

文章编号: 1000-6893(2001)06-0481-05

伞—弹系统三体运动分析

舒敬荣, 王宝贵, 韩子鹏, 卢春梅

(南京理工大学 802 教研室, 江苏 南京 210094)

ANALYSIS ON THREE BODY MOTION OF PARACHUTE-PROJECTILE SYSTEMS

SHU Jin-rong, WAN Bao-gui, HAN Zi-peng, LU Chun-mei

(Dynamics Engineering college, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

摘要: 理论上分析了末敏弹系统伞、伞盘、弹三刚体间的力学关系, 考虑了系统的连接方式和约束, 分析了伞绳弹性, 建立了三体运动的数学模型, 算例表明所描述的运动与实测运动规律和扫描特性相符, 因此该模型可用于末敏弹总体和扫描装置的分析与设计。

关键词: 飞行力学; 外弹道学; 降落伞; 末敏弹

中图分类号: V 212 **文献标识码:** A

Abstract: This paper studies the dynamic relations of three rigid bodies among parachute, plate and projectile of Target Sensitivity Projectile (TSP), analyses the joining mode and binding, and considers elasticity of the parachute rope. The equations are established. An example indicates the consistency of scanning characteristics and the rule between the real movement and the movement described by the model. So the model can be used in the TSP total design and scanning equipment design.

Key words: flight mechanics; exterior ballistics; parachute; target sensitivity projectile

末敏弹系统的空间运动错综复杂, 弹丸发射后, 减速伞和减旋片首先将弹丸减速减旋才打开主伞, 再经过减速和导旋过程, 伞—弹系统最后形成等速下降和等速旋转的扫描运动状态。本文只研究主伞打开后至稳态扫描形成的过程, 将末敏弹分成降落伞、伞盘和弹体 3 个物体, 并设它们均为轴对称刚体, 弹体与伞盘以柱铰连接, 柱铰在伞盘中心, 将伞绳视为只受拉力的弹簧, 不计降落伞的附加质量和附加惯性矩。

铅直向上; 伞盘固连坐标系 $c_1x_1y_1z_1$, 记为 S_1 系, c_1 为质心, c_1z_1 轴为垂直于盘面的中心轴; 弹体固连坐标系 $c_2x_2y_2z_2$, 记为 S_2 系, c_2 为质心, c_2z_2 为弹轴; 降落伞固连坐标系 $c_3x_3y_3z_3$, 记为 S_3 系, c_3z_3 为降落伞对称轴。其坐标转换关系如图 1~ 3 所示。

将伞盘固连坐标系与地面坐标系间的转换矩阵记为 A; 弹体固连坐标系与伞盘坐标系间的转换矩阵记为 B; 弹体固连坐标系与地面坐标系间的转换矩阵记为 $D = AB$; 降落伞坐标系与地面坐标系间的转换矩阵记为 C; 它们都是 3×3 矩阵, 其元素可由图 1~ 图 3 中欧拉角的定义按投影关系求得。

