

文章编号: 1000-6893(2001)06-0495-05

三维自适应非结构网格的 Euler 方程解

王平, 朱自强, 拓双芬, 尹幸愉

(北京航空航天大学 流体力学研究所, 北京 100083)

3D SOLUTIONS OF THE EULER EQUATIONS ON THE ADAPTIVE TETRAHEDRAL MESHES

WANG Ping, ZHU Zi-qiang, TUO Shuang-fen, YIN Xing-yu

(Institute of Fluid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and

Astronautics, Beijing 100083, China)

摘要: 将 $AUSM^+$ 迎风格式应用于三维非结构网格中求解 Euler 方程。对单元变量进行重构以获得空间高阶精度, 对时间域采用多步龙格库塔法推进, 并采用了当地时间步长和隐式残差光滑技术来加速收敛。采用多点择优推进阵面法生成复杂曲面的三角形网格, 利用推进阵面法生成四面体网格。采用网格自适应技术对网格进行局部加密, 以减少总体网格数目, 从而提高计算效率。最后给出了绕 ONERA M6 机翼的跨音速流动及绕麻雀 III 导弹的超音速流动算例, 结果表明了本方法的有效性。

关键词: 非结构网格; Euler 方程; 自适应网格技术; 迎风格式

中图分类号: V211.3 **文献标识码:** A

Abstract: The 3D Euler solutions for adaptive tetrahedral grids are presented. Spatial discretization is accomplished by a cell-centered finite-volume formulation using $AUSM^+$ upwind scheme. Higher-order accuracy is achieved by applying a novel cell reconstruction processing which avoids solution oscillations without adding explicit limiters. Unstructured grids on the surface block are created by using a new developed algorithm presented in this paper. An adaptive grid algorithm is used in order to enhance the calculation efficiency. Numerical examples include transonic flow around ONERA M6 wing and supersonic flow over Sparrow III missile. Comparisons with experimental data are made to evaluate the accuracy and efficiency of the present method.

Key words: unstructured grid; Euler equation; adaptive grid technique; upwind scheme

尽管 CFD 技术有了长足的发展, 但是求解绕复杂三维物体的流动问题仍然是一个难点。这是因为物体外形复杂, 生成网格很困难。由于非结构网格能很好地处理复杂边界, 而且容易实现局部自适应加密, 因此越来越受到人们的关注。1993 年 Meng-Sing Liou 构造了 $AUSM$ (Advection Upstream Splitting Method) 格式^[1], 并进一步发展为 $AUSM^+$ 格式^[2]。 $AUSM^+$ 格式是一种 FVS 与 FDS 的复合格式, 兼有 Roe 格式的间断高分辨率和 van Leer 格式的计算效率高的优点。本文在文献 [3, 4] 的基础上, 将其应用于三维自适应非结构网格的 Euler 方程求解。

1 三维非结构网格的生成法

推进阵面法是生成非结构网格的一种重要方法, 它的前提是必须有离散好的初始阵面。初始阵

面, 在三维域则是一系列的表面三角形网格。对复杂外形直接生成表面三角形网格很困难, 必须将物体表面划分成许多个形状简单的曲面块, 对每个曲面块单独生成表面网格, 然后将所有的曲面块缝合起来。目前生成曲面三角形网格的方法常用的有: 映射法^[5, 6]; 采用推进阵面法直接在曲面上生成非结构网格^[7]; 采用 Delaunay 三角化方法直接在曲面上生成非结构网格^[8]。

本文提出一种新的曲面非结构网格生成算法——多点择优推进阵面法。此算法的基本策略是推进阵面法, 在映射平面的帮助下, 实现对曲面的直接三角形网格划分, 同时在划分结束后, 能快速对格点进行 Laplacian 松弛。与常规推进阵面法最大的差别在于, 本法在获得活动阵面的理想推进点 P 时, 不是由解析公式获得, 也不是从曲面的几何信息中插值得来, 而是从曲面上预先布好的点集中搜索到的一个最优点。此点集的规模很大, 足够反映曲面的所有信息, 最终的非结构网格

格点数目仅占这个点集的 0.1% 左右。多点择优推进阵面法的主要步骤:

