SUN Haiyan, HUANG Huabing, WANG Xina. Local Analysis Method on Gross Error of Multidimensional Adjustment Problem[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica,2012,41(1):54-58.(孙海燕,黄华兵,王喜娜. 多维平差问题粗差的局部分析法[J].测绘学报,2012,41(1):54-58.)

多维平差问题粗差的局部分析法

孙海燕,黄华兵,王喜娜

武汉大学 测绘学院,湖北 武汉 430079

Local Analysis Method on Gross Error of Multidimensional Adjustment Problem

SUN Haiyan, HUANG Huabing, WANG Xina

School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

Abstract: As demonstrated by an example of a leveling network, existing methods of correcting gross errors based on residuals have a few shortcomings including the dependence on the location of gross errors within the leveling network. To address these problems, local analysis method (LAM) is proposed. In multidimensional adjustment problem, an observed quantity usually can be expressed as function of other observed quantities. Then it can be obtained a group of independent observed values of the observed quantity, which includes observed value corresponding to the observed quantity and functions of other observed values. And an approach to search functions based on the design matrix is given. So it can be determined according to number of independent observed values whether the observed value can tolerate gross error. A method based on LAM is also developed to detect gross errors. Finally, the detection method and LAM are detailed in an example of a goniometric network.

Key words: local analysis method; residual; position of gross error; combined observed value; gross error detection; true error

摘　要:用一个水准网说明依据改正数进行粗差处理可能导致错误,而且粗差能否被正确处理与其所处位置有关。为解决此问题,提出局部分析法。局部分析法从多维平差问题的函数模型出发,根据设计矩阵得到一个被观测量的多个独立观测,包括被观测量的观测值和其他观测值的函数,并给出根据平差问题的设计矩阵确定这些函数的方法。根据被观测量的独立观测数即可判断其观测值能否容忍粗差。在此基础上提出一种基于局部分析法的粗差探测方法,最后给出一个测角网示例。

关键词:局部分析法;改正数;粗差位置;组合观测;粗差探测;真误差

中图分类号:P207　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1001-1595(2012)01-0054-05

1 引　言

由于仪器、测量环境和观测人员等方面的原因,观测值有时会包含粗差。如果观测值中含有粗差,采用最小二乘法进行平差时,粗差的存在不可避免会对平差结果产生不利影响,甚至导致错误的结果。这个结论已经得到理论上的证明和实践的验证。

现在已经有许多方法来消除或减弱粗差的影响。这些方法通常分为两类。一类是依据统计学原理对粗差进行探测与定位并将其剔除,这方面的研究以文献[1]的粗差探测法为代表。另一类是稳健估计(又称抗差估计),这种方法不需要对粗差进行定位与剔除,而是选择适当的估计方法(如 L_1 范数最小估计、M 估计等),使得估计结果不受或少受粗差的影响。在实际计算中,这些方法大都是通过给含有粗差的观测值一个较小的权,从而减小该观测值在平差中的作用。常用的方法主要是选权迭代法,如丹麦法、文献[2]提出的验后方差估计法和文献[3—5]提出的 IGG 方案。实际上这两类方法都依赖于通过平差计算得到的改正数,而含有粗差的观测值并不一定得到较大的改正数,因而有时会造成误判。也有研究人员从真误差出发,提出了有益的方法。文献[6]提出了多维粗差同时定位定值法(LEGE 法),文献[7]提出了粗差的拟准检定法(QUAD 法)。使用 LEGE 法和 QUAD 法都需要进行平差计算,同样也受到改正数的影响,比如作为 LEGE 法判断依据的单位权中误差是改正数的函数,QUAD 法选择拟准观测的指标也是改正数的函数。

实际上,在处理粗差之前应该分析多维平差问题中是否存在一类观测值,出现在其中的粗差是不可发现或无法定位的。粗差处理方法不能有效处理这类粗差,故其对平差结果可能会产生较大影响。能否发现某个观测值中的粗差,或者消除或减弱其影响,不仅取决于多余观测数等全局性指标,而且与粗差出现的位置有关。关于粗差所处位置对粗差处理的影响,文献[8]曾提出杠杆观测的概念,指出不论实际误差如何,杠杆观测只得到低改正,这使得杠杆观测含有的粗差比其他位置的粗差难于发现。