1 坐标系和坐标转换关系

建立地面惯性坐标系 $oxyz$, 记为 S_0 系, oz 轴

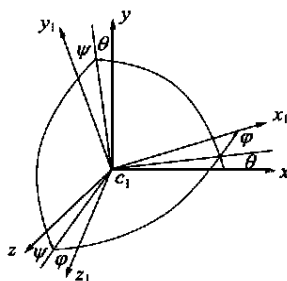


图 1 S_0 系与 S_1 系的关系

Fig 1 Relation between S_1 and S_0

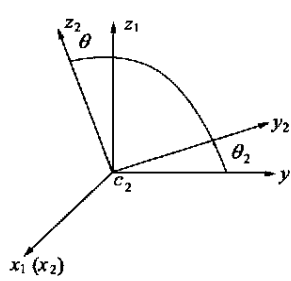


图 2 S_2 系与 S_1 系的关系

Fig 2 Relation between S_2 and S_1

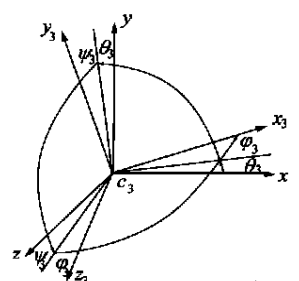


图 3 S_3 系与 S_0 系的关系

Fig 3 Relation between S_3 and S_0

2 作用在伞盘、弹体、伞上的力和力矩及其运动方程

设伞盘、弹和降落伞的质量分别为 m_1, m_2, m_3 , 半径为 r_1, r_2, r_3 。其质心 c_1, c_2, c_3 在地面坐标系 $oxyz$ 中的矢径分别为 $r_{ci} = x_{ci}i + y_{ci}j + z_{ci}k$ ($i = 1, 2, 3$), 其中 i, j, k 为沿地面坐标系三轴上的单位矢量。质心速度依次为 $v_{ci} = v_{xi}i + v_{yi}j + v_{zi}k$, 3 个物体的转速向自身固连坐标系上分解为 $\omega_i = \omega_{i1}i + \omega_{i2}j + \omega_{i3}k$ ($i = 1, 2, 3$), 其中 i, j, k 为坐标系 $c_{ix}y_{iz}$ 上的单位向量; 它们对自身固连坐标系三轴的转动惯量记为 A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, 3$)。

2.1 作用在伞盘上的力和力矩及其运动方程

作用在伞盘上的力有重力 $G_1 = -m_1gk$ 和弹体对伞盘的柱铰反力 $N_1 = N_xi + N_yj + N_zk$, 此外还有 4 根伞绳的拉力 $T_j = T_{jx}i + T_{jy}j + T_{jz}k$ ($j = 1, 2, 3, 4$)。这 4 根伞绳与伞盘的连接点 p_1, p_2, p_3, p_4 沿伞盘边缘均匀分布, 其坐标依次为 $(r_1, 0, 0), (0, r_1, 0), (-r_1, 0, 0), (0, -r_1, 0)$, p_j 到 c_1 的矢径为 $c_1p_j = x_{pj}i + y_{pj}j$, 如图 4 所示。

作用在伞盘上的力矩有伞绳拉力 T_j 对质心 c_1 的力矩 $m_{c_1}(T_j) = c_1p_j \times T_j = m_{c_1}(T_j)_{x_1}i + m_{c_1}(T_j)_{y_1}j + m_{c_1}(T_j)_{z_1}k$; 弹体对伞盘的柱铰反力 $M_1 = M_{y_1}j + M_{z_1}k$ (这里取 x_1 轴为柱铰轴, 故沿此轴无力矩)。于是由伞盘质心运动矢量方程 $m_1 \dot{r}_{c_1} = G_1 + N_1 + \sum_{j=1}^4 T_j$, 向 c_{xyz} 系分解得到标量方程

$$\left. \begin{aligned} dv_{x_1}/dt &= (N_x + \sum_{j=1}^4 T_{jx})/m_1 \\ dv_{y_1}/dt &= (N_y + \sum_{j=1}^4 T_{jy})/m_1 \\ dv_{z_1}/dt &= (N_z + \sum_{j=1}^4 T_{jz})/m_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

由动量矩定理 $\frac{d}{dt}(J_{c_1}\omega) = M_1 + \sum_{j=1}^4 m_{c_1}(T_j)$, 向

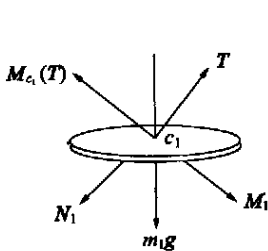


图 4 作用在伞盘上的力和力矩
Fig. 4 Force and moment acting on parachute plate

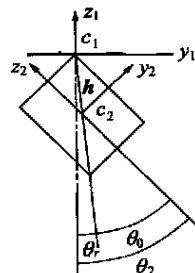


图 5 弹体与伞盘间的位置关系
Fig. 5 Place relation between projectile body and parachute plate

