山东科学
SHANDONG SCIENCE

第24卷 第6期 2011年12月出版
Vol.24 No.6 Dec.2011

DOI:10.3976/j.issn.1002-4026.2011.06.006

求特征值的 Jacobi 方法

于正文[1],尹庆莉[2]

(1.山东建筑大学理学院,山东 济南 250101;2.山东建筑大学实验与设备处,山东 济南 250101)

摘要:讨论了求实对称矩阵的特征值的经典 Jacobi 方法,通过一系列的正交相似变换将实对称矩阵化为对角矩阵,从而求出全部特征值和相应的特征向量。文中给出所有正交变换的计算公式,并用 MATLAB 编程实现,为实际问题的计算提供了简单实用的计算工具。

关键词:特征值;特征向量;Jacobi 方法

中图分类号:O24 **文献标识码:**A **文章编号:**1002-4026(2011)06-0019-03

Jacobi method for eigenvalues calculation

YU Zheng-wen[1], YIN Qing-li[2]

(1.School of Sciences, Shandong Jianzhu University, Jinan 250101, China;
2.Department of Laboratory and Facility Management, Shandong Jianzhu University, Jinan 250101, China)

Abstract: This paper addresses classical Jacobi method of eigenvalues calculation of a real symmetric matrix. It converts a real symmetric matrix into a diagonal matrix by a series of orthogonal similarity transformations, and then derives all eigenvalues and their corresponding eigenvectors. The paper presents the formulas of all orthogonal transformations, which are implemented by MATLAB programming. This provides a simple and practical calculation tool for the computation of practical problems.

Key words: eigenvalue; eigenvector; Jacobi method

特征值问题的解法有两类,即迭代法和变换法。前者算法简单易于编程,但仅适用于求模最大或最小特征值及相应的特征向量;后者是将矩阵通过相似变换化矩阵为特殊形式,如将对称矩阵三对角化,以及将一般矩阵化为上 Heisenberg 矩阵,然后再求这两种特殊形式矩阵的特征值。作相似变换后所得矩阵的特征值与原矩阵的特征值相同,但特征向量与矩阵的特征向量一般不同,需要记忆所作过的变换。因此,变换法的算法和编程较复杂,但其优点是可求全部或部分特征值及相应的特征向量。经典的 Jacobi 方法是一种求实对称矩阵的全部特征值及相应特征向量的方法,它是通过一系列的正交相似变换,将实对称矩阵化为对角矩阵,并进而求出全部特征值及相应特征向量。本文将讨论经典 Jacobi 方法的算法,并用 MATLAB 编程实现。

1 经典的 Jacobi 方法

设 $\boldsymbol{A} \in R^{n \times n}$ 是实对称矩阵,则正交矩阵 $\boldsymbol{R} \in R^{n \times n}$ 使得

收稿日期:2011-10-13

基金项目:山东省高等学校教学改革研究重点项目(2009044);山东省高等学校教学改革研究项目(2009262)

作者简介:于正文(1960-),男,副教授,研究方向为科学计算。Email:yuzhengwen@sdjzu.edu.cn

$$R^{-1}AR=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\tag{1}$$

其中$\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$是$\boldsymbol{A}$的n个实特征值,而矩阵$\boldsymbol{R}$的第j列$r(j)$为$\boldsymbol{A}$的相应于特征值λ_j的特征向量$\boldsymbol{u}_j(j=1,2,\cdots,n)$。

但是,由于通过实际计算不可能准确地给出正交矩阵$\boldsymbol{R}$,因而需要借助平面旋转矩阵,对$\boldsymbol{A}$进行一系列的正交相似变换,以实现矩阵$\boldsymbol{A}$的对角化。

定义 称矩阵

$$\boldsymbol{G}_{ij}(\theta)=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccccccccc}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&\cos\theta&&&&\sin\theta&&&\\&&&&1&&&&&&\\&&&&&\ddots&&&&&\\&&&&&&1&&&&\\&&&-\sin\theta&&&&\cos\theta&&&\\&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&1\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\\\\\\\text{第}\,i\,\text{行}\\\\\\\\\text{第}\,j\,\text{行}\\\\\\\\\end{array}\tag{2}$$

为n维空间R^n中(i,j)平面上的旋转矩阵或 Givens 矩阵。

经典 Jacobi 方法的基本思想是:对矩阵$\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{A}$,构造一系列的平面旋转矩阵$\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\cdots,\boldsymbol{G}_k$,并计算:

$$\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}}\qquad(k=1,2,\cdots)。\tag{3}$$

