j 和 e_i , 其中, $i, j = 1, 2, \dots, m$, 则下列式子成立:

$$\bar{\alpha}_k(x_k) = \sum_{j=1}^m \frac{p(y_k | x_k, r_k^j)}{b_k} \times \int p(x_k | x_{k-1}, r_k^j) \times \sum_{i=1}^m \pi_{ij}^k \bar{\alpha}_{k-1}^i(x_{k-1}) dx_{k-1} \quad (21)$$

其中, $\bar{\alpha}_{k-1}^i(x_{k-1}) = \frac{\alpha_{k-1}^i(x_{k-1})}{\sum_{i=1}^m \int \alpha_{k-1}^i(\gamma) d\gamma}$,

$$b_k = \sum_{j=1}^m \int \int p(y_k | x_k, r_k^j) p(x_k | x_{k-1}, r_k^j) \times \sum_{i=1}^m \pi_{ij}^k \bar{\alpha}_{k-1}^i(x_{k-1}) dx_{k-1} dx_k$$

证明. 任意给定函数 $g(x_k)$, 依据式 (15), 可得:

$$\int g(x_k) \alpha_k(x_k) dx_k = \sum_{j=1}^m E^*[\Lambda_{k-1}^* m \pi_{ij}^k p(y_k | x_k, r_k^j) \times \frac{p(x_k | x_{k-1}, r_k^j) g(x_k)}{p^*(y_k) p^*(x_k)} \langle r_k, e_j \rangle | Y_k] \quad (22)$$

其中, $\langle r_k, e_j \rangle$ 为 r_k 的内积, 当 r_k 等于 e_j 时为 1, 其余为 0. 依据系统模态的半鞅性质^[11], 有:

$$E^*[\langle r_k, e_j \rangle] = E^*\left[\sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \langle r_{k-1}, e_i \rangle\right] \quad (23)$$

因此, 式 (22) 可进一步写为

$$\int g(x_k) \alpha_k(x_k) dx_k = \sum_{i,j=1}^m E^* [\Lambda_{k-1}^* \frac{p(y_k | x_k, r_k^j) \pi_{ij}^k}{p^*(y_k) p^*(x_k)} \times p(x_k | x_{k-1}, r_k^j) \langle r_{k-1}, \mathbf{e}_i \rangle g(x_k) | Y_k] = \sum_{i,j=1}^m E^* [\Lambda_{k-1}^* \pi_{ij}^k \int \frac{p(y_k | x_k, r_k^j) g(x_k)}{p^*(y_k)} \times p(x_k | x_{k-1}, r_k^j) dx_k \langle r_{k-1}, \mathbf{e}_i \rangle | Y_k] \quad (24)$$

根据式 (18) 及全概率公式, $k-1$ 时刻 \mathbf{e}_i 下的信息变量为

$$\alpha_{k-1}^i(x_{k-1}) dx_{k-1} = E^* [\Lambda_{k-1}^* I(x_{k-1} \in dx_{k-1}) \times \langle r_{k-1}, \mathbf{e}_i \rangle | Y_{k-1}] \quad (25)$$

将式 (25) 代入式 (24), 整理可得:

$$\int g(x_k) \alpha_k(x_k) dx_k = \int g(x_k) \sum_{j=1}^m \frac{p(y_k | x_k, r_k^j)}{p^*(y_k)} \times \int p(x_k | x_{k-1}, r_k^j) \times \sum_{i=1}^m \pi_{ij}^k \alpha_{k-1}^i(x_{k-1}) dx_{k-1} dx_k \quad (26)$$

对照式 (26) 左右两边, 有:

$$\alpha_k(x_k) = \sum_{j=1}^m \frac{p(y_k | x_k, r_k^j)}{p^*(y_k)} \int p(x_k | x_{k-1}, r_k^j) \times \sum_{i=1}^m \pi_{ij}^k \alpha_{k-1}^i(x_{k-1}) dx_{k-1} \quad (27)$$

将式 (27) 带入式 (20), 可得:

$$\bar{\alpha}_k(x_k) = \sum_{j=1}^m \frac{p(y_k | x_k, r_k^j)}{c_k} \int p(x_k | x_{k-1}, r_k^j) \times \sum_{i=1}^m \pi_{ij}^k \alpha_{k-1}^i(x_{k-1}) dx_{k-1} \quad (28)$$

