第 24 卷　第 1 期　　航　空　学　报　　Vol. 24 No. 1
2003 年　　1 月　　ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA　　Jan.　2003

**文章编号**:1000-6893(2003)01-0084-06

# 偏置式 Delta 并联机构的运动学分析

毕树生, 宗光华

(北京航空航天大学 机械工程及自动化学院, 北京　100083)

## Kinematics of Delta Parallel Mechanism with Offsets

BI Shu-sheng, ZONG Guang-hua

(Institute of Mechanical Engineering and Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing　100083, China)

**摘　要**: 具有 3 个平移自由度的 Delta 并联机构因所有运动副均采用转动铰链而愈来愈引起研究者的重视。偏置量的存在虽降低了加工、制造、装配的难度,但其运动学分析的难度大大增加。本文利用消元法对偏置式 Delta 并联机构的正逆运动学进行了深入分析,求出了所有数值解。并采用几何图解法验证了位置正逆解的正确性。在运动学分析过程中引入了矢量分析,使得消元法求解过程十分简便。通过偏置式 Delta 并联机构的运动学分析可以证明,某些观点并不准确。

**关键词**: 运动学分析; 并联机构; 消元法; 几何图解法

**中图分类号**:TP242　　　**文献标识码**:A

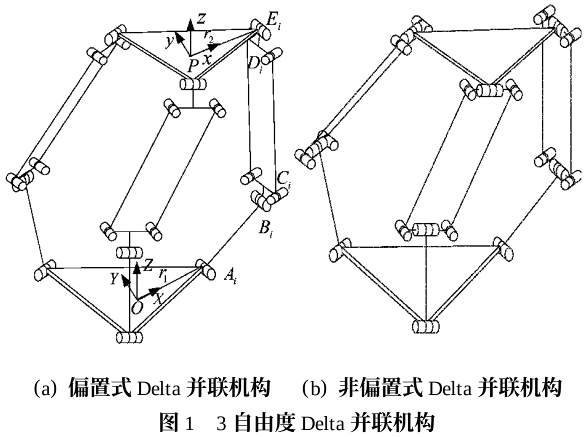
**Abstract**: Delta parallel mechanism has attracted more attention since it has 3 translational degrees of freedom and employs only revolute joints. The existence of offsets has made it easy to manufacture at low cost. However, it increased the difficulty of kinematic analysis. A closed-form solution of both forward and reverse kinematics for the 3 DOF Delta parallel mechanism with offsets is developed by applying the dialytic method of elimination in this study. A geometric analysis method is also applied to confirm the results. It is shown geometrically that there are 14 real solutions to the forward kinematics problem on condition that all legs are symmetrical and the links length of each leg is the same. Application of the vector operation simplified the course of kinematic analysis. Finally, some inaccurate points of view are also indicated in this paper.

**Key words**: kinematic analysis; parallel mechanism; dialytic method of elimination; geometric analysis method

Delta 并联机构的概念是 R. Clavel[1]于 1988 年最早提出的。第 1 台 Delta 并联机构具有 4 个自由度,由基平台、运动平台及 4 条运动支链构成。若将该 4 自由度 Delta 并联机构中间的 1 条运动支链去掉,就演变成了 3 自由度平动 Delta 并联机构。

上述两种机构的最大缺点是存在多个球铰,加工难度较大,精度难以保证。L. W. Tsai[2~4]于 1995 年发明了一种较简单的 3 自由度 Delta 并联机构。它分为非偏置式和偏置式两种类型(见图 1)。该机构的最大特点是它具有 3 个移动自由度,各运动副均是转动副,工作空间大,定位精度高,累积误差小,刚度高,驱动器可以安装在机架上。因此,图 1 所示的 Delta 并联机构在微电子装配、细胞显微操作、光纤对接等精密操作领域有广阔的应用前景。

本文利用消元法进行偏置式 Delta 并联机构的运动学分析,并利用几何图解法对 Delta 并联机构的正逆运动学问题进行补充说明。




(a) 偏置式 Delta 并联机构　(b) 非偏置式 Delta 并联机构

图 1　3 自由度 Delta 并联机构

Fig. 1　Schematic of the 3 DOF Delta parallel mechanism

## 1　偏置式 Delta 并联机构的运动支链描述

图 1(a) 所示的偏置式 Delta 并联机构由运动平台、基平台及连接两个平台的 3 个分支组成。

**收稿日期**:2002-01-21; **修订日期**:2002-05-30
**基金项目**:国家自然科学基金资助项目(59975002)
**文章网址**:http://www.hkxb.net.cn/hkxb/2003/01/0084/

