第23卷 第3期 航 空 学 报 Vol. 23 No. 3
2002年 5月 ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA May 2002

文章编号: 1000-6893(2002)03-0252-03

具有独立失效模式的多自由度非线性振动系统的可靠性分析

张义民[1], 闻邦椿[2]
(1. 吉林大学 南岭校区力学系, 吉林 长春 130025)
(2. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110006)

RELIABILITY ANALYSIS OF MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM NONLINEAR VIBRATION SYSTEMS WITH INDEPENDENCE FAILURE MODES

ZHANG Yi-min[1], WEN Bang-chun[2]
(1. Department of Mechanics, Jilin University, Changchun 130025, China)
(2. School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang 110006, China)

摘 要: 对不考虑失效模式相关性的多自由度非线性随机振动系统可靠性进行了研究。在结构系统响应和状态函数的前四阶矩的一般数学表达式的基础上, 使用 Edgeworth 级数把未知响应和状态函数的概率分布展开成标准的正态分布表达式, 并放松了对随机参数的分布概型和激励类型的限制, 从而确定了系统的可靠度。

关键词: 随机参数; 多自由度非线性振动系统; 可靠度; 四阶矩技术; Edgeworth 级数
中图分类号: O322; V215.7 **文献标识码**: A

Abstract: The reliability analysis of uncertain multi-degree-of-freedom nonlinear vibration systems with independence failure modes subjected to random excitation is examined. A statistical fourth-moment method is developed to determine the first four moments of the system response and state function. The distribution function of the system response and state function is approximately determined by the standard normal distribution functions using Edgeworth series, and its reliability is obtained.

Key words: random parameters; multi-degree-of-freedom nonlinear vibration systems; reliability; statistical fourth-moment method; Edgeworth series

由于结构所承受的载荷带有随机变化的性质, 而结构参数的数值也具有分散性(如材料、几何等特性具有固有的随机性), 这样就导致了具有随机参数的承受随机载荷的随机结构系统。虽然随机结构系统要远比确定结构系统复杂, 但是近30年来, 以二阶矩法和随机有限元法为主体的随机结构可靠性的研究已取得了可观的成果。但是关于具有随机参数的非线性振动系统的可靠性问题的研究还多见于单自由度系统[1]。本文给出了在随机参数的联合概率密度函数未知的情况下随机多自由度非线性振动系统可靠性分析方法, 应用2D矩阵值函数的概率摄动法和四阶矩技术, 导出了多自由度非线性系统响应和状态函数的前四阶矩, 使用 Edgeworth 级数把未知响应和状态函数的概率分布展开成标准的正态分布表达式, 从而确定了多自由度非线性随机结构振动系统的可靠度。而在随机参数前四阶矩已知的情况下, 本文方法放松了对随机参数的分布概型和随机激励的类型的限制, 使之更接近于工程实际中的非线性随机振动系统的首次超限破坏问题, 较好地解决了具有独立失效模式的多自由度非线性随机振动系统的可靠性问题。

1 振动系统随机响应的二维矩阵函数公式

随机结构系统的非线性运动方程可以表示为

$$M(B)\ddot{x}(B,t) + f(B,x,\dot{x}) = F(B,t) \qquad (1)$$

式中: M, f, x 和 F 分别为广义质量矩阵、非线性函数向量、位移向量和外力向量; 上标“·”代表对时间 t 的导数; $B=(b_{ij})_{s\times t}$ 为用以描述概率影响的 $s\times t$ 阶的随机参数矩阵, 其中包含随机载荷参数和随机结构参数, 这些随机参数的概率统计特性是已知的。

若向量 $A\,(p\times 1)$ 为矩阵 $B\,(s\times t)$ 的函数, 则 A 在标称值 $\bar{B}$ 处的二阶 Taylor 表达式为[2]

$$A(B) = A(\bar{B}) + \frac{\partial A}{\partial (csB)^{T}}\Big|_{B=\bar{B}} d[cs(B)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial (csB)^{T2}}\Big|_{B=\bar{B}} \{d[cs(B)]\}^{[2]} \qquad (2)$$