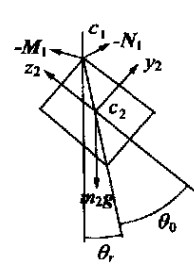


图 6 作用在弹体上的力和力矩
Fig. 6 Force and moment acting on projectile body

$c_{1x_1y_1z_1}$ 系分解得

$$\left. \begin{aligned} d\omega_1/dt &= [\sum_{j=1}^4 m_{c_1}(T_j)_{x_1} - (C_1 - B_1)\omega_1\omega_1]/A_1 \\ d\omega_1/dt &= [\sum_{j=1}^4 m_{c_1}(T_j)_{y_1} - (A_1 - C_1)\omega_1\omega_1 + \\ &M_{y_1}]/B_1 \\ d\omega_1/dt &= [\sum_{j=1}^4 m_{c_1}(T_j)_{z_1} - (B_1 - A_1)\omega_1\omega_1 + \\ &M_{z_1}]/C_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

2.2 作用在弹体上力和力矩以及弹体运动方程

作用在弹体上的力有重力 $G_2 = -m_2gk$, 伞盘对弹体的约束反力 N_1 。弹体相对伞盘仅绕柱铰轴转动, 弹体铰接点在弹底边缘, 其相对位置如图 5 所示。图中质心 c_1 和 c_2 的连线矢量为

$$\vec{c_1c_2} = r_2 - r_1 = h = h \sin\theta j_1 - h \cos\theta k_1 \quad (3)$$

式中: θ 是 h 与 c_{1z_1} 轴间的夹角。此外又记 h 与 z_2 轴的夹角为 θ , 称为静态悬挂角; 记弹轴 z_2 相对于伞盘轴 z_1 的夹角为 Θ , 则有 $\Theta = \theta_0 + \theta$ 。

作用在弹体上的力矩有, 柱铰反力对 c_2 的力矩 $m_{c_2}(-N_1) = c_2c_1 \times (-N_1) = h \times N_1$ 和伞盘对弹体的反力矩 $-M_1 = M_{y_2}j_2 + M_{z_2}k_2$, 由坐标变换关系可得 $M_{y_2} = M_{y_1} \cos\Theta + M_{z_1} \sin\Theta, M_{z_2} = -M_{y_1} \sin\Theta + M_{z_1} \cos\Theta$ (图 6)。由动量定理 $m_2 \dot{r}_2 = G_2 - N_1$ 和动量矩定理分别得弹体质心运动方程组和弹体转动运动方程组

$$\left. \begin{aligned} dv_{x_2}/dt &= -N_x/m_2; \quad dv_{y_2}/dt = -N_y/m_2 \\ dv_{z_2}/dt &= -(N_z + m_2g)/m_2 \\ d\omega_2/dt &= [m_{c_2}(-N_1)_{x_2} - (C_2 - B_2)\omega_2\omega_2]/A_2 \\ d\omega_2/dt &= [m_{c_2}(-N_1)_{y_2} - (A_2 - C_2)\omega_2\omega_2 - \\ &M_{y_2}]/B_2 \\ d\omega_2/dt &= [m_{c_2}(-N_1)_{z_2} - (B_2 - A_2)\omega_2\omega_2 - \\ &M_{z_2}]/C_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

而弹体相对伞盘只有绕 x_2 轴的转动, $\omega_2 = \omega_1 + \dot{\theta}$, 因 θ 在 i_1 方向, 所以有 $\dot{\theta} = \omega_2 - \omega_1$ 。此外, 在另 2 个方向上二者转速是相同的, 由坐标转换关系得

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_1 \cos \theta + \omega_1 \sin \theta; \\ \omega_2 &= -\omega_1 \sin \theta + \omega_1 \cos \theta \end{aligned} \quad (6)$$