其中

$$c_k = \sum_{j=1}^m \int \int p(y_k | x_k, r_k^j) p(x_k | x_{k-1}, r_k^j) \times \sum_{i=1}^m \pi_{ij}^k \alpha_{k-1}^i(x_{k-1}) dx_{k-1} dx_k \quad (29)$$

对等式 (28) 右边的分子分母同除以非零常数 d_k :

$$d_k = \sum_{i=1}^m \int \alpha_{k-1}^i(x_{k-1}) dx_{k-1} \quad (30)$$

经过简单的整理, 可得定理 1. \square

2.2 最大后验估计

由定理 1 可知, 离散事件即系统模态之间的转移概率是获取系统状态估计值的关键之一. 然而, 由上文分析可知, 本文转移概率的先验高斯分布是以传统常数矩阵为均值矩阵所构建的, 是对真实值的一种近似. 为解决该问题, 我们在贝叶斯框架下, 利用转移概率矩阵的似然对其先验分布进行修正, 获取转移概率矩阵的最大后验估计. 在 k 时刻, 依据贝叶斯定理有:

$$p(\Pi_k | Y_k) = \frac{p(y_k | \Pi_k, Y_{k-1}) p(\Pi_k | Y_{k-1})}{p(y_k | Y_{k-1})} \quad (31)$$

其中, $p(y_k | \Pi_k, Y_{k-1})$ 为转移概率矩阵 Π_k 的似然函数, $p(y_k | Y_{k-1})$ 为归一化常数. 此时, 转移概率矩阵的最大后验估计为

$$\hat{\Pi}_k \propto \arg \max_{\Pi_k} p(y_k | \Pi_k, Y_{k-1}) p(\Pi_k | Y_{k-1}) \quad (32)$$

对于似然函数 $p(y_k | \Pi_k, Y_{k-1})$, 依据全概率公式, 可得:

$$p(y_k | \Pi_k, Y_{k-1}) = \sum_{j=1}^m p(y_k | r_k^j, \Pi_k, Y_{k-1}) \times P_r(r_k^j | \Pi_k, Y_{k-1}) = \sum_{j=1}^m p(y_k | r_k^j, \Pi_k, Y_{k-1}) \sum_{i=1}^m \pi_{ij}^k \times P_r(r_{k-1}^i | \Pi_k, Y_{k-1}) \quad (33)$$

定义向量 $\Delta_k, \mathbf{v}_{k-1}$ 分别为 $\Delta_k = [\Delta_k^1, \Delta_k^2, \dots, \Delta_k^m]^T$, $\mathbf{v}_{k-1} = [v_{k-1}^1, v_{k-1}^2, \dots, v_{k-1}^m]^T$. 其中, $\Delta_k^j = p(y_k | r_k^j, \Pi_k, Y_{k-1})$, $v_{k-1}^i = P_r(r_{k-1}^i | \Pi_k, Y_{k-1})$. 则式 (33) 可简化为

$$p(y_k | \Pi_k, Y_{k-1}) = \mathbf{v}_{k-1}^T \Pi_k \Delta_k \quad (34)$$

此时, 有

$$\hat{\Pi}_k \propto \arg \max_{\Pi_k} \mathbf{v}_{k-1}^T \Pi_k \Delta_k p(\Pi_k | Y_{k-1}) \quad (35)$$

理论上可按式 (19)、式 (21) 与式 (35) 直接求取系统状态的估计值. 然而, 其递推求解过程中涉及到了以下问题: 1) 非线性概率密度函数的多重积分问题; 2) Δ_k 为已知 Π_k 情况下的似然向量. 显然, k 时刻 Π_k 为待估计量. 因此, 直接求取其解析解几乎为不可能.

3 粒子逼近

针对上述问题, 本文采用粒子逼近的方法, 其本质是利用一系列离散的采样点来逼近连续的概率密度函数. 假设 $k-1$ 时刻, 粒子总数为 $Q \times m$, 其中 Q 为每个模态下的粒子数. 定义任意模态 \mathbf{e}_i 下的先验粒子集为 $\{x_{k-1}^{i,q}, \mu_{k-1}^{i,q}\}$, $q = 1, 2, \dots, Q$. 同时, 注意到系统模态在 $k-1$ 时刻的概率独立于 Π_k . 为此, 我们有:

$$\bar{\alpha}_{k-1}^i(x_{k-1}) = \sum_{q=1}^Q \mu_{k-1}^{i,q} \delta(x_{k-1} - x_{k-1}^{i,q}) \quad (36)$$

$$v_{k-1}^i = P_r(r_{k-1}^i) \left| \hat{\Pi}_{k-1}, Y_{k-1} \right) = \sum_{q=1}^Q \mu_{k-1}^{i,q} \quad (37)$$