收稿日期: 2001-06-07; **修订日期**: 2001-07-24
基金项目: 国家自然科学基金(19990510, 50175043)、973项目(1998020320)、教育部高等学校骨干教师资助计划和吉林省科技发展计划(19990501-01)资助项目
文章网址: http://www.hkxb.net.cn/hkxb/2002/03/0252/

式中: $d[cs(B)]^{[2]} = d[cs(B)] \otimes d[cs(B)]$ 为 $d[cs(B)]$ 的二阶 Kronecker 幂, 符号 $\otimes$ 代表 Kronecker 积; 定义为 $(A)_{p\times q} \otimes (B)_{s\times t} = [a_{ij}B]_{ps\times qt}$; $cs(B)$ 定义为 $\underset{(st\times1)}{cs}(B) = \sum_{j=1}^{s} (\underset{(s)}{e}^{j} \otimes I_s) B \underset{(s)}{e}^{j}$, $\underset{(s)}{e}_k$ 为在 k 是 1, 在其它处为 0 的 s 维单位向量; I_s 为 $s \times s$ 阶单位矩阵; 矩阵导数定义为 $\partial A / \partial B = (\partial A / \partial b_{ij})_{ps\times qt}$。

为了推导非线性结构动力学的一般随机有限元法的矩阵方程, 把方程(1)两边在 $\bar{B}$ 附近展开成二阶 Taylor 表达式, 然后合并同阶顶, 可以得到与方程(1)相一致的零阶、一阶和二阶方程, 求解这些方程, 可以得到动力响应的前四阶矩为

$$E(x) = \bar{x} + \bar{x}_2 \tag{3}$$

$$Var(x) = \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial (cs\bar{B})^T}\right]^{[2]} [Var(csB)] \tag{4}$$

$$Tm(x) = \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial (cs\bar{B})^T}\right]^{[3]} [Tm(csB)] \tag{5}$$

$$Fm(x) = \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial (cs\bar{B})^T}\right]^{[4]} [Fm(csB)] \tag{6}$$

式中: $E(csB)$, $Var(csB)$, $Tm(csB)$, $Fm(csB)$ 和 $E(x)$, $Var(x)$, $Tm(x)$, $Fm(x)$ 分别代表基本随机变量和响应的均值、方差、三阶矩、四阶矩; $\bar{x}$ 和 $\bar{x}_2$ 分别为零阶和二阶方程的解; $\partial \bar{x} / \partial (cs\bar{B})^T$ 为响应向量的灵敏度矩阵, 可以表示为

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial (cs\bar{B})^T} = \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial b_{11}} \cdots \frac{\partial \bar{x}}{\partial b_{s1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}}{\partial b_{1t}} \cdots \frac{\partial \bar{x}}{\partial b_{st}}\right] \tag{7}$$

把方程(7)分别代入方程(4)～式(6), 就可以得到动力响应的方差、三阶矩和四阶矩矩阵。显然可见, 在求动力响应的方差、三阶矩和四阶矩时, 这里只涉及响应的一阶灵敏度, 给解决工程实际问题带来了相当的方便; 当然, 如果取高阶矩为一阶以上的精度, 会带来数学上的繁琐。依据以上推导过程, 发展了国际上通用的概率摄动法和随机有限元法, 得到了 2D 矩阵值函数的概率摄动法和随机有限元法[3～5]。

2　系统的可靠性分析

可靠性分析的一个基本问题是计算结构系统可靠度的多重积分, 即

$$R = \int_{g(G,z)>0} f_z(z)\,dz \tag{8}$$

式中: $f_z(z)$ 为随机变量向量 z 的联合概率密度函数; G 是 z 的槛值。$g(G,z)$ 为状态函数, 可以表示系统的两种状态

$$\left.\begin{array}{ll} g(G,z) \le 0 & \text{为失败状态} \\ g(G,z) > 0 & \text{为安全状态} \end{array}\right\} \tag{9}$$

