

摩擦作用下周期双参变激励齿轮系统 非线性振动响应研究

卫一多 刘 凯 崔亚辉 原 园 张 武
西安理工大学,西安,710048

摘要:研究了周期双参变激励齿轮系统在摩擦作用下的动力学响应,建立了考虑轮齿时变啮合刚度和齿间摩擦的单自由度扭转非线性振动模型,研究了摩擦因子、重合度、惯量比、刚度因子、阻尼因子、载荷分配系数等参数对齿轮系统非线性振动响应的影响。研究表明:摩擦对周期双参变激励齿轮系统非线性振动有重要的影响。

关键词:齿轮;非线性振动;动力学;摩擦

中图分类号: TH132.4

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2012.04.003

Study on Non-linear Response of Gear System with Double Periodic Parametrically under Friction Effect

Wei Yiduo Liu Kai Cui Yahui Yuan Yuan Zhang Wu
Xi'an University of Technology, Xi'an, 710048

Abstract: This paper studied the influences of tooth friction on parametric dynamics response of a single-mesh gear pair. A dynamics rotational model was developed to consider this mechanism together with the other contributions of tooth friction and mesh stiffness fluctuation. The impacts of friction coefficient, contact ratio, inertia ratio, stiffness factor, load share coefficient and model damping on the response and long range response were investigated. The effects of time-varying friction moments about the gear centers are critical to non-linear vibration response.

Key words: gear; non-linear vibration; dynamics; friction

0 引言

齿轮系统的振动和噪声一直以来都是学界研究的重点。近年来,国内外学者以非线性振动理论为基础,以齿轮啮合过程中的时变刚度和齿侧间隙等非线性因素为核心,对齿轮系统的非线性振动进行了研究^[1-3]。研究表明:齿轮摩擦也是齿轮非线性振动的重要影响因素之一。Velex等^[4]分析了直齿和斜齿的摩擦力。Vaishya等^[5]从能量的角度证明了摩擦对齿轮振动性能的影响。He等^[6]研究了实测刚度影响下齿轮摩擦对系统动力学的影响。

本文建立了周期双参变激励齿轮系统非线性振动模型,运用 Floquet-Liapunov 理论,用傅里叶级数将周期齿间摩擦力展开,用解析和数值相结合的方法计算得出:齿轮摩擦对系统的非线性

振动有重要的影响。

1 齿轮摩擦非线性振动模型

齿轮摩擦非线性振动模型如图 1 所示。

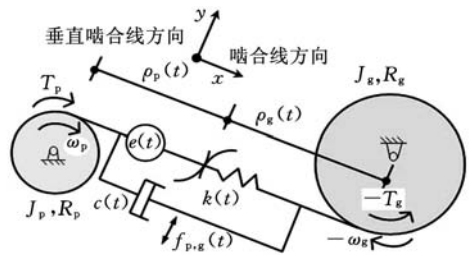


图 1 齿轮摩擦非线性振动模型

1.1 系统参数假设

(1) 载荷分配

$$\left. \begin{aligned} N_1(t) &= \alpha N, N_2(t) = (1-\alpha)N & t \in [0, t_a) \\ N_1(t) &= 0, N_2(t) = N & t \in [t_a, t_c) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, N 为法向载荷, $N = T_p/R_{bp}$, T_p 为主动轮上的力矩, R_{bp} 为主动齿轮的基圆半径; N_1 、 N_2 分别表示啮合齿对 1 号和 2 号的法向载荷; t_a 为单齿啮合最低点的时间; t_c 为单齿啮合最高点的时间; α 为载荷分配因子, $0 \leq \alpha \leq 1$ 。

收稿日期: 2010-12-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51175419); 陕西省“13115”科技创新工程重大科技专项(2008ZDKG-28); 陕西省教育厅科学研究计划资助项目(2010JK742); 西安理工大学博士科研启动基金资助项目(102-210901)

(2) 啮合刚度 $k(t)$

$$\left. \begin{aligned} k(t) &= k_0(1 + \beta(t)) & t \in [0, t_a) \\ \beta(t) &= k_{\max}/k_{\min} - 1 & t \in [0, t_a) \\ \beta(t) &= k_{\min}/k_{\max} - 1 & t \in [t_a, t_c) \\ k_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T k(t) dt = k_{\max}(\Gamma - 1) + k_{\min}(2 - \Gamma) \end{aligned} \right\} (2)$$

式中, k_0 为平均啮合刚度; T 为齿轮的啮合周期; k_{\max} 为双齿啮合刚度; k_{\min} 为单齿啮合刚度; Γ 为齿轮的重合度。

(3) 摩擦因子 μ_0

$$\left. \begin{aligned} \mu_{01} &= \mu_0 \operatorname{sgn}(t - t_a) & t \in [0, t_a) \\ \mu_{02} &= -\mu_0 \operatorname{sgn}(t - t_b) & t \in [t_a, t_b) \end{aligned} \right\} (3)$$

(4) 摩擦力臂 ρ

$$\left. \begin{aligned} \rho_{10} &= R_{bp} \tan \varphi_p \\ \rho_{1A} &= R_{bp} \tan \varphi_p + 2\pi(\Gamma - 1)R_{bp} \\ \rho_{20} &= R_{bp} \tan \varphi_p - P \end{aligned} \right\} (4)$$

式中, ρ_{10} 、 ρ_{20} 分别为啮合齿对 1 号和 2 号的摩擦力臂; ρ_{1A} 为主动齿轮在啮合点处的摩擦力臂。 φ_p 为节圆压力角; P 为法向齿距。

(5) 摩擦力矩 T_f

$$\left. \begin{aligned} T_{f,1} &= \alpha N \mu_0 (\varphi_0 R_{bp} + \omega_p R_{bp} t + P) & t \in [0, t_a) \\ T_{f,2} &= -(1 - \alpha) N \mu_0 (\varphi_0 R_{bp} + \omega_p R_{bp} t) & t \in [0, t_a) \\ T_{f,1} &= 0, T_{f,2} = -N \mu_0 (\varphi_0 R_{bp} + \omega_p R_{bp} t) & t \in [t_a, t_b) \\ T_{f,1} &= 0, T_{f,2} = N \mu_0 (\varphi_0 R_{bp} + \omega_p R_{bp} t) & t \in [t_b, t_c) \end{aligned} \right\} (5)$$