各个分支均由 3 个相互平行但不共面的转动副及 1 个平行四边形机构连接而成。

不失一般性,取 Delta 并联机构的 1 个分支,见图 2。参考坐标系 $O\text{-}XYZ$ 的坐标原点设在固定平台的中心 $O$ 处,$Z$ 轴沿平台平面的法线方向并指向运动平台,$X$ 轴沿 $OA_i$ 方向,$Y$ 轴方向由右手坐标系确定。运动平台的中心为 $P$,其坐标值为$(x,y,z)$。

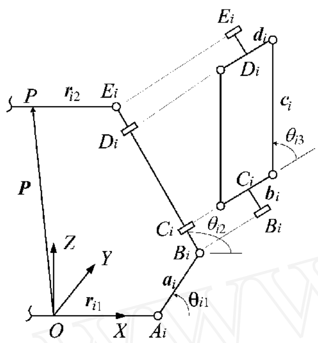



图 2　运动支链的描述

Fig. 2　Depiction of the joint angles and link lengths for leg $i$

该机构的基平台和运动平台皆为等边三角形,其外接圆的半径分别 $r_1$ 是 $r_2$。3 个前臂长 $A_iB_i(i=1,2,3)$ 均为 $a$;偏置 $B_iC_i(i=1,2,3)$ 的长度为 $b$;平行四边形的等效长度 $C_iD_i(i=1,2,3)$ 为 $c$;偏置 $D_iE_i(i=1,2,3)$ 的长度为 $d$。

## 2　析配消元法

### 2.1　偏置式 Delta 并联机构的位置反解

已知运动平台中心点 $P$ 的位置$(x,y,z)$,求解输入构件 $A_iB_i$ 的角度$\theta_{i1}(i=1,2,3$,下同),即是偏置式 Delta 并联机构的位置反解。

从图 2 中可以看出

$$\mathrm{P}+\mathrm{r}_{i2}=\mathrm{r}_{i1}+\mathrm{a}_i+\mathrm{b}_i+\mathrm{c}_i+\mathrm{d}_i \tag{1}$$

式(1)可转换成

$$\|\mathrm{P}+\mathrm{r}_{i2}-\mathrm{r}_{i1}-\mathrm{a}_i\|=\|\mathrm{b}_i+\mathrm{c}_i+\mathrm{d}_i\| \tag{2}$$

式中:$\mathrm{P}$ 是上平台中心在基坐标系内的位置矢量,$\mathrm{P}=[x,y,z]^{\mathrm{T}}$;$\mathrm{r}_{i2}$, $\mathrm{r}_{i1}$ 分别是运动平台与基平台的半径矢量,$\mathrm{r}_{i2}=[r_2\cos\phi_i,r_2\sin\phi_i,0]^{\mathrm{T}}$,$\mathrm{r}_{i1}=[r_1\cos\phi_i,r_1\sin\phi_i,0]^{\mathrm{T}}$;$\phi_i$ 为 $OA_i$ 与基坐标系 $X$ 轴的夹角;$\mathrm{a}_i$, $\mathrm{b}_i$, $\mathrm{c}_i$, $\mathrm{d}_i$ 分别是杆 $A_iB_i$, $B_iC_i$, $C_iD_i$, $D_iE_i$ 在基坐标系中的长度矢量,

$$\mathrm{a}_i=[a\cos\theta_{i1}\cos\phi_i,a\cos\theta_{i1}\sin\phi_i,a\sin\theta_{i1}]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathrm{b}_i=[b\cos\theta_{i2}\cos\phi_i,b\cos\theta_{i2}\sin\phi_i,b\sin\theta_{i2}]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathrm{c}_i=[c(\sin\theta_{i3}\cos\theta_{i2}\cos\phi_i-\cos\theta_{i3}\sin\phi_i),\ c(\sin\theta_{i3}\cos\theta_{i2}\sin\phi_i+\cos\theta_{i3}\cos\phi_i),\ c\sin\theta_{i3}\sin\theta_{i2}]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{d}_i=[d\cos\theta_{i2}\cos\phi_i,d\cos\theta_{i2}\sin\phi_i,d\sin\theta_{i2}]^{\mathrm{T}};$$