2.3 作用在降落伞上的力和力矩及其运动方程^[1,2]

设伞质心 c_3 至伞底面的距离为 h_3 , 4 根伞绳与伞边缘的连接点为 s_1, s_2, s_3, s_4 , 它们在降落伞坐标系中的坐标依次为 $(r_3, 0, -h_3), (0, r_3, -h_3), (-r_3, 0, -h_3), (0, -r_3, -h_3)$, 各点到 c_3 的矢径为 $\vec{r}_{c_3 s_j} = x_{sj} \vec{i}_3 + y_{sj} \vec{j}_3 + z_{sj} \vec{k}_3$

作用在降落伞上的力有重力 $G_3 = -m_3 g \vec{k}$, 在 s_j 点受到的沿伞绳方向的拉力 $-T_j$ 和降落伞的空气动力 $R_3 = R_z + R_y$, 见图 7。其中 $R_z = -\frac{1}{2} \rho v_{c_3} S (v_{x_3}, v_{y_3}, v_{z_3})$ 为与速度 v_3 反向的阻力; $R_y = \rho v_{c_3}^2 S c_3 \alpha_3 [I_{yx}, I_{yy}, I_{yz}]$ 为升力。其中 I_{yx}, I_{yy}, I_{yz} 为升力与地面坐标系夹角的余弦, 可由伞轴方向 \vec{c}_3 与伞质心速度方向 v_{c_3} 确定, 即在 $v_{c_3} \times (k_3 \times v_{c_3}) / v_{c_3}^2$ 的方向上, 将 v_{c_3} 和 k_3 均以地面坐标系三轴上的分量表示, 即可求得 I_{yx}, I_{yy}, I_{yz} 。

作用在降落伞上的力矩有, 伞绳拉力对 c_3 的力矩 $m_{c_3}(-T_j) = \vec{r}_{c_3 s_j} \times (-T_j)$ 。此外还有作用在降落伞上的空气动力矩 M_3 , 它们包括导转力矩 M_{xw} , 方向与伞轴相同; 旋转阻尼力矩 M_{xz} 方向与伞轴相反; 还有稳定力矩 M_z 和摆动阻尼力矩 M_{zz} , 后者的方向与 ω_3 相反; 即

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_{3x_3} \\ M_{3y_3} \\ M_{3z_3} \end{bmatrix} &= \frac{\rho}{2} S l v_{c_3}^2 m_{xw} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\rho}{2} S l^2 v_{c_3} \omega_3 m_{xz} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \\ &\frac{\rho}{2} S l^2 v_{c_3} m_{zz} \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_3 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \frac{\rho}{2} S l v_{c_3} \alpha_3 m_z \cdot \\ &\begin{bmatrix} c_{11} v_{x_3} + c_{12} v_{y_3} + c_{13} v_{z_3} \\ c_{21} v_{x_3} + c_{22} v_{y_3} + c_{23} v_{z_3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

式中: 稳定力矩的方向垂直于伞轴与质心速度 v_{c_3} 所组成的攻角面, 即在 $k_3 \times v_{c_3}$ 方向上; α_3 即为攻角大小; ρ 为空气密度; S 为特征面积; l 为特征长度。由降落伞质心运动方程 $m_3 \ddot{r}_{c_3} = G_3 + R_3$

$-\sum_{j=1}^4 T_j$ 和动量矩定理分别得伞质心运动方程和伞绕 c_3 的转动方程如下

$$\left. \begin{aligned} dv_{x_3}/dt &= (R_{x_3} - \sum T_{jx})/m_3 \\ dv_{y_3}/dt &= (R_{y_3} - \sum T_{jy})/m_3 \\ dv_{z_3}/dt &= (R_{z_3} - \sum T_{jz} - m_3 g)/m_3 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} dv_{x_3}/dt &= [\sum m_{c_3}(-T_j)_{x_3} + M_{x_3} - (C_3 - B_3)\omega_3 \omega_3]/A_3 \\ dv_{y_3}/dt &= [\sum m_{c_3}(-T_j)_{y_3} + M_{y_3} - (A_3 - C_3)\omega_3 \omega_3]/B_3 \\ dv_{z_3}/dt &= [\sum m_{c_3}(-T_j)_{z_3} + M_{z_3} - (B_3 - A_3)\omega_3 \omega_3]/C_3 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