式中, ω_p 为主动轮的角速度; t_b 为节点啮合时间; $T_{f,j}$ 为主动齿轮的摩擦力矩, j 取 1 和 2 时分别表示啮合的齿对 1 号和 2 号。

(6) 等效啮合阻尼 $c^{[7]}$

$$c = 2\zeta \left(\frac{k_m R_{bp}^2 R_{bg}^2 J_p J_g}{R_{bp}^2 J_p + R_{bg}^2 J_g} \right)^{\frac{1}{2}} (6)$$

式中, ζ 为相对阻尼系数; J_p 、 J_g 分别为主动齿轮、被动齿轮的等效转动惯量; R_{bg} 为被动齿轮的基圆半径; k_m 为轮齿的啮合刚度。

1.2 系统的数学模型

$$\ddot{x} + 2\zeta(1 + \mu_1 p_1(\bar{\omega}\tau))\dot{x} + (1 + \mu_2 p_2(\bar{\omega}\tau))x = f(\tau(\omega)) (7)$$

其中, x 为振动位移, $\tau = \Omega t$, $\zeta = c_0/(2m\Omega)$, $\dot{x} = dx/d\tau$, $\Omega^2 = k_0/m$, m 、 c_0 分别为系统质量、等效平均啮合阻尼。 Ω 为系统的固有频率。 ω 、 $\bar{\omega}$ 分别为系统参数的变化频率、系统的激励频率。 $p_1(\bar{\omega}\tau)$ 、 $p_2(\bar{\omega}\tau)$ 分别为系统参数的阻尼、刚度周期控制函数; μ_1 、 μ_2 分别为系统参数的周期函数的幅值控制因子。 $f(\tau(\omega))$ 为外界周期的激励。

引入状态向量 $\mathbf{X}(\tau) = (x(\tau), \dot{x}(\tau))^T$, 则式(7)可写成

$$\dot{\mathbf{X}}(\tau) = \mathbf{G}(\tau)\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{F}(\tau) (8)$$

$$\mathbf{G}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + \mu_2 p_2(\bar{\omega}\tau)) & -2\zeta(1 + \mu_1 p_1(\bar{\omega}\tau)) \end{bmatrix} (9)$$

$$\mathbf{F}(\tau) = [0 \quad f(\tau)]^T (10)$$

\mathbf{G} 为周期函数, $\mathbf{G}(\tau + T) = \mathbf{G}(\tau)$, $T = 2\pi/\bar{\omega}$ 。

当 $f(\tau) = 0$ 时, 式(8)可转化为相应的齐次方程:

$$\dot{\mathbf{X}}(\tau) = \mathbf{G}(\tau)\mathbf{X}(\tau) (11)$$

根据 Floquet-Liapunov 理论^[8], 如果 $x_i(\tau)$ 是式(11)线性无关的基解 ($i = 1, 2$), 则系统朗斯基矩阵 $\mathbf{W}(\tau)$ 为

$$\mathbf{W}(\tau) = [\mathbf{X}_1(\tau) \quad \mathbf{X}_2(\tau)] = \begin{bmatrix} x_1(\tau) & x_2(\tau) \\ \dot{x}_1(\tau) & \dot{x}_2(\tau) \end{bmatrix} (12)$$

$$\mathbf{X}_{f_0}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(0)\mathbf{X}(0) + \int_0^t \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(\tau)\mathbf{F}(\tau)d\tau (13)$$

式中, $\mathbf{X}_{f_0}(t)$ 为在计及系统初始条件时, 系统在外界激励下的响应。

$\mathbf{X}(0)$ 是系统的初始条件, $\mathbf{W}^{-1}(\tau)$ 是 $\mathbf{W}(\tau)$ 的逆矩阵。在式(13)中常令

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(0) = \Phi(t, 0) (14)$$

$\Phi(t, 0)$ 表示系统 $(0, t)$ 的状态转移矩阵。将式(14)代入式(13)得

$$\mathbf{X}_{f_0}(t) = \Phi(t, 0)\mathbf{X}(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)\mathbf{F}(\tau)d\tau (15)$$

如果不计及系统初始条件的瞬态影响, $\mathbf{X}(0) = \mathbf{0}$, 系统在外界激励下的响应为

$$\mathbf{X}_f(t) = \int_0^t \Phi(t, \tau)\mathbf{F}(\tau)d\tau (16)$$

1.3 系统响应的计算

设周期双参变激励系统的两个线性无关的基解为

$$\left. \begin{aligned} x_1(\tau) &= \exp(-c_1^2 \zeta \tau) \cos(\tau \sqrt{c_2^2 - c_1^4 \zeta^2}) \\ x_2(\tau) &= \exp(-c_1^2 \zeta \tau) \sin(\tau \sqrt{c_2^2 - c_1^4 \zeta^2}) \end{aligned} \right\} (17)$$

$$c_1 = \sqrt{1 + \mu_1 p_1(\bar{\omega}\tau)}, c_2 = \sqrt{1 + \mu_2 p_2(\bar{\omega}\tau)}$$

经证明: $x_1(\tau)$ 、 $x_2(\tau)$ 为式(7)的两个线性无关的基解。

根据式(12), 系统的朗斯基矩阵 $\mathbf{W}(\tau)$ 为

$$\mathbf{W}(\tau) = \exp(-c_1^2 \zeta \tau) \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} (18)$$

$$W_{11} = \cos(\tau \sqrt{c_2^2 - c_1^4 \zeta^2}), W_{12} = \sin(\tau \sqrt{c_2^2 - c_1^4 \zeta^2})$$

$$W_{21} = -c_1^2 \zeta \cos(\tau \sqrt{c_2^2 - c_1^4 \zeta^2}) - \sqrt{c_2^2 - c_1^4 \zeta^2} \sin(\tau \sqrt{c_2^2 - c_1^4 \zeta^2})$$

$$W_{22} = -c_1^2 \zeta \sin(\tau \sqrt{c_2^2 - c_1^4 \zeta^2}) + \sqrt{c_2^2 - c_1^4 \zeta^2} \cos(\tau \sqrt{c_2^2 - c_1^4 \zeta^2})$$

