

文章编号: 1000-6893(2001)-05-0411-04

# 带摩擦阻尼的叶片响应求解方法

郝燕平, 朱梓根

(北京航空航天大学 405 教研室, 北京 100083)

## NEW METHOD TO RESOLVE VIBRATORY RESPONSE OF BLADES WITH FRICTION DAMPING

HAO Yan-ping, ZHU Zi-gen

(Dept. of Propulsion, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**摘要:** 提出了一种可用于带摩擦阻尼的复杂结构的动力特性的计算方法——动柔度法。给出了计算公式及流程。并用此法对一带摩擦阻尼器的模型叶片进行了稳态响应的计算。通过理论计算并与实验对比表明, 动柔度法是一种可用于复杂结构响应计算的高效的算法。由于叶片与阻尼器之间有复杂的运动关系, 在用于带阻尼器的叶片的响应计算及阻尼器优化设计时, 此法将更显优越。

**关键词:** 阻尼; 振动; 干摩擦; 叶片; 柔度法; 动力响应

中图分类号: V231.92; V232.4 文献标识码: A

**Abstract:** Turbine blades are often designed to include friction damping, such as shroud and platform damper, to alleviate vibration. A dynamic compliance method is introduced to resolve the response of complex structures, such as turbine blade, with dry friction damper. Based on the harmonic balance method, high order harmonic is included. Finite element method is used to obtain the compliance matrix. Formulae and flow chart are given. A model blade with the friction damper is calculated and laboratory test is also conducted to estimate its validity. The accuracy and efficiency of this method in solving the response of structures with friction dampers are verified.

**Key words:** damping; vibration; dry friction; blade; dynamic compliance method; response

对带干摩擦的结构响应问题, 已有很多学者进行了研究<sup>[1-10]</sup>。Den Hartog<sup>[1]</sup>最早求出了带库仑(Coulomb)摩擦的单自由度模型的精确解, Yeh<sup>[2]</sup>扩展到了两自由度模型。由于计算的复杂性, 后来的研究多采用将摩擦力线化的方法。对于叶片的响应, 或者将其简化为单自由度的质量——弹簧振子<sup>[3-6]</sup>, 或者将摩擦力简化为等效的粘性阻尼, 利用有限元法进行求解<sup>[7,8]</sup>。

Earles<sup>[9]</sup>等针对带 Sgn 摩擦阻尼的弹性结构, 提出了一种线化分析方法——动柔度法或称为影响系数法, 可较好地解带摩擦阻尼的系统响应。本文将其扩展用于带滞后弹簧摩擦阻尼的复杂弹性结构(如叶片)的动力特性分析, 利用谐波平衡法推导考虑高次谐波时结构的响应表达式, 给出相关的计算公式及流程图。采用线性有限元法求结构的动柔度。通过将有限元法与动柔度法有机结合, 使这种方法的应用范围更广泛。并以一带缘板摩擦阻尼器的叶片为例进行了算例分析。

## 1 动柔度法

### 1.1 叶片响应的动柔度表示

叶片(图 1)受线性激振力  $F_E$  和非线性摩擦力  $F_N$  的共同作用。控制方程为

$$Mu + \dot{C}u + Ku = F_E + F_N \quad (1)$$

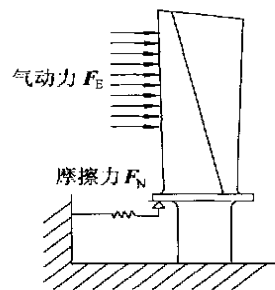


图 1 带摩擦阻尼的叶片模型

Fig. 1 Blade with friction damping

叶片的激振力一般已知并且是简谐形式。摩擦是由于叶片的运动产生的, 是叶片位移的函数, 一般是非线性的。

设激振力

$$F_E(t) = F_{LE} e^{i\omega t} \quad (2)$$

并设摩擦力可以展成 Fourier 级数形式

$$F_N = \sum_h F_{f,h} e^{ih\omega t} \quad (3)$$

其中:  $h=1, 2, \dots$ ;  $F_{f,h}$  为  $F_N$  的第  $h$  阶 Fourier 系数, 且为复数, 以表示其与激振力之间的相位差。作用在节点  $j$  上的单位力引起的节点  $i$  点的响应, 称为动柔度, 记为  $R_{ij}(\omega)$ , 为振动频率  $\omega$  的函数。则叶片响应可表示为

$$u(t) = [R_{ij}(\omega)] F_{LE} e^{i\omega t} + \sum_h [R_{ij}(h\omega)] F_{f,h} e^{ih\omega t} \quad (4)$$