式中: $g(G,z) = 0$ 为极限状态方程, 代表极限状态表面, 也就是失败面。

根据状态函数的定义, 由于不考虑失效模式相关性, 多自由度非线性随机振动系统可靠性分析就成为与单个失效模式相同的情形, 其首次超限破坏问题定义为

$$g_i(G_i, x_i) = |G_i| - |x_i| \tag{10}$$

式中: 响应 x 和门槛值 G 为相互独立的随机变量, 由此可以确定出状态函数 $g(G,x)$ 的前四阶矩为

$$E[g_i(G_i, x_i)] = E|G_i| - E|x_i| \tag{11}$$

$$Var[g_i(G_i, x_i)] = Var(G_i) + Var(x_i) \tag{12}$$

$$Tm(g_i) = \begin{cases} Tm(G_i) - Tm(x_i) & G_i, x_i > 0 \\ Tm(x_i) - Tm(G_i) & G_i, x_i \le 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$Fm(g_i) = Fm(G_i) + Fm(x_i) + 6Var(G_i)Var(x_i) \tag{14}$$

可靠性指标定义为

$$\beta_i = \frac{E(g_i)}{\sqrt{Var(g_i)}} \tag{15}$$

在非线性系统中, 不论输入如何, 都很难确定响应和状态函数的分布概型, 由此很难得到系统的可靠度, 根据 Edgeworth 级数方法, 可以把服从任意分布的标准化了的随机变量的概率分布函数近似地展开成标准正态分布函数[6], 即

$$F(y) = \Phi(y) - \frac{\alpha_1}{3!}\Phi^{(3)}(y) - \frac{\alpha_2 - 3}{4!}\Phi^{(4)}(y) - \frac{10\alpha_1^2}{6!}\Phi^{(6)}(y) \tag{16}$$

式中: $\Phi(\ )$ 为标准正态分布函数; α_1 为偏态系数; α_2 为峰态系数; $\Phi^{(i)}(\ )$ 为第 i 阶微分。据此系统可靠度为

$$R_i = P[g_i(G_i, x_i) > 0] = F(\beta_i) \tag{17}$$

用上式计算可靠度时, 有时会出现 $R_i > 1$ 的情况。当 $R_i > 1$ 时, 采用下述经验公式进行修正

$$R_i^* = F^*(\beta_i) = F(\beta_i) - \frac{F(\beta_i) - \Phi(\beta_i)}{\{1 + [F(\beta_i) - \Phi(\beta_i)]\beta_i\}^{\beta_i}} \tag{18}$$

Edgeworth 级数可以任意精确地逼近随机变量的真实分布, 但通常取级数的前 4 项即可得到较好的近似。据此给出了在不考虑失效模式间相关性的情况下具有随机参数的多自由度非线性随

机振动系统的可靠度计算的数值公式。在推导过程中,对随机参数的分布概型和激励类型没有作任何限制,使之更接近于工程实际。

3 数值算例

如图 1 所示的 2 个自由度非线性体系包装箱,箱体受到随时间变化的水平加速度

$$\ddot{y}(t) = 0.25t\,(\mathrm{cm}/\mathrm{s}^2) \qquad 0 \le t < 1$$

$$\ddot{y}(t) = 0.25(2 - t)\,(\mathrm{cm}/\mathrm{s}^2) \qquad 1 \le t < 2$$

$$\ddot{y}(t) = 0 \qquad \text{其它}$$

作用,在质量 m_2 与箱壁间的允许间隙为 G,以保证由于弹簧的变形而不致于碰撞。

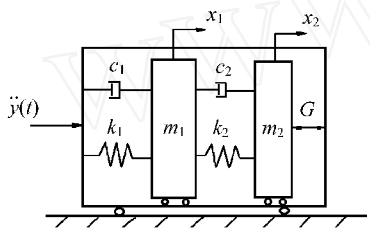

图 1 系统模型

Fig. 1 System model

系统振动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}_\epsilon(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) = \mathbf{F}(t)$$

式中:

$$\mathbf{K}_\epsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\epsilon 1} & \mathbf{K}_{\epsilon 2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