状态转移矩阵 $\Phi(\tau_2, \tau_1)$ 为

$$\Phi(\tau_2, \tau_1) = \mathbf{W}(\tau_2)\mathbf{W}^{-1}(\tau_1) = \exp(-c_1^2 \zeta(\tau_2 - \tau_1)) \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} (19)$$

$$\phi_{11} = \frac{c_1^2 \zeta}{\sqrt{c_2^2 - c_1^2 \zeta^2}} \sin(\sqrt{c_2^2 - c_1^2 \zeta^2} (\tau_2 - \tau_1)) + \cos(\sqrt{c_2^2 - c_1^2 \zeta^2} (\tau_2 - \tau_1)) \quad t_c = \frac{60}{\Pi_p Z_p} \quad (26)$$

$$t_b = \frac{30(\varphi_p - \varphi_0)}{\Pi_p \pi} \quad (27)$$

$$\phi_{12} = \frac{1}{\sqrt{c_2^2 - c_1^2 \zeta^2}} \sin(\sqrt{c_2^2 - c_1^2 \zeta^2} (\tau_2 - \tau_1))$$

$$\phi_{21} = -\frac{c_1^4 \zeta^2}{\sqrt{c_2^2 - c_1^2 \zeta^2}} \sin(\sqrt{c_2^2 - c_1^2 \zeta^2} (\tau_2 - \tau_1)) - \sqrt{c_2^2 - c_1^2 \zeta^2} \sin(\sqrt{c_2^2 - c_1^2 \zeta^2} (\tau_2 - \tau_1))$$

$$\phi_{22} = -\frac{c_1^2 \zeta}{\sqrt{c_2^2 - c_1^2 \zeta^2}} \sin(\sqrt{c_2^2 - c_1^2 \zeta^2} (\tau_2 - \tau_1)) + \cos(\sqrt{c_2^2 - c_1^2 \zeta^2} (\tau_2 - \tau_1))$$

对于分段周期系统^[9]:

$$\Phi(T, 0) = \Phi(T, t_b) \Phi(t_b, t_a) \Phi(t_a, 0) \quad 0 \leq t < t_c \quad (20)$$

$$\Phi(t_1, t_2) = W(t_2) W^{-1}(t_1) \quad t_1 \leq t < t_2 \quad (21)$$

当 $t = mT$ 时, 由 Floquet-Liapunov 理论^[9] 有:

$$\Phi_i^{-1}(\tau, 0) = (\Phi^{-1}(T, 0))^{i-1} \Phi_i^{-1}(\tau, 0) \quad (22)$$

$$\Phi(mT, 0) = (\Phi(T, 0))^m \quad (m \text{ 为整数}) \quad (23)$$

将式(22)和式(23)代入式(16)得

$$\begin{aligned} X_f(\tau) &= \Phi(mT, 0) \sum_{i=1}^m \int_{(i-1)T}^{iT} \Phi_i^{-1}(\tau, 0) F(\tau) d\tau = \\ \Phi(T, 0)^m \sum_{i=1}^m (\Phi^{-1}(T, 0))^{i-1} \int_{(i-1)T}^{iT} \Phi_i^{-1}(\tau, 0) F(\tau) d\tau = \\ (\Phi(t_c, 0))^m \sum_{i=1}^m (\Phi^{-1}(t_c, 0))^{i-1} H(\tau) \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(\tau) &= \int_0^{t_a} \Phi(\tau, 0) [B_0 (\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n,1} + b_{n,2} + \\ &b_{n,3}) \sin \frac{n\pi\tau}{t_c} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,1} \sin \frac{n\pi\tau}{t_c}) + \end{aligned}$$

$$C_0 (\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n,1}^* + b_{n,2}^* + b_{n,3}^*) \sin \frac{n\pi\tau}{t_c} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,1}^* \sin \frac{n\pi\tau}{t_c}) d\tau +$$

$$\Phi(t_a, 0) \int_{t_a}^{t_b} \Phi(\tau, t_a) [B_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,2} \sin \frac{n\pi\tau}{t_c} +$$

$$C_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,2}^* \sin \frac{n\pi\tau}{t_c} d\tau + \Phi(t_a, 0) \Phi(t_b, t_a) \cdot$$

$$\int_{t_b}^{t_c} \Phi(\tau, t_b) [B_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,3} \sin \frac{n\pi\tau}{t_c} + C_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,3}^* \sin \frac{n\pi\tau}{t_c}] d\tau$$

式中, B_0 、 C_0 分别为系统的摩擦响应系数, 由齿轮系统的参数决定。

为了计算方便, 将积分运算化为级数运算:

$$H(\tau) = \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} [B_0 (b_{n,1} + b_{n,2} + b_{n,3} + c_{n,1}) +$$

$$C_0 (b_{n,1}^* + b_{n,2}^* + b_{n,3}^* + c_{n,1}^*)] \Phi(\tau_i, 0) \Delta\tau_i \sin \frac{n\pi\tau_i}{t_c} +$$

$$\Phi(t_a, 0) \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} (B_0 c_{n,2} + C_0 c_{n,2}^*) \Phi(\tau_i, t_a) \Delta\tau_i \sin \frac{n\pi\tau_i}{t_c} +$$

$$\Phi(t_a, 0) \Phi(t_b, t_a) \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} (B_0 c_{n,3} +$$

$$C_0 c_{n,3}^*) \Phi(\tau_i, t_b) \Delta\tau_i \sin \frac{n\pi\tau_i}{t_c}$$

齿轮系统的啮合周期与其他参数的关系为

$$t_a = (\Gamma - 1)t_c \quad (25)$$

式中, Π_p 为主动轮的输入转速, r/min; Z_p 为主动轮的齿数; φ_0 为主动齿轮开始进入啮合时转过的角度。

齿轮系统的摩擦力矩为

$$T_{f,1} = \begin{cases} \alpha N \mu_0 (\varphi_0 R_{bp} + P + \omega_p R_{bp} t) & t \in [0, t_a) \\ 0 & t \in [t_a, t_b) \\ 0 & t \in [t_b, t_c) \end{cases}$$