其中:  $[R_{ij}(h\omega)]$  为柔度矩阵。第 1 项为激振力引起的响应, 当然, 这一项也可由其他方法求出。一般地, 式(4)可写为

$$u(t) = U_E e^{i\omega t} + \sum_h [R_{ij}(h\omega)] F_{f,h} e^{ih\omega t} \quad (5)$$

实际上, 由于通常关心的仅仅是叶片上个别点的响应, 并且只有在少数节点作用有摩擦力, 因此实际计算时并不要求出柔度矩阵中的全部项。叶片上第  $i$  个节点上的响应

$$u_i(t) = U_{E,i} e^{i\omega t} + \sum_{h,j=1}^n [R_{ij}(h\omega)] F_{h,j} e^{ih\omega t} \quad (6)$$

其中:  $U_{E,i}$  为  $U_E$  的第  $i$  个分量;  $F_{h,j}$  为  $F_{f,h}$  的第  $j$  个分量;  $[R_{ij}(h\omega)]$  为第  $h$  阶谐波时的动柔度;  $n$  为叶片上受摩擦力的节点数。

在动柔度已知时, 给定位移初值, 对式(6)进行迭代求解。简单结构的动柔度可由解析法得到, 复杂结构的动柔度可以通过有限元法得到。

### 1.2 动柔度的算法

设系统控制方程为

$$Mu + Cu + Ku = F(u) e^{i\omega t} \quad (7)$$

其中:  $M, C, K$  分别为系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵;  $F(u)$  为与位移相关的力。设系统的第  $p$  阶固有频率为  $\omega_p$ , 模态为  $\Phi_p$ 。并设系统的粘性阻尼为比例阻尼。

令 
$$u = U e^{i\omega t} \quad (8)$$

其中: 
$$U = \sum_p U_p = \sum_p \alpha_p \Phi_p \quad (9)$$

将式(8)、式(9)代入式(7), 并利用正交性可得

$$U_p = \frac{\Phi_p^T F(u)}{k_p - \omega^2 m_p + i\omega c_p} \Phi_p \quad (10)$$

其中:  $m_p, k_p, c_p$  分别为系统的第  $p$  阶模态质量、模态刚度和阻尼。根据动柔度的定义, 第  $p$  阶模态的柔度为

$$R_{p,ij}(\omega) = \frac{\Phi_{p,j}}{k_p - \omega^2 m_p + i\omega c_p} \Phi_{p,i} \quad (11)$$

其中:  $\Phi_{p,i}, \Phi_{p,j}$  分别表示系统的第  $p$  阶模态的第  $i, j$  个分量。

由于  $F(u)$  是  $u$  的函数, 因此, 当  $p$  取大于 1 时, 必须各阶模态分别由式(4)迭代求解。即将式(11)代入式(4)得

$$u_p(t) = [R_{p,ij}(\omega)] F_{LE} e^{i\omega t} + \sum_h R_{p,ij}(h\omega) F_{f,h} e^{ih\omega t} \quad (12)$$