综上所述,本文试图建立一种局部的粗差分析方法,不依赖于平差计算和改正数,确定出现在某个位置的粗差是否可以被发现和定位,并且在此基础上给出一种粗差探测方法。

2　局部分析法

在讨论局部分析法之前,先分析一个水准网,如图 1 所示。

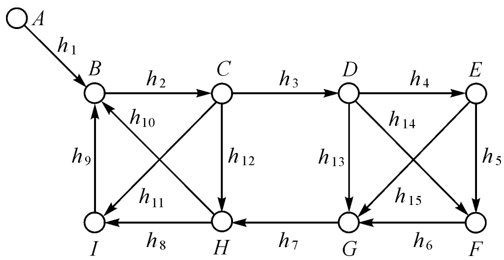

图 1　水准网

Fig. 1　Leveling network

图 1 中,A 点高程已知,其余 8 点高程待求,观测值等精度,观测方向如箭头所示。

无论观测值取何值,h_1 的改正数为 0,h_3 和 h_7 的改正数大小相等。

假设水准网中只有一个粗差。若 h_1 含有粗差,则根据改正数不可能发现粗差。若粗差出现在 h_3 或 h_7 上,则必然导致错误。由于 h_3 和 h_7 的改正数大小相等,结果只能是 h_3 和 h_7 都有粗差或者都没有粗差,这两种结果都与实际情况不符。

从图 1 水准网的分析可以看出,粗差能否被正确处理与其位置密切相关。基于此,本文提出多维平差问题粗差的局部分析法。

2.1　局部分析法原理

局部分析法的主要思路是从局部考察一个观测值,讨论平差问题能否容忍出现在其中的粗差。具体做法是将局部化作一个一维问题,再应用一维问题粗差分析的结论进行讨论。

首先,给出一维问题粗差分析的结论。设对一个真值未知的被观测量进行 m 次观测。$m=1$时,观测值的真值未知,故其含有的粗差是不可发现的。$m=2$ 时,两个观测值之差的理论值为 0,比较观测值即可确定二者是否含有粗差,但无法确定谁含有粗差。$m\geqslant 3$ 时,根据稳健估计中位数法,如果观测值中含有 $k(0<k<m/2)$个粗差,那么中位数是正常观测值,故粗差可以全部定位;如果含有 $k(k\geqslant m/2)$个粗差,则不能定位。

对于多维平差问题,比较一个被观测量的观测值与其组合观测,可发现观测值和组合观测是否含有粗差。组合观测定义为:设 s 为多维平差问题的一个被观测量,其观测值为 L,如果存在其他被观测量 s_1、s_2、…、s_m(对应观测值为 L_1、L_2、…、L_m)的函数 f 满足 $f(s_1,s_2,\cdots,s_m)=s$,则称$f(L_1,L_2,\cdots,L_m)$为 s 的组合观测。另外,一维问题的粗差分析要求观测值是误差独立的,所以在多维平差问题的粗差分析中使用的组合观测也应当是误差独立的,即要求所有组合观测两两之间没有公共观测值。根据组合观测确定误差独立组合观测以后,即可将误差独立组合观测与观测值看做对被观测量的重复观测,从而可以应用一维问题的结论分析被观测量。

设 s 为多维平差问题的一个被观测量,其观测值为 L。记 s 的误差独立组合观测数为 m_1,包含观测值和误差独立组合观测的总独立观测数为 m_2。根据 m_1 的取值讨论如下:

(1) $m_1=0$ 时,$m_2=1$,由一维问题结论可知观测值含有的粗差是不可发现的。

(2) $m_1=1$ 时,$m_2=2$,可以发现粗差但不能定位。

(3) $m_1\geqslant 2$ 时,$m_2\geqslant 3$,如果被观测量 $k(0<k<m_2/2)$个独立观测含有粗差,那么可以定位粗差。

局部分析法的关键是计算被观测量的误差独立组合观测数。下面给出根据多维平差问题函数模型确定误差独立组合观测数的一般方法。

2.2　误差独立组合观测

多维平差问题的函数模型为

$$\underset{n\times 1}{\tilde{\boldsymbol{L}}}=\underset{n\times t}{\boldsymbol{B}}\underset{t\times 1}{\tilde{\boldsymbol{X}}}+\underset{n\times 1}{\boldsymbol{d}} \tag{1}$$