其中, $\hat{\Pi}_{k-1}$ 为 $k-1$ 时刻的转移矩阵的估计值. 进一步, 由于 Y_{k-1} 中并不包含任何关于 Π_k 的信息. 则在 k 时刻, 可直接按已知先验分布 (7) 采样获取 “矩阵粒子集 $\{\Pi_k^n\}$ ”, $n = 1, \dots, N$. 此时, 基于任意矩阵粒子 Π_k^n 的似然向量为

$$\Delta_k^n = [\Delta_k^{1,n}, \Delta_k^{2,n}, \dots, \Delta_k^{m,n}]^T \quad (38)$$

其中, $\Delta_k^{j,n} = p(y_k | r_k^j, \Pi_k^n, Y_{k-1})$. 可以看出, 对于式 (38) 的求解, 上文所提到的问题 2) 并不存在. 因此, 当新信息量 Y_k 到达时, 可近似按式 (39) 在矩阵粒子集 $\{\Pi_k^n\}$ 内寻求最大后验估计.

$$\hat{\Pi}_k = \Pi_k^{\hat{n}}, \hat{n} = \arg \max_{n=1,2,\dots,N} \mathbf{v}_{k-1}^T \Pi_k^n \Delta_k^n \quad (39)$$

当获取 $\hat{\Pi}_k$ 后, 将式 (36) 代入式 (21), 可得粒子递推式为

$$\bar{\alpha}_k(x_k) = \sum_{j=1}^m \frac{p(y_k | x_k, r_k^j)}{b_k} \times \sum_{i=1}^m \sum_{q=1}^Q \hat{\pi}_{ij}^k \mu_{k-1}^{i,q} p(x_k | x_{k-1}^{i,q}, r_k^j) \quad (40)$$

可以看出, 若按式 (40) 直接采样, 粒子数将随时间指数增长. 因此, 我们采用交互重采样策略, 对先验粒子进行输入交互.

$$\bar{\alpha}_{k-1}(x_{k-1}, r_{k-1}^i) \xrightarrow{\text{Mixing}} \bar{\alpha}_{k-1}(x_{k-1}, r_k^j) \quad (41)$$

获取先验粒子 $\{\bar{x}_{k-1}^{j,q}\}$ 后, 按系统动态方程更新粒子. 为避免粒子退化问题, 使用残差重抽样^[8-9] 来获得后验粒子集 $\{x_k^{j,q}\}$. 粒子权值按下式更新获取:

$$\mu_k^{j,q} = \frac{p(y_k | x_k^{j,q}, r_k^j) \sum_{i=1}^m \sum_{q=1}^Q \hat{\pi}_{ij}^k \mu_{k-1}^{i,q}}{\sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^Q p(y_k | x_k^{j,q}, r_k^j) \sum_{i=1}^m \sum_{q=1}^Q \hat{\pi}_{ij}^k \mu_{k-1}^{i,q}} \quad (42)$$

此时, 我们有:

$$\bar{\alpha}_k(x_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^Q \mu_k^{j,q} \delta(x_k - x_k^{j,q}) \quad (43)$$

结合式 (19), 可得系统的估计值为

$$\hat{x}_k = E[x_k | Y_k] = \sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^Q \mu_k^{j,q} x_k^{j,q} \quad (44)$$

注 1. 结合式 (40) 和式 (42) 可以看出, 在滤波过程中真正起作用的是系数 $p(y_k | x_k, r_k^j)$ 的相对值. 因此, 在其实现过程中, 可直接舍弃 b_k 项且不会对估计性能造成影响.

注 2. 由以上推导可以看出, 算法的性能在一定程度上依赖先验粒子集与矩阵粒子集的质量. 解决该问题常用的方法是增加粒子数目, 然而过多的粒子数会严重影响算法的在线性能. 为此, 如何很好地平衡粒子集质量与计算耗费, 有待进一步的研究.