展开式(2)得

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-2(r_1-r_2)x\cos\phi_i-2ax\cos\theta_{i1}\cos\phi_i\\&-2(r_1-r_2)y\sin\phi_i-2ay\cos\theta_{i1}\sin\phi_i-2az\sin\theta_{i1}\\&+2(r_1-r_2)a\cos\theta_{i1}+a^2+(r_1-r_2)^2=\\&(b+d)^2+c^2+2(b+d)c\sin\theta_{i3}\end{aligned} \tag{3}$$

要找出$(x,y,z)$与 $\theta_{i1}$ 之间的关系,必须将上式中的 $\theta_{i3}$ 消去。设 $\mu_i$ 为转动副 $A_i$ 的轴心线方向单位矢量,$\mu_i=[-\sin\phi_i,\cos\phi_i,0]^{\mathrm{T}}$。将式(1)两边各点乘 $\mu_i^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned}\mu_i^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{P}+\mu_i^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{r}_{i2}&=\mu_i^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{r}_{i1}+\mu_i^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{a}_i+\\&\mu_i^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{b}_i+\mu_i^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{c}_i+\mu_i^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}_i\end{aligned} \tag{4}$$

因 $\mu_i^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{r}_{i2}=0$,$\mu_i^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{r}_{i1}=0$,$\mu_i^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{a}_i=0$,$\mu_i^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{b}_i=0$,$\mu_i^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}_i=0$。则式(4)变成

$$\mu_i^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{P}=\mu_i^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{c}_i \tag{5}$$

展开式(5)并整理成

$$-x\sin\phi_i+y\cos\phi_i=c\cos\theta_{i3} \tag{6}$$

将式(6)代入式(3),并令(假设 $\theta_{i1}\neq\pm\pi$)

$$\sin\theta_{i1}=\frac{2t_{i1}}{1+t_{i1}^2}\qquad\cos\theta_{i1}=\frac{1-t_{i1}^2}{1+t_{i1}^2}$$

可得

$$n_{i1}t_{i1}^2+n_{i2}t_{i1}+n_{i3}=0 \tag{7}$$

其中系数 $n_{i1}$, $n_{i2}$, $n_{i3}$是 $x$, $y$, $z$, $\theta_{i3}$, $\phi_i$ 及各结构参数的函数,而 $\theta_{i3}$可通过式(6)求得

$$c\sin\theta_{i3}=\pm\sqrt{c^2-(y\cos\phi_i-x\sin\phi_i)^2}$$

式(7)为一元二次方程,最多只对应 2 个值,即

$$t_{i1}=\frac{-n_{i2}\pm\sqrt{n_{i2}^2-4n_{i1}n_{i3}}}{2n_{i1}} \tag{8}$$

所以

$$\theta_{i1}=2\arctan\left(\frac{-n_{i2}\pm\sqrt{n_{i2}^2-4n_{i1}n_{i3}}}{2n_{i1}}\right) \tag{9}$$

上式等号右边的各个参数均为已知。当微操作机构的末端输出确定时,关节角 $\theta_{i3}$有 2 个取值,而每一个 $\theta_{i3}$对应 2 个 $\theta_{i1}$值,所以当末端位置$(x,y,z)$已知时,$\theta_{i1}$有 4 个值。

若 Delta 并联机构的偏置量为零,即 $b=d=0$,位置反解步骤一样,只不过系数 $n_{i1}$, $n_{i2}$, $n_{i3}$ 与 $\theta_{i3}$无关,所以当末端位置$(x,y,z)$已知时,$\theta_{i1}$只有 2 个值。

## 2.2 Delta 并联机构的位置正解

已知输入构件 $A_iB_i$ 的角度 $\theta_{i1}(i=1,2,3$,下同),求解运动平台中心点 $P$ 的位置 $(x,y,z)$,即是 Delta 并联机构的位置正解。

对于式(6),若令 $i=1$,且 $\phi_1=0°$,则可变为下列形式

$$y=c\cos\theta_{13} \tag{10}$$

对于式(6),若令 $i=2$,且将式(10)代入式(6),则可得

$$x=\frac{c}{\sin\phi_2}(\cos\theta_{13}\cos\phi_2-\cos\theta_{23}) \tag{11}$$

当 $i$ 分别等于 1,2,3 时,式(3)可以化为 3 个式子。$i=1$ 时的式子减去 $i=2$ 时的式子,$i=1$ 时的式子减去 $i=3$ 时的式子,得到下列两式

$$k_1x+k_2y+k_3z+k_4\sin\theta_{13}-k_4\sin\theta_{23}+k_5=0 \tag{12}$$

$$k_6x+k_7y+k_8z+k_4\sin\theta_{13}-k_4\sin\theta_{33}+k_9=0 \tag{13}$$

将式(10)(11)代入(12)可求出 $z$

$$z=k_{10}\cos\theta_{13}+k_{11}\sin\theta_{13}+k_{12}\cos\theta_{23}-k_{11}\sin\theta_{23}+k_{13} \tag{14}$$