式中，$\tilde{\boldsymbol{L}}$为被观测量；$\tilde{\boldsymbol{X}}$为待求参数；$\boldsymbol{B}$ 为设计矩阵；$\boldsymbol{d}$ 为常数项。

可从 $\boldsymbol{B}$ 中选取 t 行组成矩阵 $\boldsymbol{B}_2(t\times t)$，使得 $\boldsymbol{B}_2$ 可逆，余下的 $n-t$ 行构成矩阵 $\boldsymbol{B}_1$。按此选法可得对应的$\tilde{\boldsymbol{L}}_1$、$\tilde{\boldsymbol{L}}_2$、$\boldsymbol{d}_1$ 和 $\boldsymbol{d}_2$，于是式(1)可写为

$$\underset{(n-t)\times 1}{\tilde{\boldsymbol{L}}_1} = \underset{(n-t)\times t}{\boldsymbol{B}_1}\underset{t\times 1}{\tilde{\boldsymbol{X}}} + \underset{(n-t)\times 1}{\boldsymbol{d}_1} \tag{2}$$

$$\underset{t\times 1}{\tilde{\boldsymbol{L}}_2} = \underset{t\times t}{\boldsymbol{B}_2}\underset{t\times 1}{\tilde{\boldsymbol{X}}} + \underset{t\times 1}{\boldsymbol{d}_2} \tag{3}$$

$\boldsymbol{B}_2$ 可逆，式(3)化为$\tilde{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{B}_2^{-1}(\tilde{\boldsymbol{L}}_2-\boldsymbol{d}_2)$，将其代入式(2)即得

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2^{-1}\tilde{\boldsymbol{L}}_2-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{d}_2+\boldsymbol{d}_1 \tag{4}$$

从式(4)可以看出，$\tilde{\boldsymbol{L}}_1$中的 $n-t$ 个被观测量都可以表示为 $\tilde{\boldsymbol{L}}_2$中 t 个被观测量的函数。因此，只要将一个被观测量始终选在$\tilde{\boldsymbol{L}}_1$中，遍历所有可能选法即可得其所有的组合观测。再经过对组合观测的筛选，就得到被观测量的所有误差独立组合观测。

取式(1)中$\tilde{\boldsymbol{L}}$的一个分量$\tilde{\boldsymbol{L}}(i)$为被观测量，记其组合观测的全体为集合 $\boldsymbol{G}_1$，误差独立组合观测的全体为集合 $\boldsymbol{G}_2$。确定$\tilde{\boldsymbol{L}}(i)$的误差独立组合观测的过程为：把$\tilde{\boldsymbol{L}}(i)$选入$\tilde{\boldsymbol{L}}_1$中，从余下的 $n-1$ 个被观测量中选取 t 个，列出所有的 C_{n-1}^t 种选法。依据每种选法，组成 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$，如果 $\boldsymbol{B}_2$ 可逆就得到$\tilde{\boldsymbol{L}}(i)$的一个组合观测，遍历所有选法后得到 $\boldsymbol{G}_1$。从 $\boldsymbol{G}_1$ 中选择成员（观测值）个数最少的组合观测 f_1，从 $\boldsymbol{G}_1$ 中移除；将与 f_1 有共同成员的组合观测从 $\boldsymbol{G}_1$ 中移除；再从 $\boldsymbol{G}_1$ 中选成员个数最少的组合观测，重复上述操作直到 $\boldsymbol{G}_1$ 为空集。已选取的 f_1 等就是$\tilde{\boldsymbol{L}}_1$的误差独立组合观测。