(1) 生成背景网格, 本文用结构背景网格^[9]。

(2) 曲面边界离散。对曲面边界进行剖分, 得到初始阵面。本文将文献[10]中的边界剖分法从二维推广到三维, 得到了高质量的初始阵面。

(3) 曲面离散成点集, 存于二维数组。利用一系列纵横交错的线条来描述曲面, 这些纵横线条被赋以整数参数来标识, 根据曲面的定义该点也对应一个空间点 (X, Y, Z) , 同时网格交点也有了参数坐标 (I, J) , 这种思想类似于将空间曲面表示成二元参数曲面。

(4) 将边界离散点定位于参数平面(找出各点的参数 I, J)。边界离散点已经事先确定了, 接下来需要找出各点在参数面上最接近的参数坐标 (I, J) , 这可以用逐一比较法实现, 也可以采用搜索法来完成。后者的计算效率要高得多, 但是对某些曲面难以处理, 还需采用逐一比较法。如果 (I, J) 点对应的空间坐标与边界离散点的坐标不重合, 则将边界离散点的坐标赋给 $X(I, J), Y(I, J), Z(I, J)$ 。

(5) 在空间曲面上进行阵面推进。选定一活动阵面, 求出其空间长度 S , 两端点 A, B 的参数 $(I_A, J_A), (I_B, J_B)$ 。从背景网格中求出该活动阵面中点的网格尺度 L (此网格尺度用来做为理想等腰三角形之腰长)。从活动阵面的中点 M 的参数 (I_M, J_M) 出发, 搜索一个最优点 $P(I_P, J_P)$, 其到两端点的空间距离最满足背景网格尺度要求。搜索算法的好坏直接关系到网格生成的成功与否及网格质量。因为空间曲面三角形与参数平面三角形的拓扑结构完全一样, 因此可以在二维参数平面判断新三角形与阵面是否相交, 及新三角形是否包含已有阵面点。图 1 是半球曲面上最终生成的网格, 曲面上仅有 177 个网格点。

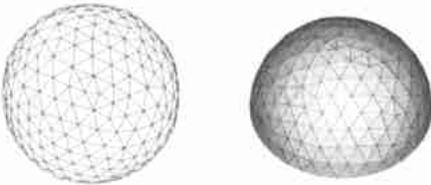


图 1 (I, J) 平面上的网格与曲面网格间的关系

Fig 1 Grids on parameter plane and curve surface

从图可见, 在 (I, J) 参数平面上, 三角形在外侧有很强的径向压缩, 而在中间则几乎是等边三角形, 这说明本方法能自动反映曲面的特征, 寻找最优, 以得到曲面上接近正三角形的网格。

(6) 曲面网格光滑。为提高网格质量需要对生成的网格进行光滑, 常用的方法是对角线交换法和 Laplacian 格点松弛光滑。对曲面非结构网格进行 Laplacian 格点松弛光滑, 实现起来比较困难。因为曲面上网格点进行松弛移动的同时必须保证它始终位于曲面上, 而做到这一点却不是那么容易, 因此在大多数文章中都没采用 Laplacian 格点松弛法^[6,7]。由于本文在预先布好的点集中, 生成曲面非结构网格仅用到了其中很小的一部分, 因此可以利用剩下的点进行格点松弛。首先找出以一格点 P (P 只能为非边界点) 为顶点的所有三角形, 施加移动判据, 在以 P 点为中心的 9 个点中寻找一个最佳点, 将 P 点移动到此最佳点。只要点集足够密, 这样做的效果与平面域中进行 Laplacian 格点松弛光滑的效果完全一样。

利用上法得到各个曲面块的三角形网格后, 将所有的曲面块缝合在一起构成初始阵面, 然后利用推进阵面法得到计算域的四面体网格, 最后还需对网格进行光滑。

2 四面体网格的自适应技术

计算量是随着计算域网格数的增加而增大的。自适应网格法能根据流场内变量分布, 在局部区域内加密或稀疏网格, 在提高分辨率的同时, 尽可能地减少总网格数, 提高求解效率。在三维域中对四面体网格进行自适应与在二维域中对三角形网格进行自适应相比, 方法上完全一样, 但在实现时更复杂, 因为四面体网格比平面内的三角形网格多了一种几何拓扑结构(四面体单元)。