$$T_{f,2} = \begin{cases} -(1-\alpha) N \mu_0 (\varphi_0 R_{bp} + \omega_p R_{bp} t) & t \in [0, t_a) \\ -\mu_0 N (\varphi_0 R_{bp} + \omega_p R_{bp} t) & t \in [t_a, t_b) \\ N \mu_0 (\varphi_0 R_{bp} + \omega_p R_{bp} t) & t \in [t_b, t_c) \end{cases}$$

$$T_{f,1}^* = \begin{cases} \alpha N (-\mu_0) (D - \varphi_0 R_{bp} - P - \omega_p R_{bp} t) & t \in [0, t_a) \\ 0 & t \in [t_a, t_b) \\ 0 & t \in [t_b, t_c) \end{cases}$$

$$T_{f,2}^* = \begin{cases} (1-\alpha) N \mu_0 (D - \varphi_0 R_{bp} - \omega_p R_{bp} t) & t \in [0, t_a) \\ \mu_0 N (D - \varphi_0 R_{bp} - \omega_p R_{bp} t) & t \in [t_a, t_b) \\ N \mu_0 (D - \varphi_0 R_{bp} + \omega_p R_{bp} t) & t \in [t_b, t_c) \end{cases} \quad (28)$$

式中, D 为啮合轮齿理论啮合线的长度; $T_{f,j}^*$ 为被动齿轮的摩擦力矩, j 取 1 和 2 时分别表示啮合的齿对 1 号与 2 号。

摩擦力矩的傅里叶级数展开为

$$T_{f,1} = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n,1} + b_{n,2} + b_{n,3}) \sin \frac{n\pi t}{t_c} \quad (29)$$

$$T_{f,2} = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n,1} + c_{n,2} + c_{n,3}) \sin \frac{n\pi t}{t_c} \quad (30)$$

$$b_{n,1} = \alpha N \mu_0 (\varphi_0 R_{bp} + p) \frac{2}{n\pi} (1 - \cos \frac{n\pi t_a}{t_c})$$

$$b_{n,2} = -2\alpha N \mu_0 \omega_p R_{bp} \frac{t_a}{n\pi} \cos \frac{n\pi t_a}{t_c}$$

$$b_{n,3} = -2\alpha N \mu_0 \omega_p R_{bp} \frac{t_a}{n\pi} \cos \frac{n\pi t_a}{t_c}$$

$$c_{n,1} = (\alpha - 1) N \mu_0 \varphi_0 R_{bp} \frac{2}{n\pi} (1 - \cos \frac{n\pi t_a}{t_c}) +$$

$$(\alpha - 1) N \mu_0 \omega_p R_{bp} \frac{2t_a}{n\pi} \cos \frac{n\pi t_a}{t_c} +$$

$$(\alpha - 1) \frac{2}{t_c} N \mu_0 \omega_p R_{bp} \sin \frac{n\pi t_a}{t_c}$$

$$c_{n,2} = \mu_0 N \varphi_0 R_{bp} \frac{2}{n\pi} (\cos \frac{n\pi t_a}{t_c} - \cos \frac{n\pi t_b}{t_c}) +$$

$$\frac{2\mu_0 N \omega_p R_{bp}}{n\pi} (t_b \cos \frac{n\pi t_b}{t_c} - t_a \cos \frac{n\pi t_a}{t_c}) +$$

$$\frac{2}{t_c} \mu_0 N \omega_p R_{bp} (\sin \frac{n\pi t_a}{t_c} - \sin \frac{n\pi t_b}{t_c})$$

$$c_{n,3} = \mu_0 N \varphi_0 R_{bp} \frac{2}{n\pi} (\cos \frac{n\pi t_b}{t_c} - \cos n\pi) +$$

$$\mu_0 N \omega_p R_{bp} (\frac{2t_b}{n\pi} \cos \frac{n\pi t_b}{t_c} - \frac{2t_c}{n\pi} \cos n\pi - \frac{2}{t_c} \sin \frac{n\pi t_b}{t_c})$$

$$T_{f,1}^* = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n,1}^* + b_{n,2}^* + b_{n,3}^*) \sin \frac{n\pi t}{t_c} \quad (31)$$

$$T_{f,2}^* = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n,1}^* + c_{n,2}^* + c_{n,3}^*) \sin \frac{n\pi t}{t_c} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
 b_{n,1}^* &= \alpha N \mu_0 (D - \varphi_0 R_{bp} - p) \frac{2}{n\pi} (\cos \frac{n\pi t_a}{t_c} - 1) \\
 b_{n,2}^* &= 2\alpha N \mu_0 \omega_p R_{bp} \frac{t_a}{n\pi} \cos \frac{n\pi t_a}{t_c} \\
 b_{n,3}^* &= -\frac{2}{t_c} \alpha N \mu_0 \omega_p R_{bp} \sin \frac{n\pi t_a}{t_c} \\
 c_{n,1}^* &= (1 - \alpha) N \mu_0 (D - \varphi_0 R_{bp}) \frac{2}{n\pi} (1 - \cos \frac{n\pi t_a}{t_c}) + \\
 & 2(1 - \alpha) N \mu_0 \omega_p R_{bp} \frac{t_a}{n\pi} \cos \frac{n\pi t_a}{t_c} + \\
 & \frac{2}{t_c} (\alpha - 1) N \mu_0 \omega_p R_{bp} \sin \frac{n\pi t_a}{t_c} \\
 c_{n,2}^* &= N \mu_0 (D - \varphi_0 R_{bp}) \frac{2}{n\pi} (\cos \frac{n\pi t_a}{t_c} - \cos \frac{n\pi t_b}{t_c}) + \\
 & 2N \mu_0 \omega_p R_{bp} (\frac{t_b}{n\pi} \cos \frac{n\pi t_b}{t_c} - \frac{t_a}{n\pi} \cos \frac{n\pi t_a}{t_c} + \\
 & \frac{1}{t_c} \sin \frac{n\pi t_b}{t_c} - \frac{1}{t_c} \sin \frac{n\pi t_a}{t_c}) \\
 c_{n,3}^* &= N \mu_0 (D - \varphi_0 R_{bp}) \frac{2}{n\pi} (\cos \frac{n\pi t_b}{t_c} - \cos n\pi) + \\
 & N \mu_0 \omega_p R_{bp} (\frac{2t_c}{n\pi} \cos n\pi - \frac{2t_b}{n\pi} \cos \frac{n\pi t_b}{t_c} + \frac{2}{t_c} \sin \frac{n\pi t_b}{t_c}) \\
 p &= \sqrt{1 + \mu_2}
 \end{aligned}$$