具体算法为：

(1) 将$\tilde{\boldsymbol{L}}(i)$选入$\tilde{\boldsymbol{L}}_1$中，从余下的 $n-1$ 个被观测量中选取 t 个，所有的 C_{n-1}^t 种选法构成集合 $\boldsymbol{G}_3$。

(2) 如果 $\boldsymbol{G}_3$ 为空，执行第 5 步；否则，从 $\boldsymbol{G}_3$ 取一种选法（不放回），组成 $\boldsymbol{B}_2$ 和 $\boldsymbol{B}_1$。

(3) 如果 $\boldsymbol{B}_2$ 可逆，执行第 4 步；否则，执行第 2 步。

(4) 从 $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2^{-1}$ 中取$\tilde{\boldsymbol{L}}(i)$对应的那一行，如果该行数值全为零，执行第 2 步；如果不全为零，则记录不为零的数值及其对应的被观测量，由此得到$\tilde{\boldsymbol{L}}(i)$的一个组合观测，将其加入 $\boldsymbol{G}_1$，然后执行第 2 步。

(5) 上述步骤完成后，得到 $\boldsymbol{G}_1$，计算 $\boldsymbol{G}_1$ 元素的成员数，记 min 为最少的成员数，max 为最多的成员数。设 $q=\min$。

(6) 如果 $q>\max$，算法结束；否则，取成员数为 q 的一个组合观测 f_1，将其从 $\boldsymbol{G}_1$ 中移除，并加入 $\boldsymbol{G}_2$。

(7) 遍历 $\boldsymbol{G}_1$，移除与 f_1 有共同成员的组合观测。

(8) 若 $\boldsymbol{G}_1$ 为空，则算法结束；否则，执行第 9 步。

(9) 如果成员数为 q 的组合观测未取完，执行第 6 步；如果已取完，令 $q=q+1$，执行第 6 步。

(10) 算法结束。

得到误差独立组合观测数并不能确定哪个观测值含有粗差，还需要通过其他方法作进一步探测。下面给出一种基于局部分析法的粗差探测方法。

3 基于局部分析法的粗差探测

设$\tilde{\boldsymbol{L}}(i)$的一个误差独立组合观测为 $a_1\boldsymbol{L}(1)+a_2\boldsymbol{L}(2)+\cdots+a_{t_1}\boldsymbol{L}(t_1)$，其中 $0<t_1\leqslant t$，a_1、a_2、…、a_{t_1} 不为零。由组合观测的定义可知

$$\tilde{\boldsymbol{L}}(i)=a_1\tilde{\boldsymbol{L}}(1)+a_2\tilde{\boldsymbol{L}}(2)+\cdots+a_{t_1}\tilde{\boldsymbol{L}}(t_1) \tag{5}$$

令

$$w=\boldsymbol{L}(i)-(a_1\boldsymbol{L}(1)+a_2\boldsymbol{L}(2)+\cdots+a_{t_1}\boldsymbol{L}(t_1)) \tag{6}$$

由式(5)可知 w 的真值为零，所以式(6)计算值就是真误差。根据误差传播律可求得 w 的中误差 σ_w，如果 $|w|\leqslant 2\sigma_w$（偶然误差服从正态分布时），并且不考虑粗差相互抵消的情况，则可认为 w 定义式中的观测值都没有粗差。然后依次对其他误差独立组合观测进行分析，即可确定$\tilde{L}(i)$的独立观测所涉及的哪些观测值不含粗差。对平差问题的其他被观测量作上述分析，同样可以确定一部分不含粗差的观测值。分析完所有的被观测量后，可确定出不含粗差的观测值，余下的即为含粗差观测值。

4 算 例

算例采用文献[9]的例 7-4，是一个测角网坐标平差，如图 2 所示。

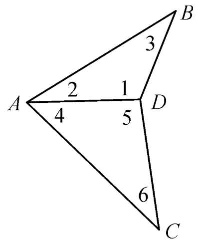

图 2　测角网

Fig. 2　Goniometric network

图 2 中，A、B、C 为已知点，坐标见表 1，D 为待定点。角度观测值为等精度（中误差 1.7″，先验精度），列于表 2。其中∠2 含有粗差。

表 1　已知点坐标

Tab. 1　Coordinates of known points　　m

点号	X 坐标	Y 坐标
A	8 986.68	5 705.03
B	13 737.37	10 501.92
C	6 642.27	14 711.75

表 2　角度观测值

Tab. 2　Observed value of angles　　″

角	观测值	角	观测值
∠1	384 642.2	∠4	102 365.0
∠2	111 181.9	∠5	460 121.2
∠3	152 199.1	∠6	85 516.2