从式(10),式(11),式(14)可以看出,$x,y,z$ 均是角度 $\theta_{13}$ 与 $\theta_{23}$ 的函数,如果能求出角度 $\theta_{13}$,$\theta_{23}$ 与输入角 $\theta_{11},\theta_{21},\theta_{31}$ 之间的关系式,偏置式 Delta 并联机构的正运动学问题便迎刃而解。

将式(10),式(11),式(14)代入式(13)得

$$k_{14}\sin\theta_{13}+k_{15}\cos\theta_{13}+k_{16}\sin\theta_{23}+k_{17}\cos\theta_{23}-k_4\sin\theta_{33}+k_{18}=0 \tag{15}$$

当 $i=3$ 时,将式(10),式(11)代入式(6)得

$$k_{19}\cos\theta_{13}+k_{20}\cos\theta_{23}+\cos\theta_{33}=0 \tag{16}$$

从式(15)和式(16)中消去 $\theta_{33}$ 得

$$\begin{aligned}&k_{21}\sin^2\theta_{13}+k_{22}\cos^2\theta_{13}+k_{23}\sin^2\theta_{23}+\\&k_{24}\cos^2\theta_{23}+k_{25}\sin\theta_{13}\cos\theta_{13}+\\&k_{26}\sin\theta_{13}\sin\theta_{23}+k_{27}\sin\theta_{13}\cos\theta_{23}+\\&k_{28}\cos\theta_{13}\sin\theta_{23}+k_{29}\cos\theta_{13}\cos\theta_{23}+\\&k_{30}\sin\theta_{23}\cos\theta_{23}+k_{31}\sin\theta_{13}+k_{32}\cos\theta_{13}+\\&k_{33}\sin\theta_{23}+k_{34}\cos\theta_{23}+k_{35}=0\end{aligned} \tag{17}$$

当 $i=1$ 时,将式(10),式(11),式(14)代入式(3)得

$$\begin{aligned}&k_{36}\sin^2\theta_{13}+k_{37}\cos^2\theta_{13}+k_{36}\sin^2\theta_{23}+\\&k_{38}\cos^2\theta_{23}+k_{39}\sin\theta_{13}\cos\theta_{13}+k_{40}\sin\theta_{13}\sin\theta_{23}+\\&k_{41}\sin\theta_{13}\cos\theta_{23}-k_{39}\cos\theta_{13}\sin\theta_{23}+\\&k_{42}\cos\theta_{13}\cos\theta_{23}-k_{41}\sin\theta_{23}\cos\theta_{23}+k_{43}\sin\theta_{13}+\\&k_{44}\cos\theta_{13}+k_{45}\sin\theta_{23}+k_{46}\cos\theta_{23}+k_{47}=0\end{aligned} \tag{18}$$

上面式(12)~式(18)中,系数 $k_j(j=1,2,\cdots,47)$ 是各结构参数及输入角 $\theta_{i1}(i=1,2,3)$ 的函数。

令 $\sin\theta_{13}=\dfrac{2w_{13}}{1+w_{13}^2},\cos\theta_{13}=\dfrac{1-w_{13}^2}{1+w_{13}^2}$

$\sin\theta_{23}=\dfrac{2w_{23}}{1+w_{23}^2},\cos\theta_{23}=\dfrac{1-w_{23}^2}{1+w_{23}^2}$