系统在啮合周期内的状态转移矩阵 $\Phi(t_c, 0)$ 为

$$\Phi(t_c, 0) = \Phi(t_c, t_a) \Phi(t_a, 0) = \exp(-(d^2 \zeta(t_c - t_a) + b^2 \zeta t_a)) \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(d)} & \phi_{12}^{(d)} \\ \phi_{21}^{(d)} & \phi_{22}^{(d)} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{11}^{(d)} &= \cos(A(t_c - t_a)) \cos Bt_a + \frac{d^2 \zeta}{A} \sin(A(t_c - t_a)) \cos Bt_a + \\
 & \frac{b^2 \zeta}{B} \cos(A(t_c - t_a)) \sin Bt_a + (\frac{d^2 b^2 \zeta}{AB} - \frac{b^4 \zeta^2}{A \sqrt{p^2 - d^4 \zeta^2}} - \\
 & \frac{B}{A}) \sin(A(t_c - t_a)) \sin Bt_a \\
 \phi_{12}^{(d)} &= \frac{1}{B} \cos(A(t_c - t_a)) \sin Bt_a + \frac{1}{A} \sin(A(t_c - \\
 & t_a)) \cos Bt_a + \frac{(d^2 - b^2) \zeta}{AB} \sin(A(t_c - t_a)) \sin Bt_a \\
 \phi_{21}^{(d)} &= -(A + \frac{b^2 \zeta A}{B} + \frac{d^2 \zeta B}{A}) \sin(A(t_c - t_a)) \sin Bt_a - \\
 & (B + \frac{d^4 \zeta^2}{B}) \cos(A(t_c - t_a)) \sin Bt_a - \frac{d^4 \zeta^2}{A} \sin(A(t_c - t_a)) \cos Bt_a \\
 \phi_{22}^{(d)} &= \cos(A(t_c - t_a)) \cos Bt_a - \frac{b^2 \zeta}{B} \cos(A(t_c - t_a)) \sin Bt_a - \\
 & \frac{d^2 \zeta B}{A} \sin(A(t_c - t_a)) \cos Bt_a + \\
 & (\frac{d^2 b^2 \zeta^2}{A \sqrt{p^2 - d^4 \zeta^2}} - \frac{d^4 \zeta^2}{AB} - \frac{A}{B}) \sin(A(t_c - t_a)) \sin Bt_a \\
 b &= \sqrt{1 + \mu_1}, d = \sqrt{1 - \mu_1}, \\
 q &= \sqrt{1 - \mu_2}, A = \sqrt{q^2 - d^4 \zeta^2}, B = \sqrt{p^2 - b^4 \zeta^2}
 \end{aligned}$$

2 算例分析

齿轮系统参数: 输入转矩 $T_p = 1.0 \times 10^5$ N·m, $k_0 = 8.75 \times 10^8$ N/m, $\Gamma = 1.65$, $\Pi_p = 20$ r/min, 主动齿轮的齿数 $Z_p = 23$, 被动齿轮的齿

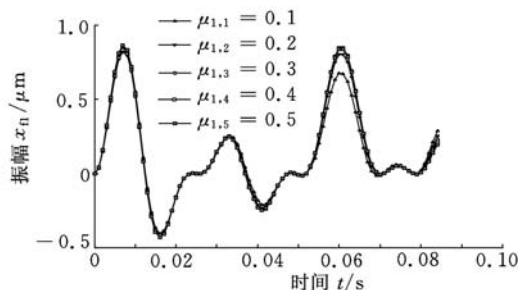
数 $Z_g = 27$, 模数 $m = 14$ mm, 压力角 $\alpha_0 = 20^\circ$, 齿宽 $B = 300$ mm, $t_a = 0.084$ s, $t_b = 0.111$ s, $t_c = 0.130$ s。在齿轮系统中, $\omega = \bar{\omega}$, 为了便于分析, 将系统的摩擦力作用下的振动响应区域分为双齿啮合区和单齿啮合区。

根据上述推导, 下面分析系统各参数对摩擦响应的影响。为保证计算精度, 摩擦力矩傅里叶级数 n 取 10 项。

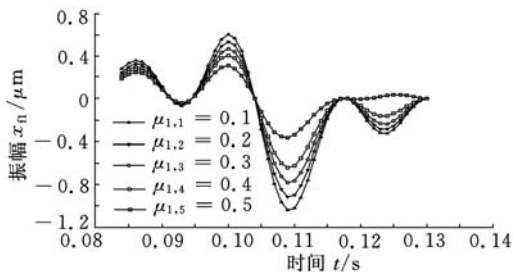
2.1 系统阻尼因子 μ_1

定义系统惯性比 $\eta = J_p/J_g$ 。由图 2 可看出:

① 系统最大振动幅值的绝对值发生在单齿啮合区, 且发生在节点附近, 当阻尼因子 $\mu_{1,1} = 0.1$ 时, 系统的最大振幅的绝对值为 $1.0 \mu\text{m}$ 。② 系统阻尼因子的绝对值对单齿啮合区最大振幅的绝对值的影响与双齿啮合区最大振幅的绝对值的影响机