在得到粗网格上的流场解后, 根据选定的自适应判据, 对满足细分判据的网格边注明细分, 即在该边中点增加一个网格点。然后采取措施消除所有的悬挂点, 以得到正确的计算网格结构。文献[10]提出了一种数组链接表结构, 用它来存储网格的拓扑结构。文献[4]将其应用于平面三角形网格的自适应中, 证明其非常有效。本文在三维域中也采用了这种数据结构。

对四面体进行剖分, 本文只允许出现如图 2 所示的 5 种情况。如果一个四面体上 6 条棱边的细分点的数目或位置与这 5 种情况都不符合, 则需要在其上增加额外的细分点以消除出现的悬挂点。如果从四面体单元出发, 先找出它有几个棱边被注明细分, 如果数目符合 5 种情况之一, 则继续判断其位置是否符合, 如果需要增加细分点还要判断是在哪条边上加。这样做势必导致程序非常

复杂, 因为中间 3 种情况每一种都有几个不同的排列, 必须对每一种可能的排列进行判断。

经过分析, 发现可将上述所有的判断转移到二维中去。所有的三角形面只允许出现如图 3 所示的 3 种剖分情况。如果所有的三角形面都满足了其中之一, 则所有的四面体均自然满足图 2 所示的 5 种情况之一。而对平面三角形网格进行剖分, 已经在文献[3, 4]中实现了。编程时只需多建立一个四面体单元的数组链接表, 以存储由四面体指向 4 个三角形面的指针。先对三角形面的数组链接表进行多次遍历消除悬挂点, 最后对四面体的数组链接表遍历一次, 完成四面体的剖分。



图 2 四面体剖分的 5 种情况

Fig. 2 5 subdividable cases to refine tetrahedron

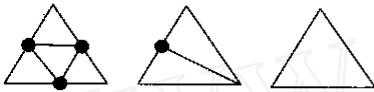


图 3 三角形面剖分的 3 种情况

Fig. 3 3 subdividable cases to refine triangle grid

3 数值方法

主控方程为 Euler 方程。采用先进迎风型格式 $AUSM^+$ 计算控制体的通量。如用格心变量值计算控制体边界的通量, 在空间上仅有一阶精度。为了得到高阶精度, 需进行空间高阶插值。在二维域内文献[3, 4]采用单元内变量线性重构技术, 通过格林-高斯积分获得三角形单元中的变量梯度, 这样在计算边界处的通量时可以采用边界处的变量值, 在空间上具有二阶精度。在变量重构过程中要实施严格的保单调措施, 保证重构过程不出现新的极值。因此在文献[3, 4]中采用了 Barth 型限制器。三维中完全可以沿用二维中的做法, 但考虑到三维中的诸多不利因素, 本文采取了不同的处理措施。这些不利因素包括: 在通常计算中三维域的网格数目比二维中的要大得多;

格林-高斯积分在二维域中是线积分, 而在三维中却是面积分, 计算工作量更大; 计算控制体的梯度限制器在三维中的工作量也比在二维中的大。为此本文经反复分析、比较, 最后决定采用文献[11, 12]中的处理方法。其处理方法很简单, 首先将网格格心处的变量插值到网格格点上, 然后

用格点上的值计算四面体单元边界上的变量值。常用的插值方法是: 将所有围绕一个网格点的网格单元的变量值, 进行加权平均后赋给网格点。加权平均方法有按网格体积进行的, 也有按格心到格点的距离进行的, 本文采用的是后者。设网格格心(四面体的中心)到三角形 123 的面心位移为 Δr , 则顶点 4 到网格格心的位移为 $3\Delta r$ 。设单元中心的变量为 Q_c , 四面体内的变量梯度为 ∇Q_c , 则三角形面 123 中心处的变量 $Q_{f,1,2,3}$ 可用下式求得

$$Q_{f,1,2,3} = Q_c + \nabla Q_c \cdot \Delta r$$

$$\nabla Q_c = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \Delta r = \left[\frac{(Q_1 + Q_2 + Q_3)/3 - Q_4}{4\Delta r} \right] \cdot \Delta r$$