则式(17),式(18)变换成下列两个方程

$$m_1w_{23}^4+m_2w_{23}^3+m_3w_{23}^2+m_4w_{23}+m_5=0 \tag{19}$$

$$m_6w_{23}^4+m_7w_{23}^3+m_8w_{23}^2+m_9w_{23}+m_{10}=0 \tag{20}$$

式(19),式(20)中,各系数 $m_q(q=1,2,\cdots,10)$ 仅是关于 $w_{13}$ 的不高于 4 次的函数。用 $w_{23}$,$w_{23}^2$,$w_{23}^3$ 分别乘以式(19),式(20),共得 6 个附加方程,连同式(19),式(20)共有 8 个方程,写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}m_5&m_4&m_3&m_2&m_1&0&0&0\\m_{10}&m_9&m_8&m_7&m_6&0&0&0\\0&m_5&m_4&m_3&m_2&m_1&0&0\\0&m_{10}&m_9&m_8&m_7&m_6&0&0\\0&0&m_5&m_4&m_3&m_2&m_1&0\\0&0&m_{10}&m_9&m_8&m_7&m_6&0\\0&0&0&m_5&m_4&m_3&m_2&m_1\\0&0&0&m_{10}&m_9&m_8&m_7&m_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\w_{23}\\w_{23}^2\\w_{23}^3\\w_{23}^4\\w_{23}^5\\w_{23}^6\\w_{23}^7\end{bmatrix}=0 \tag{21}$$

由于 $\{1\quad w_{23}\quad w_{23}^2\quad w_{23}^3\quad w_{23}^4\quad w_{23}^5\quad w_{23}^6\quad w_{23}^7\}^{\mathrm T}\neq0$,所以这个齐次方程组有非零解的充分必要条件是其系数行列式等于零。

$$\begin{vmatrix}m_5&m_4&m_3&m_2&m_1&0&0&0\\m_{10}&m_9&m_8&m_7&m_6&0&0&0\\0&m_5&m_4&m_3&m_2&m_1&0&0\\0&m_{10}&m_9&m_8&m_7&m_6&0&0\\0&0&m_5&m_4&m_3&m_2&m_1&0\\0&0&m_{10}&m_9&m_8&m_7&m_6&0\\0&0&0&m_5&m_4&m_3&m_2&m_1\\0&0&0&m_{10}&m_9&m_8&m_7&m_6\end{vmatrix}=0 \tag{22}$$

将上式展开,并将 $m_q$ 代入,可得一个关于 $w_{13}$ 的 32 次方程(各项系数是结构参数和输入的函数)。解这个 32 次方程,可得到 $w_{13}$ 的 32 个解。将 $w_{13}$ 代入式(19)或式(20),可解得 $w_{23}$。

由 $w_{13}$ 和 $w_{23}$ 可求得 $\theta_{13}$ 和 $\theta_{23}$,将 $\theta_{13}$ 和 $\theta_{23}$

分别代入(10)、式(11)及式(14)可解得 $x,y$ 及 $z$。

若偏置量为零时,即 $b=d=0$ 时,Delta 并联机构正解变得较为容易。因式(3)中的 $2(b+d)c\sin\theta_{i3}$ 项为零,当 $i$ 分别等于 1,2,3 时,式(3)可化为具有 3 个未知数 $x,y,z$ 的 3 个方程,最高次幂为 2,因此不难解出 $x,y,z$,且有两组解。

### 2.3　正解数值算例

设 Delta 并联机构的各项结构参数及输入角如下: $r_1=8$mm, $r_2=8$mm, $a=40$mm, $b=8$mm, $c=53.28$mm, $d=8$mm, $\phi_1=0°$, $\phi_2=120°$, $\phi_3=240°$, $\theta_{11}=10°$, $\theta_{21}=45°$, $\theta_{31}=35°$。

将上列参数代入式(22)得

$$-0.042w_{13}^{32}+6.974w_{13}^{31}+94.137w_{13}^{30}+304.572w_{13}^{29}+1078.08w_{13}^{28}+2450.892w_{13}^{27}+5124.347w_{13}^{26}+8970.248w_{13}^{25}+13120.189w_{13}^{24}+17926.134w_{13}^{23}+19267.476w_{13}^{22}+19820.727w_{13}^{21}+15158.895w_{13}^{20}+9508.707w_{13}^{19}+3333.059w_{13}^{18}-3268.273w_{13}^{17}-4472.347w_{13}^{16}-7380.902w_{13}^{15}-4248.403w_{13}^{14}-4611.857w_{13}^{13}-1534.351w_{13}^{12}-1645.583w_{13}^{11}-183.003w_{13}^{10}-431.435w_{13}^{9}+69.426w_{13}^{8}-102.383w_{13}^{7}+40.311w_{13}^{6}-22.837w_{13}^{5}+8.912w_{13}^{4}-3.152w_{13}^{3}+0.984w_{13}^{2}-0.092w_{13}-0.005=0 \qquad (23)$$