4 仿真示例

为验证上述估计算法的有效性, 本文采用如下非线性隧道二极管电路系统^[12]:

$$\begin{aligned} C\dot{x}_1(k) &= x_2(k) - \alpha_a x_1(k) - \beta_a x_1^3(k) \\ L\dot{x}_2(k) &= -x_1(k) - Rx_2(k) + 0.1w(k) \\ y(k) &= x_1(k) + v(k) \end{aligned} \quad (45)$$

其中, $w(k) \sim N(0, 0.4)$, $v(k) \sim N(0, 1)$. 系统电路参数为 $C = 20 \text{ mF}$, $L = 1 \text{ H}$, $R = 1 \Omega$. 系统含两个模式, 其参数分别为 $\alpha_1 = -0.01$, $\beta_1 = 0.006$ 及 $\alpha_1 = 0.01$, $\beta_1 = 0.004$. 离散化步长 $\Delta k = 0.02$, 仿真时间步长为 200. 为评价算法的性能, 定义 S 次蒙特卡洛仿真的均方根 (Root mean squares, RMS) 误差指标如下:

$$\text{RMS} = \frac{1}{S} \frac{1}{T} \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^T \sqrt{(x_s^k - \hat{x}_s^k)^2} \quad (46)$$

其中, $S = 50$, T 为单次蒙特卡洛仿真的时间步长. 同时, 假定系统真实转移概率矩阵为

$$\Pi_{\text{True}} = \begin{bmatrix} 0.6 + \varphi & 0.4 - \varphi \\ 0.4 - \varphi & 0.6 + \varphi \end{bmatrix}$$

其中, $\varphi = 0.1 \sin(k) \text{rand}(0, 1)$ 表示从区间 $[0, 1]$ 内产生一个系数为 $0.1 \sin(k)$ 的随机数. 对本文算法 (记为 OA) 与常见 IMM-PF (Interactive multiple model particle filtering) 进行仿真比较. 在滤波过程中 IMM-PF 采用转移概率矩阵 (47). 在相等信息量下, OA 采用以式 (47) 为均值矩阵的高维高斯分布, 协方差矩阵由式 (48) 给定.

$$\Pi_{\text{IMM-PF}} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \begin{bmatrix} 0.04 & -0.04 \\ -0.04 & 0.04 \end{bmatrix} \quad (48)$$

矩阵粒子集采样数 $N = 30$, 且所有采样值均约束在 $[0, 1]$ 区域内. 所有算法的粒子数 Q 均为 100. 状态仿真结果由图 1 和图 2 及表 1 给出.

表 1 仿真结果比较
Table 1 Comparison of simulation results

算法	状态 x_1	状态 x_2	在线计算时间
	平均 RMS 误差	平均 RMS 误差	(s)
IMM-PF	0.669	0.092	0.221
OA	0.608	0.083	0.563

图 1 为基于 50 次蒙特卡洛仿真下状态 x_1 估计值的平均 RMS 误差. 图 2 为 50 次蒙特卡洛仿真下状态 x_2 估计值的平均 RMS 误差. 结合表 1 可以看出, 由于 OA 在滤波过程中充分考虑了转移概率真实特性, 每一时刻在矩阵粒子集内获取最大后验估计, 相对于使用常数转移概率的 IMM-PF, 估计精度明显得到提高. 同时, 由表 1 可知, 算法在计算耗费上略高于 IMM-PF, 这是由于 OA 在每时刻需在矩阵粒子集内寻优. 因此, 实际应用中, 应按照具体要求选取合适的算法. 同时, 如何较好地平衡估计精度与计算耗费将是我们下