(a) 双齿啮合区



(b) 单齿啮合区

图 2 阻尼因子对系统振幅影响

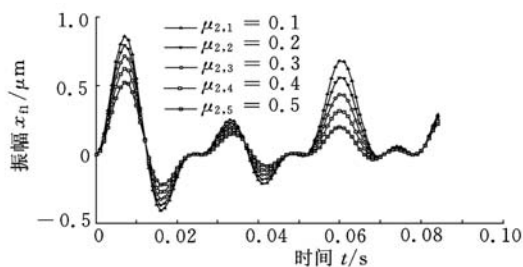
($\zeta = 0.1, \mu_2 = 0.3, \alpha = 0.5,$
 $\mu_0 = 0.1, \eta = 0.5, \Gamma = 1.65$)

理并不相同。在双齿啮合区, 增大阻尼因子的绝对值, 并不能使响应的最大幅值的绝对值减小; 而在单齿啮合区, 增大系统的阻尼因子的绝对值, 可以有效地抑制系统最大幅值的绝对值。图 2a 中, 当阻尼因子 $\mu_{1,1} = 0.1$ 时, 系统的最大振幅的绝对值为 $0.7 \mu\text{m}$; 当阻尼因子 $\mu_{1,5} = 0.5$ 时, 系统的最大振幅的绝对值为 $0.85 \mu\text{m}$, 差值 $\Delta = 0.15 \mu\text{m}$ 。图 2b 中, 当阻尼因子 $\mu_{1,5} = 0.5$ 时, 系统的最大振幅的绝对值为 $0.25 \mu\text{m}$; 当阻尼因子 $\mu_{1,1} = 0.1$ 时, 系统最大振幅的绝对值为 $1 \mu\text{m}$, 差值 $\Delta = -0.75 \mu\text{m}$ 。由此可以看出, 在周期双参变激励齿轮系统中, 增大系统的阻尼因子可以有效地减

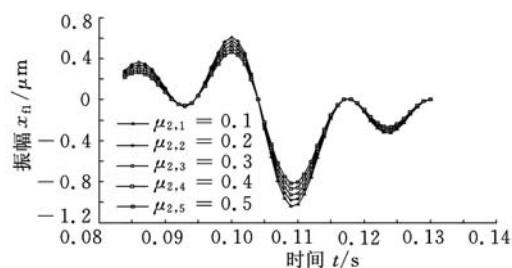
小摩擦激励引起的最大振幅的绝对值。

2.2 系统刚度因子 μ_2

由图 3 可看出:①系统的最大振幅的绝对值发生在单齿啮合区,且发生在节点附近。②图 3b 中,减小系统的刚度因子并不能使系统的最大振幅减小。当刚度因子 $\mu_{2,1}=0.1$ 时,系统的最大振幅的绝对值为 $1.0\mu\text{m}$;当刚度因子 $\mu_{2,5}=0.5$ 时,系统的最大振幅的绝对值为 $0.8\mu\text{m}$ 。③在图 3a 中,随着系统刚度因子的增大,系统在双齿区的次峰得到有效的抑制。当刚度因子 $\mu_{2,1}=0.1$ 时,系统的次峰值为 $0.7\mu\text{m}$;当刚度因子 $\mu_{2,5}=0.5$ 时,系统的次峰值为 $0.2\mu\text{m}$ 。由此可以看出,在周期双参变激励齿轮系统中,减小系统的刚度因子并不能有效地减小摩擦激励引起的最大振幅的绝对值。



(a) 双齿啮合区



(b) 单齿啮合区

图 3 刚度因子对系统振幅影响

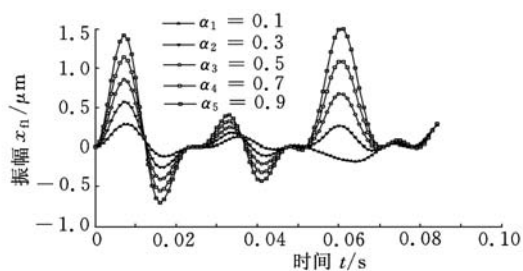
($\zeta = 0.1, \mu_1 = 0.3, \alpha = 0.5,$
 $\mu_0 = 0.1, \eta = 0.5, \Gamma = 1.65$)

2.3 载荷分配因子 α

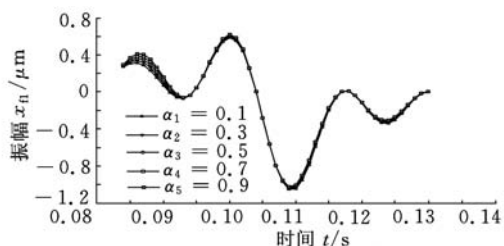
由图 4 可看出:①系统响应的最大振幅的绝对值发生在双齿啮合区。②单齿啮合区的最大振幅的绝对值发生在节点附近。在单齿啮合区,载荷分配因子的变化对最大振幅的绝对值无影响。③在双齿啮合区,载荷分配因子的变化可以明显地影响系统响应的最大振幅的绝对值。由图 4a 可以看出,在双齿啮合时,当载荷分配因子 $\alpha = 0.5$ 时,系统响应的最大振幅的绝对值最小。载荷分配因子 α 为 0.1 和 0.3 时,系统有较小的系统响应峰值。

2.4 系统重合度 Γ

由图 5 可看出:①系统响应的最大振幅的绝



(a) 双齿啮合区

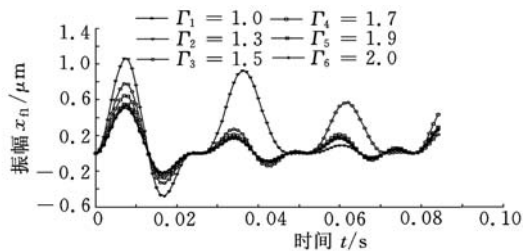


(b) 单齿啮合区

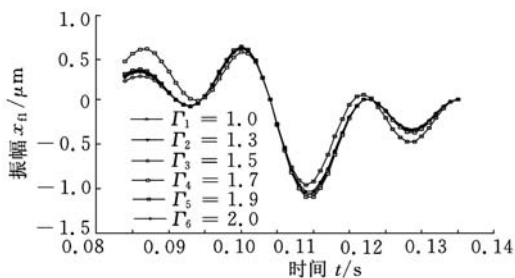
图 4 载荷分配因子对系统振幅影响

($\zeta = 0.1, \mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.3,$
 $\mu_0 = 0.1, \eta = 0.5, \Gamma = 1.65$)