则当$k\to\infty$时,有$\boldsymbol{A}_k\to\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。注意到矩阵的$F$-范数$\|\boldsymbol{A}\|_F$是正交不变量,因此要使$\boldsymbol{A}$近似对角化,就应使对角元的平方和尽可能的增大。假设已对矩阵$\boldsymbol{A}$进行了$k-1$次变换,得到矩阵$\boldsymbol{A}_{k-1}=(a_{ij}^{(k-1)})n\times n$,则将平面旋转矩阵$\boldsymbol{G}_k=\boldsymbol{G}_{pq}(\theta)$代入(3)中,并比较其左右两端元素得

$$\begin{cases}a_{pp}^{(k)}=a_{pp}^{(k-1)}\cos^2\theta+2a_{pq}^{(k-1)}\cos\theta\sin\theta+a_{qq}^{(k-1)}\sin^2\theta\\a_{pq}^{(k)}=a_{pp}^{(k-1)}\sin^2\theta-2a_{pq}^{(k-1)}\cos\theta\sin\theta+a_{qq}^{(k-1)}\cos^2\theta\\a_{pq}^{(k)}=\dfrac{1}{2}(a_{qq}^{(k-1)}-a_{pp}^{(k-1)})\sin2\theta+a_{pq}^{(k-1)}\cos2\theta\end{cases}\tag{4}$$

$$\begin{cases}a_{pi}^{(k)}=a_{ip}^{(k)}=a_{ip}^{(k-1)}\cos\theta+a_{iq}^{(k-1)}\sin\theta\qquad(i\neq p,q)\\a_{qi}^{(k)}=a_{iq}^{(k)}=-a_{ip}^{(k-1)}\sin\theta+a_{iq}^{(k-1)}\cos\theta\qquad(i\neq p,q)\end{cases}\tag{5}$$

$$a_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k-1)}\qquad(i,j\neq p,q)\tag{6}$$

变化了的p,q行(列)的元素间满足关系式

$$[a_{pi}^{(k)}]^2+[a_{qi}^{(k)}]^2=[a_{pi}^{(k-1)}]^2+[a_{qi}^{(k-1)}]^2\qquad(i\neq p,q)。$$

根据矩阵的F-范数的正交不变性,有

$$[a_{pp}^{(k)}]^2+[a_{qq}^{(k)}]^2+2[a_{pq}^{(k)}]^2=[a_{pp}^{(k-1)}]^2+[a_{qq}^{(k-1)}]^2+2[a_{pq}^{(k-1)}]^2。$$

$\boldsymbol{A}_k$与$\boldsymbol{A}_{k-1}$相比,其对角元的模平方和最多增加$2[a_{pq}^{(k-1)}]^2$,而且只有当θ满足$a_{pq}^{(k)}=0$时才能达到。为了使$\boldsymbol{A}_k$的对角元的模平方和尽可能地增加,在第k步计算过程中,要选$\boldsymbol{A}_{k-1}$的模最大的非对角元$a_{p_0q_0}^{(k-1)}$,并构造适当的平面旋转矩阵$\boldsymbol{G}_{p_0q_0}(\theta)=\boldsymbol{G}_k$,使得$\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}}$的元$(p_0,q_0)$,$a_{p_0q_0}^{(k)}=\dfrac{1}{2}(a_{q_0q_0}^{(k-1)}-a_{p_0p_0}^{(k-1)})\sin2\theta+a_{p_0q_0}^{(k-1)}\cos2\theta=0$。如上选法可以保证$\boldsymbol{A}$的对角元的模平方和以最快速度增加。由于$\boldsymbol{A}$的元素$a_{ij}$在某一步变换化为0后,在以后的变换中有可能变为非0。因此,一般很难在经有限次变换后将给定的矩阵$\boldsymbol{A}$化为对角

矩阵,但有如下的收敛性定理。

定理 1　按经典 Jacobi 方法生成的矩阵序列$\{\boldsymbol{A}_k\}$的非对角元素均收敛于 0,即$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。

证明:见文献[1]。

2　算法

本算法的主要部分及计算公式为

(1)选定$\boldsymbol{A}_{k-1}=(a_{ij}^{(k-1)})$中的元素$a_{p_0q_0}^{(k-1)}$使得$|a_{p_0q_0}^{(k-1)}|=\max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant i-1}}|a_{ij}^{(k-1)}|$。

(2)确定旋转矩阵$\boldsymbol{G}_k$使θ满足$\tan 2\theta=\dfrac{2a_{p_0q_0}^{(k-1)}}{a_{p_0p_0}^{(k-1)}-a_{q_0q_0}^{(k-1)}}\left(|\theta|\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$。当$a_{p_0p_0}^{(k-1)}=a_{q_0q_0}^{(k-1)}$时,取$\theta=\dfrac{\pi}{4}\mathrm{sign}(a_{p_0q_0}^{(k-1)})$。否则$\boldsymbol{G}_k$的$\sin\theta,\cos\theta$分别取为$\cos\theta=1/\sqrt{1+\tan^2\theta}=1/\sqrt{1+t^2}$,$\sin\theta=t\cos\theta$。

其中$t=\tan\theta=\mathrm{sign}(c)\cdot(-|c|+\sqrt{1+c^2})$,$c=\cot 2\theta=\dfrac{a_{p_0p_0}^{(k-1)}-a_{q_0q_0}^{(k-1)}}{2a_{p_0q_0}^{(k-1)}}$。