求解该 $w_{13}$ 的 32 次代数方程,可得 $w_{13}$ 的 32 个解析解。并将 $w_{13}$ 代入式(19)或式(20),可求得 $w_{23}$ 的 32 个解。在所求得 $w_{13}$ 与 $w_{23}$ 的 32 个解析解中有 7 个实解,25 个虚解。由 $w_{13}$ 和 $w_{23}$ 的所有实解值可求得 $\theta_{13}$ 和 $\theta_{23}$,将 $\theta_{13}$ 和 $\theta_{23}$ 分别代入(10),式(11)及式(14)可解得 $x,y$ 及 $z$,见表 1。

**表 1　位置正解数值算例**

**Table 1　Solution for the forward kinematics numerical example**

| $t_{13}$ | $t_{23}$ | $\theta_{13}$ | $\theta_{23}$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 178.85 | 1.73 | 3.13 | 2.09 | 61.5 | 53.28 | -15.28 |
| -9.76 | -1.94 | -2.94 | -2.19 | 65.82 | 52.17 | 49.32 |
| -1.51 | 2.07 | -1.97 | 2.24 | 50.17 | 20.79 | -30.83 |
| -1.21 | -1.92 | -1.76 | -2.18 | 41.07 | 10.04 | 30.78 |
| 0.83 | 0.97 | 1.39 | 1.54 | -7.63 | 9.82 | 0.09 |
| 0.24 | -0.47 | 0.47 | -0.89 | -66.27 | 47.48 | 19.17 |
| 0.22 | -0.48 | 0.43 | -0.9 | -66.37 | 48.36 | 18.76 |

## 3　几何图解分析法

### 3.1　Delta 并联机构位置反解

(1) 偏置量 $b+d\neq0$ 时

如果说运动平台的中心点 $P$ 的位置已知,那么支链与上运动平台连接的转动副中心 $E_i$ 的位置也是可知的。任取一条支链 $i(i=1$ 或 2 或 3),若假设运动支链从 $B_i$ 点断开,当考虑后臂 $E_iD_iC_iB_i$ 的全局运动时,$B_i$ 点的轨迹是一个圆环胎(见图 3),圆环胎的中心为 $E_i$,圆环胎的半径为 $b+d$,圆环胎的圆环半径为 $c$。当前臂 $A_iB_i$ 全局运动时,$B_i$ 点的轨迹将是一个圆,其半径为 $a$,圆心为点 $A_i$。那么位置反解的个数就是圆与圆环胎的交点的个数。从图 4、图 5 中,可以发现可能有 4 种情况出现:

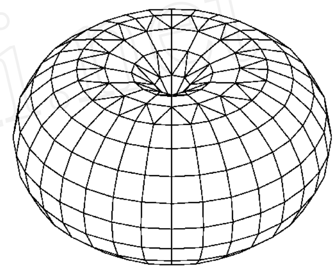


图 3　当上臂做全局运动时 $B_i$ 点的轨迹

Fig. 3　The trajectory of $B_i$ swept by $E_iD_iC_iB_i$

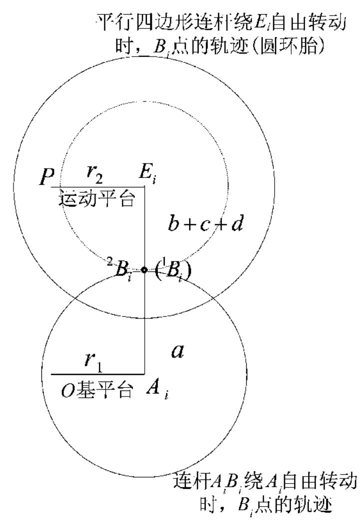



图 4　$B_i$ 点的轨迹与圆环胎的相切

Fig. 4　The trajectory of $B_i$ tangential to the sphere

①圆与圆环胎相切　如图 4 所示,前臂 $A_iB_i$ 上 $B_i$ 点的轨迹圆与圆环胎相切,有唯一交点。对应于式(9) $n_{i2}^2-4n_{i1}n_{i3}=0$,式(9)有唯一解。

②圆与圆环胎相交　如图 5 所示,前臂 $A_iB_i$ 上 $B_i$ 点的轨迹圆与圆环胎相交,共有 4 个交点。对应于式(9)中,$n_{i2}^2-4n_{i1}n_{i3}>0$。由于 $\theta_{i3}$ 有 2 个解,$n_{i1}$,$n_{i3}$ 各有 2 个值,所以 $\theta_{i1}$ 共有 4 个解。