设 D 点的坐标真值为(10 122.16 m，10 312.44 m)，计算出 6 个角度被观测量的真值，列于表 3 的第 2 列。列出测角网坐标平差的误差方程，根据设计矩阵计算每个被观测量的误差独立组合观测，结果列于表 3。表 3 中，角度单位为″。w 为被观测量的观测值与组合观测的差值，σ_w 为 w 的中误差，m_1 为误差独立组合观测数，m_2 为包含观测值和误差独立组合观测的总独立观测数。

根据局部分析法，由表 3 的 m_2 可知，如果$\widetilde{\angle 1}$的独立观测有 1 个粗差，可以定位，多于 1 个时则不能定位。其他 5 个角度被观测量与$\widetilde{\angle 1}$有相同的结论。

表 3　测角网分析结果

Tab. 3　Analysis results of goniometric network　　″

被观测量	真值	独立观测		w	$2\sigma_w$	m_1	m_2
		∠1	384 642.2				
$\widetilde{\angle 1}$	384 640.9	−∠2−∠3+648 000	384 619.0	23.2	5.9	2	3
		4.23∠4+1.89∠5−912 817.3	384 645.0	−2.8	16.0		
		∠2	111 181.9				
$\widetilde{\angle 2}$	111 161.9	−∠4+213 526.2	111 161.2	20.7	4.8	3	4
		−∠1−∠3+648 000	111 158.7	23.2	5.9		
		∠5+∠6−434 473.8	111 163.6	18.3	5.9		
		∠3	152 199.1				
$\widetilde{\angle 3}$	152 197.2	−∠1−∠2+648 000	152 175.9	23.2	5.9	2	3
		−3.23∠4−1.88∠5+1 347 291.1	152 193.8	5.3	13.1		
		∠4	102 365.0				
$\widetilde{\angle 4}$	102 364.3	−∠2+213 526.2	102 344.3	20.7	4.8	3	4
		∠1+∠3−434 473.8	102 367.5	−2.5	5.9		
		−∠5−∠6+648 000	102 362.6	2.4	5.9		
		∠5	460 121.2				
$\widetilde{\angle 5}$	460 120.5	0.53∠1+2.25∠2+4 942.6	460 166.3	54.9	8.5	2	3
		−0.53∠3−1.72∠4+717 242.4	460 118.4	2.8	7.0		
		∠6	85 516.2				
$\widetilde{\angle 6}$	85 515.1	−0.53∠1−1.25∠2+429 531.2	85 489.4	26.8	5.7	2	3
		0.53∠3+0.72∠4−69 242.4	85 516.6	−0.4	4.5		

以表 3 的第 4 行为例，w 表示∠1 与 4.23∠4+1.89∠5−912 817.3 的差值，可以看出 $|w|\leqslant 2\sigma_w$，于是 w 表达式中涉及的∠1、∠4 和∠5 不含粗差，分析所有被观测量可确定∠1、∠3、∠4、∠5 和∠6 不含粗差。那么，余下的∠2 即为含粗差观测值，这与给定的观测值含粗差情况相符。

5　结　论

局部分析法逐个分析平差问题的观测值能否容忍粗差，克服了从整体上分析可容忍粗差个数

的不合理性，实质上是将多维平差问题转换为多个一维问题进行讨论，其优点在于无需进行平差计算，仅依据平差问题的函数模型，因而适用于一般的平差问题。

由于各种粗差处理方法均不能正确处理不可发现和无法定位的粗差，为消除或减弱其对平差结果的影响，使用稳健估计等方法之前应当采用局部分析法分析平差问题。

参考文献：

[1] BAARDA W. A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks[M]. Delft: Netherlands Geodetic Commission, 1968: 5-97.