(3)按式(4)~(6)计算$\boldsymbol{A}_k$。

(4)特征向量的计算

注意到$\boldsymbol{A}_k$的计算格式,有$\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{G}_{k-1}\cdots\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}}$,记$\boldsymbol{R}_k^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{G}_{k-1}\cdots\boldsymbol{G}_1$,并设$\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{I}$,则有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_k=\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{A}_k$,$\boldsymbol{R}_k=\boldsymbol{R}_{k-1}\cdot\boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}}$(7)。在计算$\boldsymbol{A}_k$的同时,可按(7)式计算生成序列$\{\boldsymbol{R}_k\}$,并且当$k\to\infty$时,$\boldsymbol{R}_k$的各列就是近似特征向量。$\boldsymbol{R}_k=(r_{ij}^k)$的计算格式为:

$$\begin{cases}r_{ip}^{(k)}=r_{ip}^{(k)}\cos\theta+r_{iq}^{(k)}\sin\theta & (i=1,2,\cdots,n)\\ r_{iq}^{(k)}=-r_{ip}^{(k-1)}\sin\theta+r_{iq}^{(k-1)}\cos\theta & (i=1,2,\cdots,n)\\ r_{ij}^{(k)}=r_{ij}^{(k-1)} & (i=1,2,\cdots,n;j\neq p,q)\end{cases}\tag{8}$$

设$\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$是实对称矩阵,则其全部特征值的近似值及相应近似特征向量可由 MATLAB 程序求得。

限于篇幅,源程序略。

3　计算实例

例　求实对称矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}10&8&12&-9&7\\8&-7&0&11&5\\12&0&-6&9&12\\-9&11&9&-3&5\\7&5&12&5&-9\end{pmatrix}$的全部特征值及对应的特征向量。

解:在 MATLAB 命令窗口输入 A,执行程序 Jacobi 后,有下面的结果。

$\gg\boldsymbol{A}=[10,8,12,-9,7;8,-7,0,11,5;12,0,-6,9,12;-9,11,9,-3,5;7,5,12,5,-9]$

$\gg[\boldsymbol{D},\boldsymbol{V}]=\mathrm{Jacobi}(\boldsymbol{A})$

$\boldsymbol{D}$ 的对角线即为近似的特征值

$\boldsymbol{V}$ 的列向量为相应的近似特征向量

$$\boldsymbol{D}=\begin{matrix}23.7229&0&0&0&0\\0&-5.5496&0&0&0\\0&0&-27.1214&0&0\\0&0&0&11.0372&0\\0&0&0&0&-17.0891\end{matrix}$$

(下转第 100 页)

[3]韩延彬,李金屏. 一种基于局部特征的人脸识别方法[J]. 济南大学学报:自然科学版,2007,21(1):56-59.
[4]唐资娜. 基于肤色和 Hausdorff 距离的人脸检测系统[D]. 南京:南京航空航天大学,2007.
[5]龚理专,王巍. 基于肤色信息和主分量分析的人脸实时检测系统[J]. 计算技术与自动化,2005,1(24):92-94.
[6]邢果. 彩色图像中人脸检测与识别方法的研究[D]. 郑州:中国人民解放军信息工程大学,2007.
[7]彭进业,余卞章,王大凯,等. 多尺度对称变换及其应用于定位人脸特征点[J]. 电子学报,2003,30(3):363-366.
[8]严超,朱光大. 人脸特征的定位与提取[J]. 中国图编图形学报,1998,3(5):375-380.

(上接第 21 页)

$$\boldsymbol{V}=\begin{matrix} 0.7174 & 0.2172 & -0.3703 & -0.4960 & -0.2347 \\ 0.2917 & 0.7459 & 0.4861 & 0.3021 & 0.1762 \\ 0.4828 & -0.5524 & 0.5547 & 0.2015 & -0.3367 \\ 0.1145 & 0.0736 & -0.5224 & 0.7596 & -0.3627 \\ 0.3926 & -0.2931 & -0.2143 & 0.2124 & 0.8179 \end{matrix}$$

4 结论

经典 Jacobi 方法的计算工作量非常大,利用此程序容易计算实对称矩阵的全部特征值及对应的特征向量,经过验证程序正确无误,给实际问题的应用和教学提供了简单实用的计算工具。

参考文献:

[1]翟瑞彩,谢伟松. 数值分析[M]. 天津:天津大学出版社,2000: 87-95.
[2]威尔金森. 代数特征值问题[M]. 北京:科学出版社,2001: 275-293.
[3]HEATH M T. Scientific Computing: An Introductory Survey[M]. Second Edition,北京:清华大学出版社(影印版),2001:169-203.
[4]MATEJAŠ J. Quadratic convergence of scaled matrices in Jacobi method[J]. Numer Math, 2000, 87 (1): 171-199.
[5]张智星. Matlab 程序设计与应用[M]. 北京:清华大学出版社,2002.
[6]HARRELLII E M. Eigenvectors and Eigenvalues[EB/OL]. (2007-12-10)[2011-09-20]. http://www.mathphysics.com/calc/eigen.html.