对值发生在单齿啮合区,且发生在节点附近。但是系统重合度的增大对系统最大振幅的绝对值的影响并不明显(图 5b)。②在双齿啮合区,当系统的重合度 $\Gamma=1.3$ 时,系统的峰值响应最大。③在双齿啮合区,当系统的重合度 Γ 分别为 1.0, 1.9, 2.0 时,系统的峰值响应较小。由机械原理知,重合度 $\Gamma \geq 1$ 时可以通过对节圆至齿顶的齿面修形、增加齿轮的名义重合度来减小系统的峰值响应。



(a) 双齿啮合区



(b) 单齿啮合区

图 5 重合度对系统振幅影响

($\zeta = 0.1, \mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.3,$
 $\mu_0 = 0.1, \eta = 0.5, \alpha = 0.5$)

2.5 系统惯量比 η

由图 6 可看出:① 系统响应的最大幅值发生在双齿啮合区,且两处响应的峰值的大小比较接近。② 随着系统的惯量比接近于 1,系统在双齿啮合区的峰值响应迅速减小。③ 单齿啮合区的最大响应发生在节点附近。当系统的惯量比 η 为 0.9,1.0 时,系统的峰值响应较小。

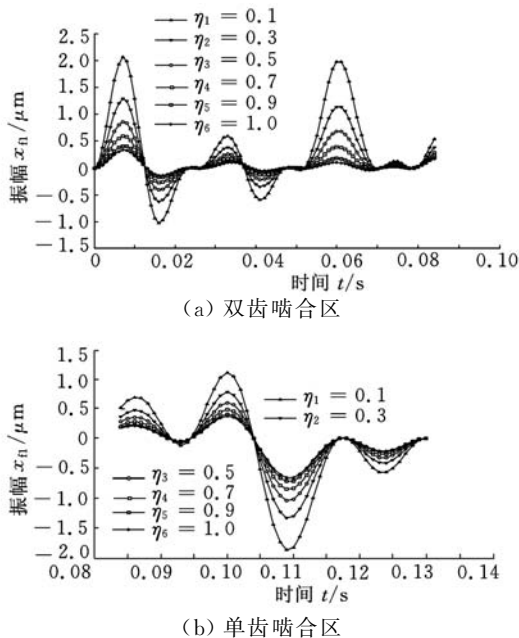


图 6 惯量比对系统振幅影响

($\zeta = 0.1, \mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.3, \mu_0 = 0.1, \Gamma = 1.65, \alpha = 0.5$)

2.6 摩擦因子 μ_0

由图 7 可看出:① 系统响应的最大峰值的绝对值在单齿啮合区,且在节点附近。减小摩擦因子 μ_0 可以有效地抑制系统响应的最大峰值。当 $\mu_{06} = 0.10$ 时,系统响应的最大峰值的绝对值为

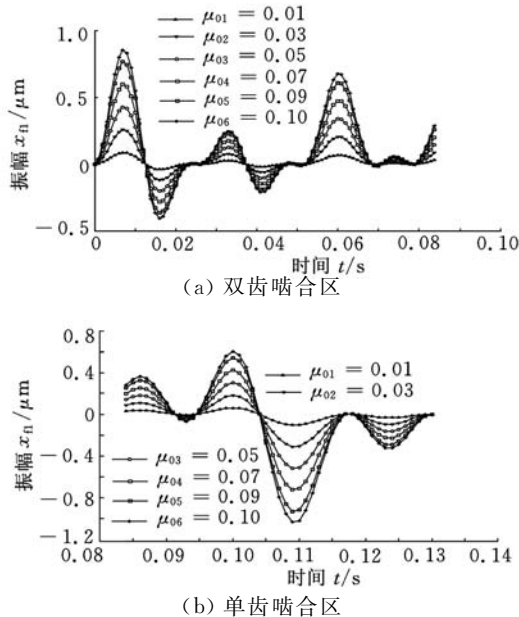


图 7 摩擦因子对系统振幅影响

($\zeta = 0.1, \mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.3, \eta = 0.5, \Gamma = 1.65, \alpha = 0.5$)

1.0 μm (图 7b);当 $\mu_{01} = 0.01$ 时,系统响应的最大峰值的绝对值为 0.05 μm 。② 在双齿啮合区,减小摩擦因子可以有效地降低系统的峰值响应。当 $\mu_{06} = 0.1$ 时,系统响应的最大峰值的绝对值为 0.85 μm ;当 $\mu_{01} = 0.01$ 时,系统响应的最大峰值的绝对值为 0.1 μm 。③ 在双齿啮合区,减小摩擦因子能较好地抑制次峰值响应的大小。

2.7 长期振动响应

运用递归法计算系统长期的振动响应。由图 8 可看出:在周期摩擦激励下,周期双参变激励系统的响应为周期响应(t 为 $10 \sim 13T$)。

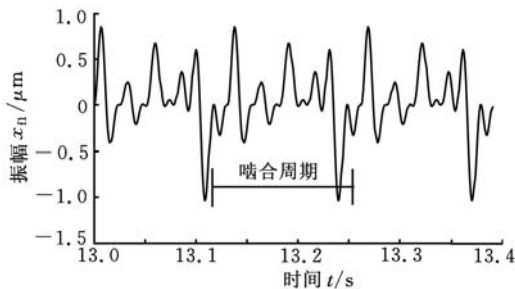


图 8 系统长期的振动响应

($\zeta = 0.1, \mu_0 = 0.1, \mu_1 = 0.3,$

$\mu_2 = 0.3, \eta = 0.5, \Gamma = 1.65, \alpha = 0.5$)

3 结论

本文基于 Floquet-Liapunov 理论,为周期双参变激励非线性系统寻找一基本解系,将系统的周期外激励用傅里叶级数展开。通过计算研究发现此类非线性齿轮系统振动具有以下特征:

(1)在摩擦力的作用下,系统的最大响应峰值大都位于节点附近,而不是系统参数发生突变的地方。

(2)在摩擦力的作用下,系统的设计参数对系统的最大响应峰值有重要的影响。减小系统的摩擦因子,通过修形增大齿轮系统的重合度,增大系统的啮合阻尼,使齿轮副的转动惯量大致相等,可以有效地抑制由摩擦引起的振动。可以调整这些设计参数,从而有效地控制此类系统由摩擦激励引起的振幅响应。

(3)在周期摩擦力的作用下,周期双参变激励系统的响应为周期振动。

参考文献:

[1] Ozguven H N, Houser D R. Mathematical Models Used in Gear Dynamics — a Review[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 121(3): 383-411.
 [2] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学—振动、冲击、噪声[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

(下转第 442 页)

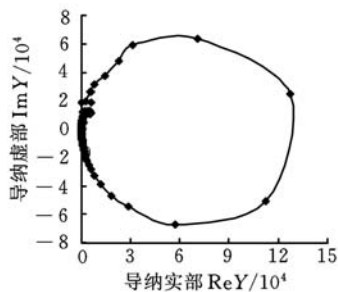


图 12 换能器优化后的导纳圆

题,采用模态频率灵敏度的方法,通过结构优化,实现了换能器工作频率与非工作频率的分离,有效地控制了换能器模态混叠的现象。以 61kHz 芯片键合换能器为对象,使用阻抗分析仪和有限元方法相结合,均发现换能器在 61kHz 工作频率附近存在明显的模态混叠现象,依据模态灵敏度的计算结果,通过最小量地改变变幅杆直径,有效地将水平与垂直弯曲等非工作模态从轴向工作模态中分离出来,保证换能器工作频率附近没有存在其他杂散的干扰频率,使得工作过程中换能器被驱动在唯一的工作频率点,从而提高了换能器超声能量输出的稳定性。

参考文献:

- [1] 冯若. 超声手册[M]. 南京:南京大学出版社,2001.
- [2] 袁易全,陈思忠. 近代超声原理与应用[M]. 南京:南京大学出版社,1999.
- [3] Rao R T. Microelectronics Packaging Handbook [M]. New York:Mcgraw-Hill Publisher, 2001.
- [4] Long Zhili, Han Lei, Wu Yunxin, et al, Dynamics of Ultrasonic Transducer System in Thermosonic Flip Chip Bonding[J]. IEEE Components and Packaging Technology, 2009, 32(2): 261-267.
- [5] 周铁英. 超声键合换能器的研究——回顾与展望[J]. 声学技术, 2006, 25(3): 258-262.
- [6] 吴运新,隆志力,韩雷,等. 芯片键合换能器研究现状分析[J]. 中国机械工程, 2008, 11(19): 1371-1378.
- [7] 隆志力,吴运新,韩雷,等. 热超声键合换能器阻抗/导纳模型[J]. 机械工程学报, 2007, 43(10): 14-19.
- [8] 赵福令,冯冬菊,郭东明. 超声变幅杆的四端网络法设计[J]. 声学学报, 2002, 27(6): 554-558.
- [9] 赵向东,袁义坤,赵淳生. 超声电机定子的有限元分析及其模态混叠现象[J]. 振动工程学报, 2004, 17(S): 705-868.
- [10] 周光平,梁明军,王家宣. 大尺寸超声振动体的研究[J]. 声学技术, 2004, 23(3): 183-190.
- [11] 曾劲松,陈超,赵淳生. 超声电机两相模态频率一致性调节的方法[C]//全国第三届超声波理论和应用技术研究会论文集. 杭州, 2005: 133-137.

- [12] 闻邦椿,刘树英,何勃. 振动机械的理论与动态设计方法[M]. 北京:机械工业出版社,2001.
- [13] 朱华,曾劲松,赵淳生. 杆式超声电机定子的动力学分析与优化设计[J]. 中国机械工程, 2008, 19(21): 2627-2632.

(编辑 陈 勇)

作者简介:隆志力,男,1976年生。哈尔滨工业大学深圳研究生院副教授、博士。研究方向为微电子封装装备与工艺、机械装备动力学。发表论文 20 余篇。韩雷,男,1955年生。中南大学机电工程学院教授、博士研究生导师。祝孟鹏,男,1988年生。中南大学机电工程学院硕士研究生。张亮亮,男,1987年生。东莞华中科技大学制造工程研究院工程师。

(上接第 394 页)

- [3] 王建军,李其汉,李润方. 齿轮系统非线性研究进展[J]. 力学进展, 2005, 35(1): 37-51.
- [4] Velez P, Cahouet V. Experimental and Numerical Investigations on the Influence of Tooth Friction in Spur and Helical Gear Dynamics[C]//Proc. ASME 2000 DET Conf., New York, 2000: 591-600.
- [5] Vaishya M, Houser D R. Modeling and Analysis of Sliding Friction in Gear Dynamics[C]//Proceedings of the 2000 ASME Design Engineering Technical Conference. Baltimore, 2000: 601-610.
- [6] He S, Gunda R, Singh R. Effect of Sliding Friction on the Dynamics of Spur Gear Pair with Realistic Time-varying Stiffness[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 301(3/5): 927-949.
- [7] Lin H H, Hoston R L, Coy J J. On Dynamic Loads in Parallel Shaft Transmissions I——Modeling and Analysis[J]. Transactions of the ASME Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design, 1988, 110(2): 221-225.
- [8] Richards J A. Analysis of Periodically Time-varying Systems[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [9] Aishya M V, Singh R. Analysis of Periodically Varying Gear Mesh Systems with Coulomb Friction Using Floquet Theory[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 243(3): 525-545.

(编辑 陈 勇)

作者简介:卫一多,男,1982年生。西安理工大学机械与精密仪器工程学院博士研究生。主要研究方向为现代传动技术、机械振动理论及应用。发表论文 6 篇。刘凯,男,1957年生。西安理工大学机械与精密仪器工程学院教授、博士研究生导师。崔亚辉,男,1963年生。西安理工大学机械与精密仪器工程学院副教授。原国,男,1978年生。西安理工大学机械与精密仪器工程学院讲师。张武,男,1985年生。西安理工大学机械与精密仪器工程学院博士研究生。