且 
$$u(t) = \sum_p u_p(t) \quad (13)$$

如果系统的固有频率比较分散, 在求某阶固有频率附近的响应时, 只要取此阶模态即可。

### 1.3 流程图

算法流程见图 2。

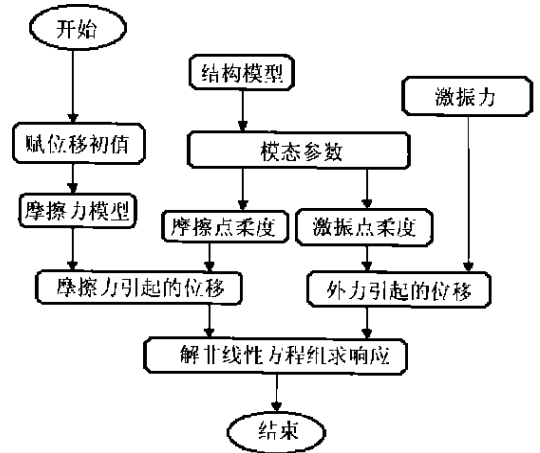


图 2 流程图

Fig. 2 Flow chart

### 2 算例

文献[10]曾对一平板叶片进行了加摩擦阻尼的实验研究, 本文将以此叶片为例进行动力特性分析。叶片的几何参数为: 叶身长 150mm, 宽 60mm, 厚 5mm, 伸根长 30mm, 宽 60mm, 厚 7mm, 缘板的下面有 10°的倾角。叶片材料为 45 号钢。叶片根部固支。将阻尼器简化为接触面为宏滑动(macro slip)的滞后弹簧模型。激振力的位置在距叶尖 105mm 的叶身边缘。

由于当阻尼器与叶片之间的正压力大到一定程度后(例如,  $N = 279N$ ), 叶片与阻尼器之间将没有滑动, 此时, 阻尼器仅相当于一个弹簧。这样, 由不加阻尼器和加上阻尼器后叶片共振频率的变化(由实验测得)即可计算出这种状态下阻尼器的刚度。以此刚度值为基础并做适当调整使计算结

果与实验结果尽可能接近, 得出当正压力  $N = 279\text{N}$  (实验时的最大正压力) 和  $N = 25\text{N}$  时的阻尼器刚度  $k_d$  分别为  $7.3 \times 10^4\text{N/m}$  和  $3.5 \times 10^4\text{N/m}$ 。当正压力大于  $279\text{N}$  时取  $279\text{N}$  时的刚度值, 其他正压力下的刚度值通过上述两值插值获得。

首先将摩擦力进行 Fourier 展开, 然后将摩擦力带入 2 节中的相关公式求叶片的稳态响应。在对此类问题的研究中, 文献[3, 4]只考虑了基频谐波。因此, 尽管可以包含高阶项, 但为了方便起见, 本文也只考虑了摩擦力的基频项。

用自编的程序, 计算了叶尖的稳态响应。

### 2.1 滞后弹簧摩擦模型

滞后弹簧模型摩擦力与位移的关系见图 3。 $F_d$  为滑动摩擦力,  $k_d$  为弹簧刚度。设  $x = A_r \cos(\omega + \psi)$ , 则  $f_N$  可分段表示

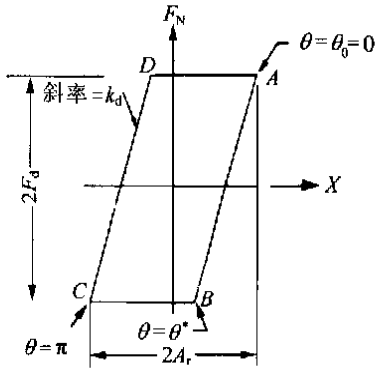


图 3 滞后弹簧摩擦力模型  
Fig. 3 Hysteretic spring relation

$$f_N = \begin{cases} AB: F_d - A_r k_d (1 - \cos\theta); & 0 & \theta & \theta^* \\ BC: -F_d; & \theta^* & \theta & \pi \\ CD: -F_d + A_r k_d (1 + \cos\theta); & \pi & \theta & \theta^* + \pi \\ DA: F_d; & \theta^* + \pi & \theta & 2\pi \end{cases} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中: } \theta &= \omega + \psi \\ \theta^* &= \arccos[1 - 2F_d / (A_r k_d)] \\ \theta^* & \in [0, \pi] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

当  $A_r = F_d / k_d$  时, 为完全粘着状态, 此时,  $\theta^* = \pi$ 。

对  $f_N$  进行 Fourier 展开 (只取基谐波), 得

$$f_N = a \cos\theta + b \sin\theta \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中: } a &= A_r k_d (\theta^* - 0.5 \sin 2\theta^*) / \pi \\ b &= -A_r k_d (\sin^2 \theta^*) / \pi \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