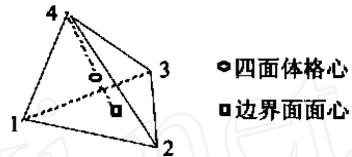


图 4 四面体格心和格点的关系图

Fig. 4 Geometrically invariant features of tetrahedron

这样 $Q_{f,1,2,3}$ 可用一简单公式近似表示为:

$Q_{f,1,2,3} \approx Q_c + [(Q_1 + Q_2 + Q_3)/3 - Q_4]/4$, 计算工作量大大减少。由于网格格点上的变量值 Q_n 是对周围格心值的一个加权平均, 本文采用了按格心到格点的距离进行加权平均。在三维域中围绕一个格点的四面体平均有 20~22 个, 所以加权平均是非常光滑的, 不会引进新的极值, 因而不需要施加显式的限制器。

4 算例

算例 1 绕 ONERA M 6 机翼的流动 计算状态为 $Ma = 0.84$, $\alpha = 3.06^\circ$; 采用自适应网格计算。粗网格在机翼表面共有 1034 个网格点, 2056 个三角形单元, 整个流场有 113 456 个四面体, 20 253 个网格点。经过 2 次自适应后, 机翼表面共有 4727 个网格点, 9444 个三角形单元, 整个流场有 445 550 个四面体, 78 730 个网格点。由图 5 可见, 在机翼上表面有一道 λ 形激波, 但激波厚度较厚, 经过两次自适应后, 图 6 显示在对应激波出现的地方网格被自动细分, 捕捉到的激波厚度大大减小。

机翼 44%, 65%, 90% 翼展处的压强系数分布与实验值^[13]的比较分别见图 7~图 9。由图可见随着自适应的进行, 机翼翼面上的 c_p 曲线越来越

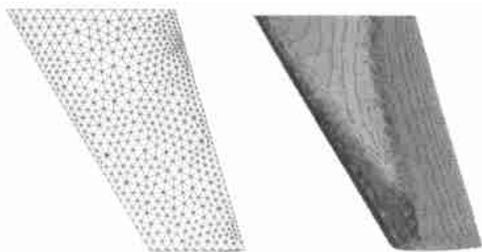


图5 粗网格层的机翼上表面网格和等压线分布 ($\Delta P = 0.02$)

Fig. 5 Rough grid (mesh1) and pressure contour on upper wing surface ($\Delta P = 0.02$)

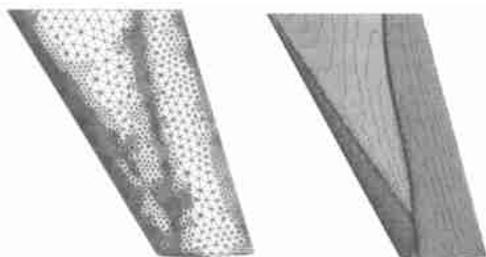


图6 经2次自适应后,机翼上表面网格和等压线分布 ($\Delta P = 0.02$)

Fig. 6 Grid (after 2 adaptions) and pressure contour on upper wing surface ($\Delta P = 0.02$)

越好地捕捉到了 λ 形激波。在44%翼展处前后两道激波距离较远,越往外越靠近,到90%翼展处两道激波完全融合,激波强度也增大,计算结果正确反映了这一现象。

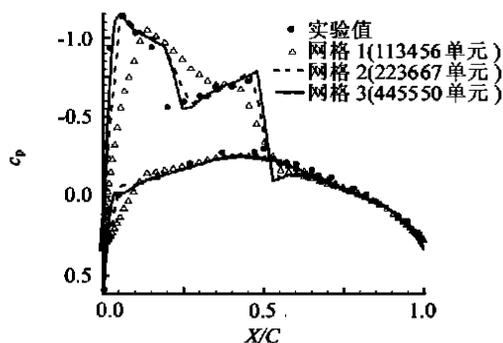


图7 ONERA M6机翼44%翼展处的 c_p 分布

Fig. 7 Pressure distribution at 44% spanwise station

为了评估自适应技术对计算效率的影响,本文单独在上述第3层网格上(最后得到的细网格层)进行了流场计算。图10示出的是2种计算方式的残差收敛史比较。两者的残差收敛到 6×10^{-5} ,自适应网格迭代了1300多步,而单层网格用了1500多步。另外由于每次迭代所需时间与网格数目有关,图10中自适应网格是以大约两倍的倍数往上增加,所以综合花费时间约相当于单层网格迭代计算800步左右,采用自适应技术使