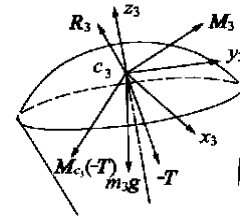


图 7 作用于降落伞的外力和力矩

Fig 7 Force and moment acting on parachute

3 内力和内力矩的求解

在以上方程中, 3 个物体之间相互作用的伞绳拉力、拉力矩、约束力和约束力矩属于内力和内力矩, 是未知的, 由于它们的存在使方程数少于未知数个数而不能求解, 故须将它们以运动参数的形式求出。

3.1 伞绳拉力和拉力矩的计算^[2]

伞绳拉力沿伞绳方向, 由 p_j 指向 s_j , 图 8 表示了伞绳与降落伞以及伞盘间的位置关系。伞绳矢量为 $l_j = \vec{p}_j s_j = c_1 c_3 + c_3 s_j - c_1 p_j$ 。设 l_j 在地面坐标系中的分量为 l_{jx}, l_{jy}, l_{jz} , 则它们可表示为

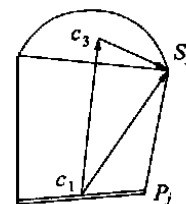


图 8 伞绳与伞盘的相对位置关系

Fig 8 Place relation between parachute rope and plate

$$\begin{bmatrix} l_{jx} \\ l_{jy} \\ l_{jz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{c_3} - x_{c_1} \\ y_{c_3} - y_{c_1} \\ z_{c_3} - z_{c_1} \end{bmatrix} + C^{-1} \begin{bmatrix} x_{sj} \\ y_{sj} \\ -h^s \end{bmatrix} - A^{-1} \begin{bmatrix} x_{pj} \\ y_{pj} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (10)$$

将伞绳视为只受拉力的弹簧,原长为 l_0 ,弹性系数为 k_e ,阻尼系数为 c ,则伞绳拉力 T_j 可表示为

$$T_j = T_{j1}l_j/l_j + c\dot{l}_j; T_j = k_e(l_j - l_0) \quad (11)$$

式中: $l_j = |l_j|$, \dot{l}_j 可由 l_j 求导获得,于是伞绳拉力对质心 c_1 和 c_3 的力矩分别为

$$m_{c_1}(T_j) = c_1 p_j \times T_j; m_{c_3}(T_j) = -c_3 s_j \times T_j \quad (12)$$

再应用坐标转换矩阵,就可将它们分别分解到伞盘坐标系和降落伞坐标系上去。

3.2 约束力的计算

伞盘与弹在 c_1 点通过柱铰连接,其相互约束力和约束力矩也可通过二者受约束后的运动关系求出,首先,二者质心速度和加速度关系为

$$\dot{r}_{c_2} = \dot{r}_{c_1} + \dot{\theta} \times h; \ddot{r}_{c_2} = \ddot{r}_{c_1} + \frac{d}{dt}(\dot{\theta} \times h)$$

$$\dot{\theta} \times h = \dot{\theta}_{i1} \times (h \sin \theta_{j1} - h \cos \theta_{k1}) \quad (13)$$