③圆与圆环胎不相交　图 5 中,前臂 $A_iB_i$ 上 $B_i$ 点的轨迹圆与圆环胎无交点。对应于式(9),$n_{i2}^2-4n_{i1}n_{i3}<0$,此时式(9)无解。

④圆与圆环胎重合　图5中,前臂 $A_iB_i$ 上 $B_i$ 点的轨迹圆与圆环胎重合,有无数个交点。对应于式(9),$n_{i1} = n_{i2} = n_{i3} = 0$,$\theta_{i1}$ 有无数个解。这种情况只有在运动平台与基平台同时处于同一平面时才能发生。这显然是不可能的。

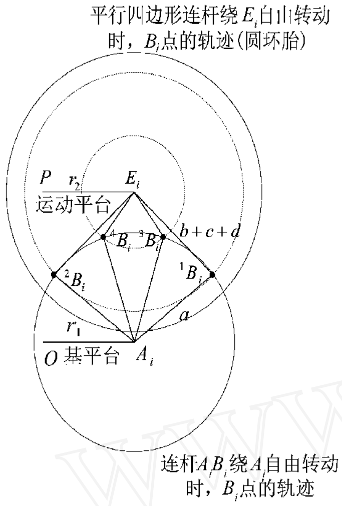



图5　$B_i$ 点的轨迹与圆环胎的相交

Fig. 5　The trajectory of $B_i$ intersecting the sphere

(2) 偏置量 $b + d = 0$ 时

当 $b + d = 0$ 时,Delta 并联机构位置逆解的几何图解分析步骤与 $b + d \neq 0$ 时相同。只不过后臂 $E_iD_iC_iB_i$ 全局运动时,$B_i$ 点的轨迹是一个圆球面而不是圆环胎,前臂 $A_iB_i$ 上 $B_i$ 点的轨迹圆与球面的交点最多为2个,因此 $\theta_{i1}$ 共有2个解。这正好与论文前一部分讨论的结果相吻合。

### 3.2　Delta 并联机构位置正解

(1) 偏置量 $b + d \neq 0$ 时

对于某一条支链来说,如果说给定 $\theta_{i1}$($i = 1$ 或2或3) 值时,$B_i$ 点的位置确定,则运动平台中心点 $P$ 的轨迹是一圆环胎。该圆环胎的中心 $B_i'$ 与 $B_i$ 沿 $E_iP$ 方向相距 $r_2$,半径为 $b + d$,圆环半径为 $c$(见图3)。当 $i = 1,2,3$ 时,$P$ 点必须同时落在3条支链 $P$ 点扫过的圆环胎上(见图6)。这3个圆环胎的交点就代表着正运动学的解。有4种可能:

①圆环胎与另外2个圆环胎的交线相交　交点数就是 $x, y, z$ 实解的个数。理论上讲,交点个数最多时达32个。一般来讲,Delta 并联机构的3条支链呈对称分布,且各支链的结构参数一致。此时3个圆环胎的交点最多为14个(见图7)。因此偏置式 Delta 并联机构最多有14个实解。

②3个圆环胎重合　当3个圆环胎重合时,有无数交点。对应于方程(22),$w_{13}$ 有无数个解。这种情况不可能出现。

③圆环胎与另外2个圆环胎的交线相切　当圆环胎与另外2个圆环胎的交线相切时,只有一个交点,即 $x, y, z$ 只有一组解。对应于方程(22),$w_{13}$ 只有一个实解,其余全是虚解。

④圆环胎之间不相交　圆环胎之间不相交,对应于方程(22),$w_{13}$ 无实解,只有虚解,所以 $x, y, z$ 也没有实解。

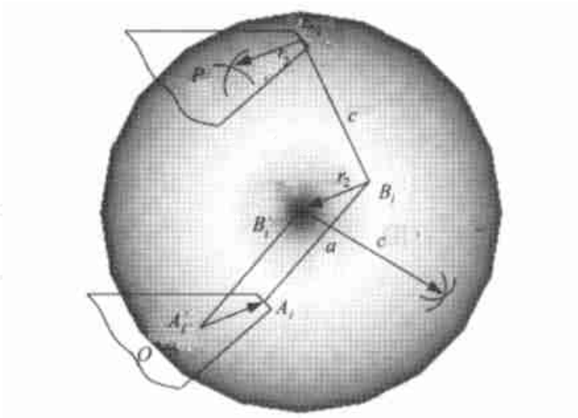



图6　$P$ 点扫过的轨迹(圆环胎或圆球面)