一步的工作之一。综上,本文算法能较为精确地估计出非线性非齐次 Markov 跳变系统的状态,对转移概率的不确定性表现出较强的鲁棒性。

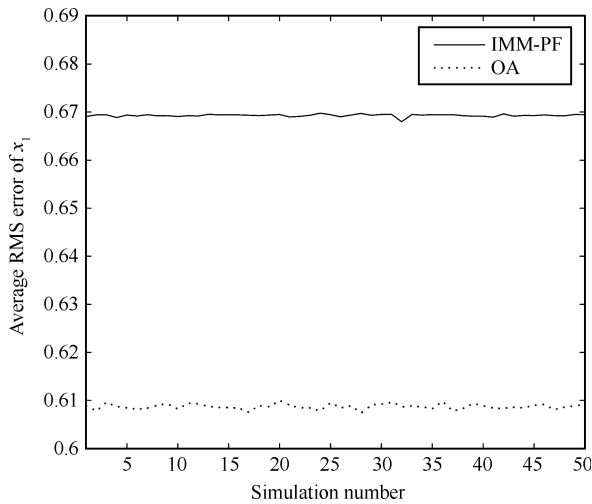


图 1 50 次仿真的 x_1 的平均 RMS 误差比较

Fig. 1 Average RMS error of x_1 based on 50 simulations

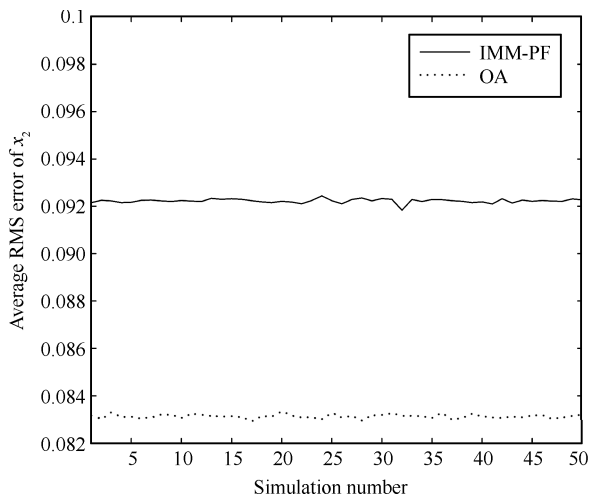


图 2 50 次仿真的 x_2 的平均 RMS 误差比较

Fig. 2 Average RMS error of x_2 based on 50 simulations

5 结论

针对非线性非齐次 Markov 跳变系统,提出了一种贝叶斯滤波算法。在转移概率时变且不确定的情况下能获得满意的滤波效果,表现出较强的鲁棒性。转移概率时变且不确定的情况更加符合实际工程背景,因此,本文方法具有更加广泛的理论意义和应用价值。

References

- 1 Cost O L V, Fragoso M D, Marques R P. *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*. London: Springer, 2005. 65–83
- 2 Zhang L X. H_∞ estimation for discrete-time piecewise homogeneous Markov jump linear systems. *Automatica*, 2009, **45**(11): 2570–2576

- 3 Liu H P, Ho D W C, Sun F C. Design of H_∞ filter for Markov jumping linear systems with non-accessible mode information. *Automatica*, 2008, **44**(10): 2665–2660
- 4 Cinquemani E, Micheli M. State estimation in stochastic hybrid systems with sparse observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(8): 1337–1342
- 5 Seah C E, Hwang I. State estimation for stochastic linear hybrid systems with continuous-state-dependent transitions: an IMM approach. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2009, **45**(1): 376–391
- 6 Tsantas N. Stochastic analysis of a non-homogeneous Markov system. *European Journal of Operational Research*, 1995, **85**(3): 670–685
- 7 Dey S, Moore J B. Risk-sensitive filtering and smoothing via reference probability methods. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(11): 1587–1591
- 8 Shao X G, Huang B, Lee J M. Constrained Bayesian estimation — a comparative study and a new particle filter based approach. *Journal of Process Control*, 2010, **20**(2): 143–157
- 9 Zhao Ling-Ling, Ma Pei-Jun, Su Xiao-Hong. A fast quasi-Monte Carlo-based particle filter algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(9): 1351–1356 (赵玲玲, 马培军, 苏小红. 一种快速准蒙特卡罗粒子滤波算法. 自动化学报, 2010, **36**(9): 1351–1356)
- 10 Aggoun L, Benkherouf L. Filtering of discrete-time systems hidden in discrete-time random measure. *Mathematical and Computer Modelling*, 2002, **35**(3): 273–282
- 11 Orguner U, Demirekler M. Maximum likelihood estimation of transition probabilities of jump Markov linear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(10): 5093–5108
- 12 Luan X, Liu F, Shi P. Finite-time filtering for non-linear stochastic systems with partially known transition jump rates. *IET Control Theory and Applications*, 2010, **4**(5): 735–745

赵顺毅 江南大学自动化研究所博士研究生. 主要研究方向为复杂系统的滤波及控制. 本文通信作者. E-mail: shunyizhao@126.com (ZHAO Shun-Yi Ph.D. candidate at the Institute of Automation, Jiangnan University. His research interest covers filtering and control of complex systems. Corresponding author of this paper.)

刘 飞 江南大学教授. 主要研究方向为先进控制理论, 工业过程监控. E-mail: fliu@jiangnan.edu.cn (LIU Fei Professor at Jiangnan University. His research interest covers advanced control theory and monitoring of industrial process.)