先将上式转换到地面坐标系上,再求出它的导数分量(dRR_1/dt , dRR_2/dt , dRR_3/dt),这些导数分量中又含有 $\dot{\theta}$,这可由 $\dot{\theta} = \omega_2 - \omega_1$ 关系求出,即 $\dot{\theta} = \dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_1$ 。这样,由 $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2$ 即与伞盘、弹体绕 x_1 轴的转动方程产生联系,但转动方程中又有约束力 $N_1 = N_x i + N_y j + N_z k$ 对弹体质心的力矩,为此可通过转换矩阵 D 先将 N_1 转换到弹体坐标系 $c_2x_2y_2z_2$ 上,得 $N_1 = N_x i_2 + N_y j_2 + N_z k_2$,然后即可算出

$$m_{c_2}(-N_1) = h \times N_1 = (N_y h \cos \theta -$$

$$N_z h \sin \theta) i_2 - N_x h \cos \theta j_2 + N_x h \sin \theta k_2 \quad (14)$$

将式(13)第2式两端向 x 轴分解得 $\dot{x}_{c_2} - \dot{x}_{c_1} = dRR_1/dt$,再将关于 \dot{x}_{c_2} 和 \dot{x}_{c_1} 的质心运动方程代入,再加以整理,即可得关于约束力 N_x, N_y, N_z 的方程

$$U_{11}N_x + U_{12}N_y + U_{13}N_z = UU_1 \quad (15)$$

同理,将式(13)第2式向 y, z 轴分解,又可得出如下方程

$$\left. \begin{aligned} U_{21}N_x + U_{22}N_y + U_{23}N_z &= UU_2 \\ U_{31}N_x + U_{32}N_y + U_{33}N_z &= UU_3 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

以上3个方程中的系数 U_{ij} 和 UU_i ($i, j=1, 2, 3$)均可求出表达式,于是由此三方程,即可解 $N_x, N_y,$

N_z

3.3 约束力矩的计算

伞盘和弹体除了可绕柱铰相对转动外,还可以以相同的角速度绕垂直于柱铰轴的另一2个轴转动,设此角速度为 ω ,则有 $\omega = \omega_2 i_2 + \omega_2 k_2 = \omega_1 i_1 + \omega_1 j_1$,再由坐标转换关系得

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 &= \omega_1 \cos \theta + \omega_1 \sin \theta \\ \omega_2 &= -\omega_1 \sin \theta + \omega_1 \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

将式(17)求导出现 $\dot{\omega}_2, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_1, \dot{\omega}_1$,再将伞盘和弹体的转动方程代入,就形成含有约束力矩 M_{y_1}, M_{z_1} 的个代数方程

$$\left. \begin{aligned} E_{11}M_{y_1} + E_{12}M_{z_1} &= EE_1 \\ E_{21}M_{y_1} + E_{22}M_{z_1} &= EE_2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中: E_{ij}, EE_1, EE_2 均可求出表达式,由此即可解出约束力矩 M_{y_1}, M_{z_1} 。

4 伞—弹系统扫描角、扫描轨迹和扫描角速度的计算

因探测器沿弹轴方向,故定义扫描角 θ_m 为弹轴与铅直线间的夹角,由 $k \cdot k_2 = \cos \theta_m = D_{33}$ 知 $\theta_m = \arccos(D_{33})$ 。同理弹轴矢量与地面坐标系 y, z 轴的夹角为 $\theta = \arccos(D_{31}), \theta = \arccos(D_{32})$ 。

扫描轨迹是指弹轴矢量与地面交点的轨迹,弹体质心 c_2 至扫描点的长度 $|L_d| = |z_{c_2} \sec \theta_m|$,故扫描点在地面坐标系上的坐标为

$$(x_d - x_{c_2})^2 + (y_d - x_{c_2})^2 = z_{c_2}^2 \tan^2 \theta_m \quad (19)$$

扫描角速度 ω 是指末敏弹弹轴绕铅直轴转动的角速度,大小应为

$$\omega = D_{13}\omega_2 + D_{23}\omega_2 \quad (20)$$

5 系统方程组的联立

将伞、伞盘、弹的质心运动方程,绕质心转动方程的动力学方程(共18个),运动学方程(即各速度分量与坐标的关系,转动角速度与定义坐标轴方位的欧拉角之间的关系)(共16个)联立,即得到末敏弹运动方程组。此外还要补充约束力 N_1 ,约束力矩 M_1 ,伞绳拉力 T_j 的计算式(8个)和坐标转换矩阵的元素的计算式($4 \times 9 = 36$ 个),以及一些必要的中间变量计算式,最后形成系统运动方程组。