### 2.2 计算结果

首先用有限元程序 MSC/NASTRAN 计算了叶片的模态参数 (模态质量、模态刚度和模态) 及固有频率, 前 6 阶固有频率为  $159\text{Hz}$ ,  $857\text{Hz}$ ,  $927\text{Hz}$ ,  $1533\text{Hz}$ ,  $2425\text{Hz}$  和  $2645\text{Hz}$ 。摩擦系数取 0.5, 模态阻尼比取 0.0044, 0.004, 0.003, ...。激振力为  $1.5\text{N}$ 。滞后弹簧阻尼加在叶片的缘板上。阻尼器减振原理是由于在离心力的作用下, 阻尼器与叶片之间产生正压力  $N$ , 在叶片振动的作用下两者接触面之间产生相互运动而产生摩擦, 从而达到吸收振动能量而减振的目的。

计算了在不同的正压力  $N$  的条件下叶片的稳态响应。由于  $F_d = \mu N$ , 所以也相当于改变  $F_d$ 。

图 4 为用动柔度法求得的  $N = 0\text{N}$ ,  $10\text{N}$ ,  $30\text{N}$ ,  $50\text{N}$ ,  $100\text{N}$ ,  $200\text{N}$ ,  $280\text{N}$ ,  $500\text{N}$  时在一阶弯曲频率附近叶尖处的响应。计算时在各正压力下均能很快收敛。由图可见, 随正压力增加, 叶片的共振响应先是逐渐降低, 在某值时共振响应达到最低, 之后又逐渐上升, 即存在一最优正压力。图 5 为共振响应随正压力的变化曲线, 其中纵轴表示的响应是与不加阻尼器时共振响应的比值。图 6 为共振频率随正压力的变化曲线, 由图可见, 开始时共振频率随正压力增加上升很快, 到某一正压力后增速逐渐变慢, 最后达到某一固定值。

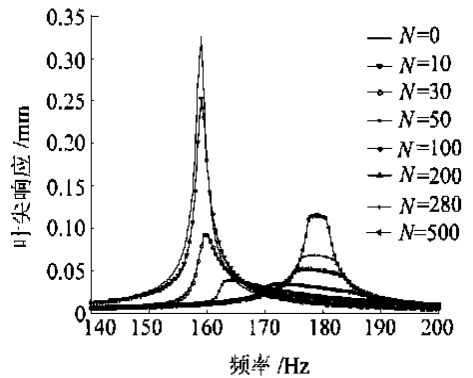


图 4 频率响应曲线

Fig. 4 Response vs frequency

图 5 和图 6 中同时绘出了实验曲线。图 7 为 2 种正压力下计算结果与实验结果比较。(图中的实验曲线中频率较低的峰为两叶片作同相振动, 频率较高的峰为反相振动, 摩擦阻尼的减振作用主要表现在反相振动, 见文献[10])。从上述各图可以看出, 尽管只考虑了基频谐波, 理论计算结果和实验结果两者也符合得较好。