Fig. 6　The torus or sphere created by $P$'s range of motion

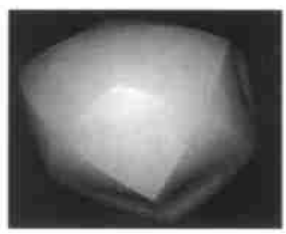


图7　3个圆环胎相交

Fig. 7　The intersection of three tori

(2) 偏置量 $b + d = 0$ 时

当 $b + d = 0$ 时,Delta 并联机构位置正解的几何图解分析步骤与 $b + d \neq 0$ 时相同,只不过运动平台中心点 $P$ 的轨迹是一球面。该圆球面的半径为 $c$,其中心 $B_i'$ 与 $B_i$ 沿 $E_iP$ 方向相距 $r_2$。$P$ 点必须同时落在3条运动支链 $P$ 点扫过的圆球面上(见图6)。这3个圆球面的交点就代表着正运动学的解。也有4种可能:

①圆球面与另外2个圆球面的交线相交　2个球面的交线是一个圆,圆与球面的交点只有2个(见图8)。对应于方程(3),有2组解。这是一般情况。

②3个圆球面重合　如果3个圆球面完全重合,则有无数个交点,对应于方程(3),$x, y, z$ 有无数组解。这种情况只有在 $\theta_{11} = \theta_{21} = \theta_{31} = \dfrac{\pi}{2}$,$r_1 = r_2$ 时才有可能发生。此时机构处于奇异状

图 8　3 个圆球面相交

Fig. 8　The intersection of three spheres

态,应尽量避免该情况的发生。

③圆球面与另外 2 个圆球面的交线相切　2 个球面的交线是一个圆,圆与球面的交点只有一个。对应于方程(3),只有一组解。

④圆球面之间不相交　对应于方程(3),无实解。

## 4　结　论

利用析配消元法和几何图解法对偏置式 Delta 并联机构的位置正反解进行了深入分析,得出的结论是"偏置式 Delta 并联机构与非偏置式的位置正反解有很大差别:当 $b + d \neq 0$ 时,反解较为容易,正解则极为复杂;当 $b + d = 0$ 时,正反解都比较容易"。

这一结论同时证明下列观点并不准确:"Delta 并联机构的偏置大小或有无对机构的运动学性能并无影响"、"对 Delta 机构,其位置正解与其反解的求法一样的简单"、"平动自由度与转动自由度的相互耦合是造成并联机构位置正解十分困难的根本原因。而对于三自由度平动并联机构,不存在平动与转动自由度的耦合现象,因此其位置正解与反解的求法同样简单"。

## 参　考　文　献


[1]　Clavel R. DELTA, a fast robot with parallel geometry[A]. Proc Int Symposium on Industrial Robots[C]. 1988. 91 - 100.

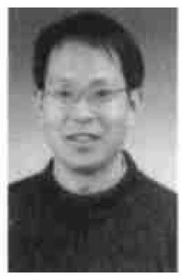
[2]　Tsai L W. Multi-degree-of-freedom mechanism for machine tools and the like[P]. U S Patent Pending, 1995. No. 08/415.

[3]　Tsai L W, Walsh G C, Stamper R E. Kinematics of a novel three DOF translational platform[A]. Proc of the 1996 IEEE Int Conf on Robotics and Automation[C]. Minnesota, 1996. 3446 - 3451.

[4]　Stamper R E, Tsai L W, Walsh G C. Optimization of a three DOF translational platform for well-conditioned workspace [A]. Proc of the 1997 IEEE Int Conf on Robotics and Automation[C]. Minnesota, 1997. 3250 - 3255.



作者简介:



毕树生(1966 - )　男,北京航空航天大学机械工程及自动化学院副教授,博士。主要研究方向为微操作机器人系统、机器人机构学等,完成国家 863 计划项目及国家自然科学基金项目 6 项,发表论文 50 余篇。电话:(010)-82317749,E-mail:bss6613@vip.sina.com

宗光华　男,见《航空学报》2001 年第 3 期 221 页介绍。


(责任编辑:蔡　斐)