6 算例分析

应用以上系统方程组编制计算程序,以某伞—弹系统($m_1 = 0.5 \text{ kg}, m_2 = 7.5 \text{ kg}, m_3 = 0.3 \text{ kg}$,伞

面积 0.6m^2 , 伞绳长 1.1m) 为例进行计算, 得到全过程中转速和扫描角变化如图 9, 图 10 所示。在

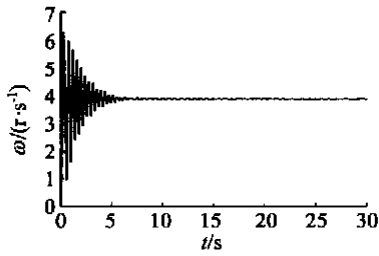


图 9 未敏弹系统转速随时间的变化

Fig 9 Rotation speed vs time of target sensitivity projectile system

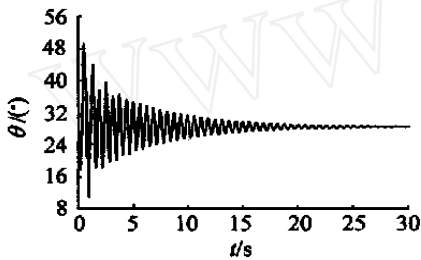


图 10 未敏弹系统扫描角随时间的变化

Fig 10 Scanning angle of target sensitivity projectile system vs time

图 11 和图 12 中列出该系统试验实测的转速和扫描角变化情况, 可见理论计算与实测结果在规律上是相符的。图 13 分时间段画出了伞-弹系统扫描轨迹变化情况, 可见, 尽管未敏弹刚投下时扫描轨迹十分混乱, 最后却能形成等间隔螺线扫描状态。

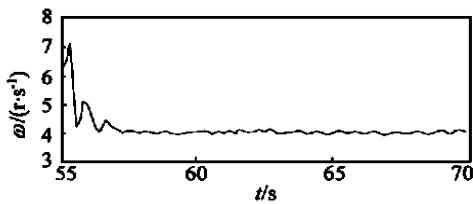


图 11 实测的转速变化规律

Fig 11 Variation of realmeasuring rotation speed vs time

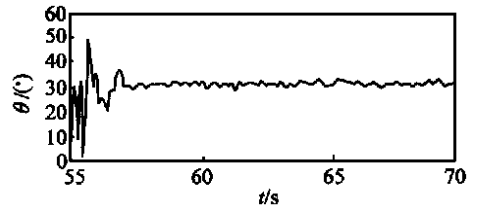


图 12 实测的扫描角变化规律

Fig 12 Variation of realmeasuring scanning angle vs time



图 13 地面扫描曲线变化情况

Fig 13 Variation of scanning curve

7 结论

三体运动模型较符合未敏弹实际结构情况, 能更好地描述未敏弹运动规律, 本文在分别建立了伞、伞盘、弹各自运动方程的基础上, 考虑到系统的连接方式和约束, 获得了系统运动方程组, 算例表明运动模型所描述的运动与实测运动规律和扫描特性一致, 因此该模型可用于未敏弹总体设计分析和扫描装置设计。

参考文献

[1] 王利荣. 降落伞理论与应用[M]. 北京: 宇航出版社, 1997. 127- 160

[2] Pillasch D W, Shen Y C. Parachute & subunit system coupled dynamics[R]. A IAA -84-0784, 1984. 20- 24

作者简介:



韩子鹏(1941-) 男, 湖北武汉人, 南京理工大学教授, 研究方向为外弹道与飞行力学。

(责任编辑: 吴小勇)