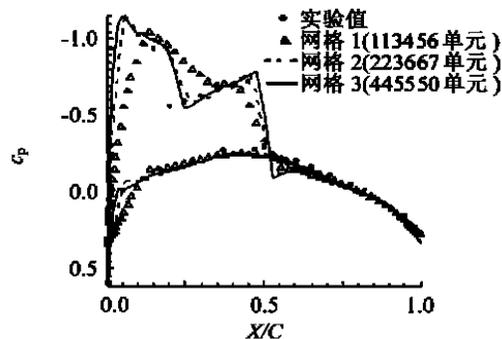


图8 ONERA M6机翼65%翼展处的 c_p 分布

Fig. 8 Pressure distribution at 65% spanwise station

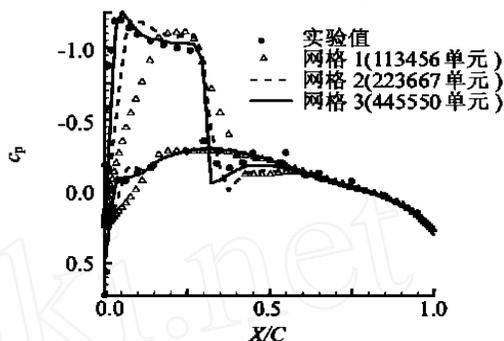


图9 ONERA M6机翼90%翼展处的 c_p 分布

Fig. 9 Pressure distribution at 90% spanwise station

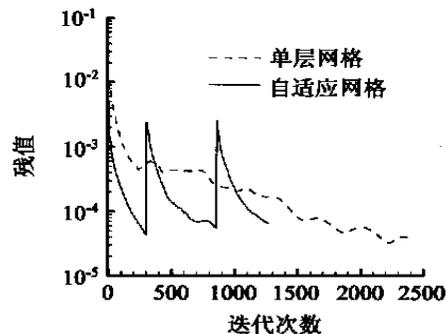


图10 单层网格和自适应网格的残差收敛史比较

Fig. 10 Comparison of convergence history

算效率提高了约1.8倍。

算例2 麻雀III导弹是一种具有尖拱形头部,细长比麻雀III导弹是一种具有尖拱形头部,细长比为18的圆柱型弹体,十字弹翼,十字舵面的超音速导弹。弹翼的截面形状是菱形,舵面的平面形状是三角形,翼型是修改后的菱形。计算时弹翼和舵面都不偏转,在导弹尾部加了一个圆柱体,以模拟导弹实验时所用的尾部支杆。

为了研究导弹的控制特性,马赫数固定为2.0,攻角 $0^\circ \sim 25^\circ$ 。计算得到的俯仰力矩系数和法向力系数与实验值^[14]对比,两者符合比较一致。图11是攻角 12° 时的计算网格(经过一次自适应),表面网格有6280个网格点,12554个三角形

单元。图 12 是导弹表面等压线的分布图。



图 11 麻雀III导弹的表面网格

Fig 11 Surface grid on Sparrow III missile



图 12 麻雀III导弹的表面等压线分布

Fig 12 Pressure contour on Sparrow III missile

($Ma = 2.0$, $\alpha = 12^\circ$, $\Delta P = 0.1$)

俯仰力矩系数及法向力系数与实验值的对比分别见图 13 和图 14。从图可见, 计算结果与实验值在 $0 \sim 23^\circ$ 符合得很好, 只是在攻角大于 23° 时, 开始有明显的差别, 这是因为本文求解的是 Euler 方程, 没有考虑粘性的影响。为了更好地与实验值取得一致, 需要求解 N-S 方程, 并且流动在大迎角下的非对称、非定常运动也需考虑。