为了比较所取模态阶数 (即  $p$  值) 的影响, 计

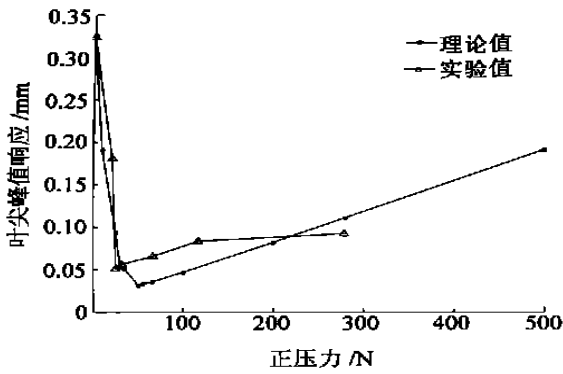


图5 共振响应随正压力的变化曲线

Fig. 5 Peak response vs. normal load

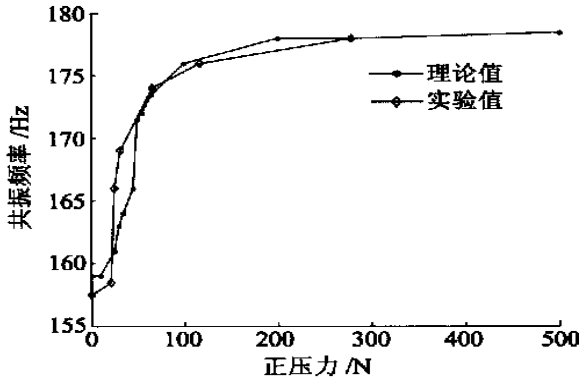


图6 共振频率随正压力变化曲线

Fig. 6 Resonant frequency vs. normal load

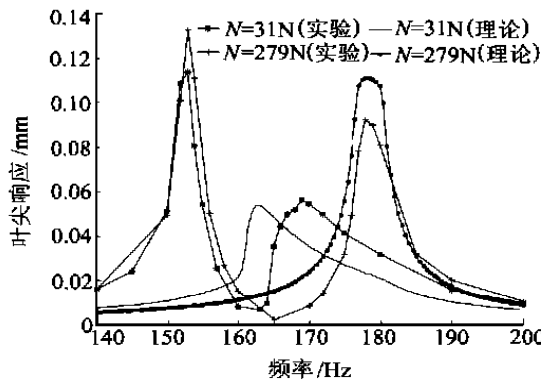


图7 频响曲线理论与实验值的对比

Fig. 7 Theoretical response and experimental response

算了  $p = 1$  和  $p = 6$  两种情况下叶片的响应。先只取一阶模态计算上述各正压力下的响应, 即图 4, 然后, 取前 6 阶模态再次对上述各正压力下的响应进行计算。结果表明, 在所求的频率范围内, 两者之间差别不超过 1%。前者运算用 CPU 时间 302.2s, 而后者运算时间差不多是前者的 6 倍。

### 3 结论

从上述的结果和比较可以看出, 用动柔度法

可以对带摩擦阻尼器的叶片进行动力特性分析, 而不用将其简化为单自由度质量振子。可以对叶片上任意一点任意振型的响应方便地进行求解。并且在各种状态下均能很快收敛。通过理论和实验的比较可以看出, 计算结果与实验结果吻合的很好。由于叶片与阻尼器之间的实际运动关系相当复杂, 特别是考虑复杂的振型时或叶片之间的耦合情况时, 用单自由度模型[3]处理将非常困难。而用本文的方法可以有效地求解, 这将在以后的文章中介绍。

### 参考文献

- [1] Den Hartog J P. Forced vibrations with combined coulomb and viscous friction [J]. Transactions of the ASME, 1931, APM-53-9: 107- 115.
- [2] Yeh G C K. Forced vibrations of a two-degree of freedom system with combined Coulomb and viscous damping [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1966, 39: 14 - 24
- [3] Griffin J H. Friction damping of resonant stresses in gas turbine engine airfoils [J]. ASME Journal of Engineering for Power, 1980, 102: 329- 333.
- [4] Griffin J H, Sinha A. The interaction between mistuning and friction in the forced response of bladed disk assemblies [J]. ASME Journal of Engineering for Gas Turbine and Power, 1985, 107: 205- 211.
- [5] Chen S, Sinha A. Probabilistic method to compute the optimal slip load for a mistuned bladed disk assembly with friction dampers [J]. ASME J Vibration and Acoustics, 1990, 112(Apr): 214- 221.
- [6] Wang J H, Chen W K. Investigation of the vibration of a blade with friction damper by HBM [J]. ASME J Engineering for Gas Turbines and Power, 1993, 115(Apr.): 294- 299.
- [7] 胡寻峰. 带凸肩叶片与轮盘耦合系统振动特性研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 1998.
- [8] 季葆华, 王乐天, 等. 阻尼连接叶片的动力特性研究[J]. 动力工程, 1996, 16(5): 45- 49.
- [9] Earles S W. A linearized analysis for frictionally damped systems [J]. J Sound and Vibration, 1972, 24(4): 445- 458.
- [10] 郝燕平, 单颖春, 朱梓根. 缘板摩擦阻尼器的减振实验研究[J]. 航空动力学报, 2001, 16(1): 55- 58.

作者简介:



郝燕平(1969-) 男, 北京航空航天大学动力系博士生, 工程师, 主要从事结构动力学、摩擦阻尼及航空发动机设计方面的研究。E-mail: http://hao\_yp@263.net

朱梓根(1939-) 男, 北京航空航天大学动力系教授, 博士生导师, 主要从事转子动力学、结构动力学及新型阻尼结构方面的研究。