[2] LI Deren. Gross Error Location by Means of the Iteration Method with Variable Weights[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 1984, 9(1): 46-68.（李德仁. 利用选择权迭代法进行粗差定位[J]. 武汉大学学报：信息科学版，1984，9(1)：46-68.）

[3] ZHOU Jiangwen. Classical Theory of Errors and Robust Estimation[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1989, 18(2): 115-120.（周江文. 经典误差理论与抗差估计[J]. 测绘学报，1989，18(2)：115-120.）

[4] ZHOU Jiangwen, YANG Yuanxi. Robust Collocation[C]// Proceedings on Robust Estimation. Beijing: Surveying and Mapping Press, 1992: 41-50.（周江文，杨元喜. 抗差拟合推估[C]//抗差估计论文集. 北京：测绘出版社，1992：41-50.）

[5] YANG Yuanxi. Robust Estimation for Correlated Observations[C]// Proceedings on Robust Estimation. Beijing: Surveying and Mapping Press, 1992: 14-22.（杨元喜. 相关观测抗差估计[C]//抗差估计论文集. 北京：测绘出版社，1992：14-22.）

[6] YU Zongchou, LI Mingfeng. Simultaneous Location and Evaluation of Multidimensional Gross Errors[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 1996, 21(4): 323-329.（於宗俦，李明峰. 多维粗差的同时定位与定值[J]. 武汉大学学报：信息科学版，1996，21(4)：323-329.）

[7] OU Jikun. Quasi-accurate Detection of Gross Errors (QUAD)[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1999, 28(1): 15-20.（欧吉坤. 粗差的拟准检定法(QUAD法)[J]. 测绘学报，1999，28(1)：15-20.）

[8] ZHOU Jiangwen, YANG Yuanxi. On Residuals and Leverage Observations[C]// Proceedings on Robust Estimation. Beijing: Surveying and Mapping Press, 1992: 33-40.（周江文，杨元喜. 论余差及杠杆观测[C]//抗差估计论文集. 北京：测绘出版社，1992：33-40.）

[9] School of Geodesy and Geomatics Wuhan University. Error Theory and Foundation of Surveying Adjustment[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2003.（武汉大学测绘学院测量平差学科组. 误差理论与测量平差基础[M]. 武汉：武汉大学出版社，2003.）

（责任编辑：丛树平）

收稿日期：2011-02-18
修回日期：2011-06-02

第一作者简介：孙海燕(1960—)，男，教授，博士生导师，研究方向为测量数据处理理论。
First author: SUN Haiyan(1960—), male, professor, PhD supervisor, majors in data processing theory.
E-mail: hysun_jj@yahoo.com.cn

（上接第 53 页）

Least Squares Problem[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1980, 17: 883-893.

[12] VAN HUFFEL S, VANDEWALLE J. The Total Least Squares Problem[M]. Philadelphia: SIAM, 1991.

[13] MARKOVSKY I, VAN HUFFEL S. Overview of Total Least Squares Methods[J]. Signal Process, 2007, 87: 2283-2302.

[14] MARKOVSKY I, RASTELLO M, PREMOLI P, et al. Element-wise Weighted Total Least Squares Problem[J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2006, 50: 181-209.

[15] MÜHLICH M, MESTER R. Subspace Methods and Equilibration in Computer Vision[C]// Proceedings of 12th Scandinavian Conference on Image Analysis. Stavanger: [s. n.], 2001: 415-422.

[16] SCHAFFRIN B, FELUS Y A. On Total Least-squares Adjustment with Constraints[C]// Proceedings of Windows on the Future of Geodesy. Berlin: IAG-Symp, 2005: 417-421.

（责任编辑：宋启凡）

收稿日期：2011-01-10
修回日期：2011-04-07

第一作者简介：周拥军(1972—)，男，博士，讲师，研究方向为 EIV 模型的平差问题及其在现代测量技术中的应用。
First author: ZHOU Yongjun (1972—), male, PhD, lecturer, majors in adjustment theories on errors-in-variables models and applications to modern surveying techniques.
E-mail: yjzhou@sjtu.edu.cn