其中:

$$\mathbf{K}_{\epsilon 1} = [k_1 + k_2,\ -k_2,\ -k_2,\ k_2,\ -k_2,\ k_2,\ k_2,\ -k_2]$$

$$\mathbf{K}_{\epsilon 2} = [-k_2,\ k_2,\ k_2,\ -k_2,\ k_2,\ -k_2,\ -k_2,\ k_2]$$

这里假定质量 m_1, m_2 和 c_1, c_2 为确定参数,其数值为 $m_1 = 2\mathrm{kg}$, $m_2 = 1\mathrm{kg}$ 和 $c_1 = c_2 = 75\mathrm{N \cdot s/cm}$ 随机弹性刚度 k_1 和 k_2 分别服从方差系数为 0.05 的正态分布,其均值分别为 75N/cm。间隙 G 的前 4 阶矩分别为

$$E(G) = 0.152\ (\mathrm{cm}),$$

$$\mathrm{Var}(G) = 3.92 \times 10^{-4}\,(\mathrm{cm}^2),$$

$$\mathrm{Tm}(G) = 1.17 \times 10^{-2}\,(\mathrm{cm}^3),$$

$$\mathrm{Fm}(G) = 6.9 \times 10^{-3}\,(\mathrm{cm}^4)$$

随机参数矩阵 $\mathbf{B} = [k_1,\ k_2,\ G]^{\mathrm{T}}$。

分别取 $\epsilon = 0.3$ 和 $\epsilon = 0.5$ 计算出系统的可靠度随时间变化的曲线(见图 2)。

本例题只给出了间隙的前 4 阶矩,而没有给出其分布概型,就计算出了系统的可靠度函数随时间的变化曲线,这对工程实际有着十分重要的意义,因为在工程实际中,很难有足够的资料确定出随机参数的分布概型。

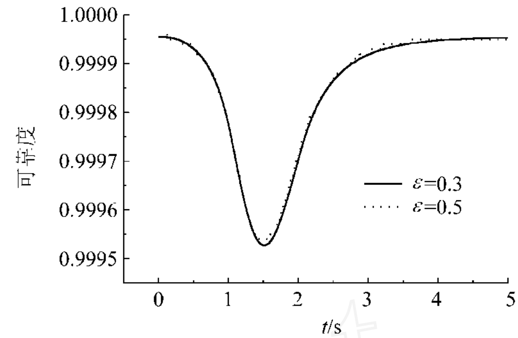

图 2 系统可靠度曲线

Fig. 2 Reliability curves

参 考 文 献

[1] Zhang Y M, Wen B C, Liu Q L. First passage of uncertain single degree-of-freedom nonlinear oscillators[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 165(4): 223-231.

[2] Vetter W J. Matrix calculus operations and Taylor expansions[J]. SIAM Review, 1973, 15: 352-369.

[3] Zhang Y M, Chen S H, Liu Q L, *et al*. Stochastic perturbation finite elements[J]. Computers & Structures, 1996, 59(3): 425-429.

[4] Zhang Y M, Wen B C, Chen S H. PFEM formalism in Kronecker notation[J]. Mathematics and Mechanics of Solids, 1996, 1(4): 445-461.

[5] Wen B C, Zhang Y M, Liu Q L. Response of uncertain nonlinear vibration systems with 2D matrix functions[J]. Int J Nonlinear Dynamics, 1998, 15(2): 179-190.

[6] Cramer H. Mathematical methods of statistics[M]. New Jersey: Princeton University Press, 1964.

作者简介:

张义民(1958-) 男,吉林长春人,吉林大学教授,博士生导师,工学博士,1982 年毕业于吉林工业大学力学专业,主要从事随机结构振动与可靠性、汽车零部件可靠性设计、多体系统动力学、转子动力学等方面的研究。

闻邦椿(1930-) 男,浙江温岭人,中国科学院院士,东北大学教授,博士生导师。主要从事机械动力学、工程机械、振动利用工程学、转子动力学、机械系统非线性振动理论及应用、机械故障的振动诊断、机电一体化等方面的研究。

(责任编辑: 李铁柏)