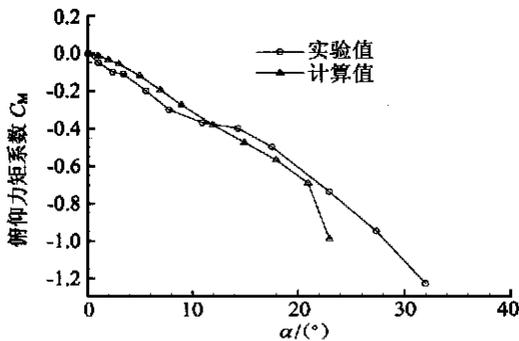


图 13 麻雀III导弹的俯仰力矩系数($Ma = 2.0$)

Fig 13 Calculated results and experimental data of pitching moment ($Ma = 2.0$)

5 结论

应用非结构网格求解绕三维复杂物体的无粘流动, 通量计算采用 AUSM⁺ 迎风格式。应用多点择优推进阵面法生成复杂曲面的三角形网格。为了减少计算网格数目, 提高计算效率, 采用了网格自适应技术。由于采用了高效的数组链接表数据结构, 使得对四面体网格的自适应过程简单化。绕 ONERA M6 机翼的跨音速流动及麻雀III导弹的超音速流动的算例结果表明本方法的有效性。

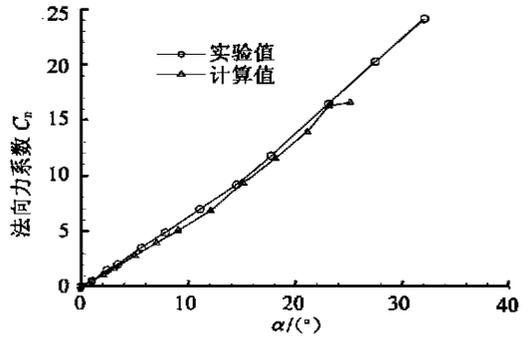


图 14 麻雀III导弹的法向力系数($Ma = 2.0$)

Fig 14 Calculated results and experimental data of normal force coefficient ($Ma = 2.0$)

参考文献

- [1] Liu M S, Sterren C J. A new flux splitting scheme[J]. Journal of Computational Physics, 1993, 107: 23- 29.
- [2] Liu M S. Progress towards an improved CFD method: AUSM⁺ [R]. AIAA 95-1701, 1995.
- [3] 王平, 朱自强, 吕晓斌. 二维非结构网格自适应多重网格的 Euler 方程解[J]. 计算物理, 2000, 17(5): 497- 503.
- [4] 王平, 朱自强, 吕晓斌. 迎风格式在二维非结构网格中的应用[J]. 北京航空航天大学学报, 2000, 26(5): 588- 591.
- [5] Lohner R, Parikh P. Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing-front method[J]. Int J For Numerical Methods in Fluids, 1988, 8: 1135- 1149.
- [6] 孙少鹏, 杨生. 非结构网格生成技术的研究[J]. 空气动力学学报, 1996, 14(1): 19- 25.
- [7] Nakahashi K, Sharov D. Direct surface triangulation using the advancing front method[R]. AIAA 95-1686, 1995.
- [8] Baker T J. Unstructured meshes and surface fidelity for complex shapes[R]. AIAA 91-1591, 1991.
- [9] Pirzadeh S. Structured background grids for generation of unstructured grids by advancing-front method[J]. AIAA Journal, 1993, 31(2): 257- 265.
- [10] 王平, 朱自强. 二维非结构网格的生成及其 Euler 方程解[J]. 北京航空航天大学学报, 2000, 26(2): 190- 193.
- [11] Frink N T. Upwind scheme for solving the Euler equations on unstructured tetrahedral meshes[J]. AIAA Journal, 1992, 30(1): 70- 77.
- [12] Frink N T, Parikh P, Pirzadeh S. A fast upwind solver for the Euler equations on three-dimensional unstructured meshes[R]. AIAA 91-0102, 1991.
- [13] Schmitt V, Charpin F. Pressure distributions on the ONERA M6 wing at transonic Mach number[R]. AGARD Advisory Report 138, 1979.
- [14] Monta W J. Supersonic aerodynamic characteristics of a Sparrow III type missile model with wing controls and comparison with existing tail-control results [R]. NASA TP1078, 1977.

作者简介:

王平 (1972-) 男, 博士生, 主要从事非结构网格生成和流场计算及直升机场流计算。

(责任编辑: 吴小勇)