

基于差分进化的非规则 LDPC 码优化设计

刘庆华, 刘晓琳, 陈紫强

(桂林电子科技大学信息与通信学院, 广西 桂林 541004)

摘要: 为优化非规则低密度奇偶校验(LDPC)码的度分布, 引入差分进化(DE)极值搜索算法, 根据差分进化后的最佳成员矢量, 确定非规则 LDPC 码变量点的度分布。基于期望码率和变量点的度分布调整校验点的度分布, 获得期望码率下的 LDPC 码。为提高优化搜索效率, 改进差分进化停止准则, 从而有效控制进化迭代次数。在此基础上, 设计一组加性高斯白噪声(AWGN)信道下的非规则 LDPC 码。实验结果表明, 该方法的译码复杂度低, 设计的 LDPC 码具有较高的噪声门限。

关键词: 非规则低密度奇偶校验码; 度分布; 差分进化; 极值搜索; 线性规划

Optimal Design of Irregular LDPC Code Based on Differential Evolution

LIU Qing-hua, LIU Xiao-lin, CHEN Zi-qiang

(School of Information and Communication, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

【Abstract】 To optimize the degree distributions of irregular Low-density Parity-check(LDPC) codes, a search algorithm of extreme value based on differential evolution is introduced. The variables' degree distributions of the LDPC code are determined by using the best member vectors, the check nodes' degree distribution is adjusted according to both the expected rate and the variable nodes' degree distribution, and the LDPC codes under the expected rate are designed. To get more efficient controlling on the iteration number, the evolution stop criterion is modified. A group of irregular LDPC codes under AWGN channel are designed. Experimental results show that this method has low decoding complexity, and LDPC code has the high noise threshold.

【Key words】 irregular Low-density Parity-check(LDPC) code; degree distribution; Differential Evolution(DE); extremum search; linear programming

DOI: 10.3969/j.issn.1000-3428.2012.02.090

1 概述

低密度奇偶校验(Low-density Parity-check, LDPC)码是由稀疏的奇偶校验矩阵构成的纠错码^[1]。当码长无限长时, 优化非规则 LDPC 具有逼近香农限^[2]的性能。非规则 LDPC 码的性能由分布对 (λ, ρ) 的门限值 (δ^*) 确定, 噪声门限越高与香农限越接近^[3]。非规则 LDPC 码度分布优化问题是搜索一定条件下具有最大门限值的度分布, 其核心算法有 2 个: 门限值计算和极值搜索。目前, 学者对这两方面都做了大量的研究, 提出了许多方法。门限值计算方法有密度进化法、高斯逼近法以及 EXIT 图法。文献[4]采用密度进化理论分析无限长 LDPC 性能, 对于给定度分布的 LDPC 码集, 通过跟踪和积译码器中变量点和校验点之间所传递消息的概率密度的变化确定 LDPC 码收敛门限, 这种方法运算量较大。文献[5]采用高斯近似分析方法, 将无限维的密度进化问题转化为一维均值进化问题, 优化速度提高了几个数量级, 并且码字性能几乎没有损失。文献[6]利用消息密度进化的 EXIT 图衡量 LDPC 码的迭代译码运算量。文献[7]利用 LDPC 码迭代译码算法下变量节点与校验节点的 EXIT 曲线之间的面积反映码的收敛阈值与香农限的差距这一特点, 提出高斯信道下 LDPC 码的优化方法。另一方面, 非规则 LDPC 码度分布优化是一个连续空间上的极值搜索问题, 主要方法有线性优化算法和进化优化算法。当非规则 LDPC 码包含大量的度分量时, 线性优化运算量过大并且结果不一定是最优解。差分进化(Differential Evolution, DE)算法^[8]被证明是一种比较有效

的非线性优化算法, 与传统的优化方法相比, 差分进化是一种基于群体差异的智能全局优化搜索算法, 具有较强的全局收敛能力和鲁棒性等特点。常用数搜索算法将最大迭代次数作为迭代结束的条件, 这种方法通常设置了过多的迭代次数。事实上, 当各成员对应门限值已经非常接近最佳门限值时, 再增加迭代次数时门限的变化将非常小, 因此这样做有效性不高。并且门限的最大值在实际中不易确定, 由门限方差大小作为结束条件^[9]的有效性也不高。文献[10]在分析密度进化的基础上提出变步长的门限搜索方法, 提高了门限搜索速度。本文在选择适当进化策略的同时, 对停止准则进行改进。

2 LDPC 度分布及密度进化的高斯近似

LDPC 常用译码算法是基于 Tanner 图的和积算法。设 v_0 表示变量节点接收信号的对数似然比(LLR)消息, v 和 u 分别表示变量节点和校验节点发送给各自邻接节点的 LLR 消息。那么, 变量节点和校验节点的消息更新规则可表示为:

$$v = v_0 + \sum_{i=1}^{d_v-1} v_i, u = 2 \tanh^{-1} \prod_{i=1}^{d_u-1} \tanh \frac{v_i}{2} \quad (1)$$

译码算法根据上面的消息更新迭代后的 LLR 消息进行

基金项目: 广西教育厅科研基金资助项目(LD0805Y); 广西自然科学基金资助项目(桂科自 0832007)

作者简介: 刘庆华(1974—), 女, 副教授、硕士, 主研方向: 通信信号处理; 刘晓琳, 硕士研究生; 陈紫强, 副教授、硕士

收稿日期: 2011-03-08 E-mail: liuxiaolin008@yahoo.cn

译码判决,然而按式(1)计算消息密度存在卷积运算,计算量非常大。为降低运算量,Chung S Y等人针对加性高斯白噪声(AWGN)信道提出高斯近似方法,假设消息密度均为高斯分布且满足独立性要求的,那么式(1)中的消息密度都是独立高斯分布的,且其均值与方差满足 $\sigma^2 = 2m$,因此,只要知道消息密度的均值就可以完全确定消息密度。

非规则 LDPC 在高斯近似分析中为 i 的变量节点在第 ξ 次迭代中输出消息的均值为:

$$m_{v_j}^{(\xi)} = m_{u_0} + (i-1)m_u^{(\xi-1)} \quad (2)$$

第 ξ 次迭代校验节点 v 接收的消息密度为:

$$f_v^{(\xi)} = \sum_{i=2}^{d_v} \lambda_i N(m_{v_i}^{(\xi)}, 2m_{v_i}^{(\xi)}) \quad (3)$$

由此可得:

$$E\left[\tanh\frac{v^{(\xi)}}{2}\right] = 1 - \sum_{i=2}^{d_v} \lambda_i \phi(m_{v_i}^{(\xi)}) \quad (4)$$

因此,度为 j 的校验节点在第 ξ 次迭代中输出消息的均值 $m_{v_j}^{(\xi)}$ 为:

$$m_{v_j}^{(\xi)} = \phi^{-1}\left\{1 - \left[1 - \sum_{i=2}^{d_v} \lambda_i \phi(m_{v_i}^{(\xi)})\right]^{j-1}\right\} \quad (5)$$

校验节点度为 j 的概率为 ρ_j ,因此,可获得平均意义下校验节点输出的消息均值为:

$$m_u^{(\xi)} = \sum_{i=2}^{d_u} \rho_j \phi^{-1}\left\{1 - \left[1 - \sum_{i=2}^{d_v} \lambda_i \phi(m_{v_i}^{(\xi)})\right]^{j-1}\right\} \quad (6)$$

高斯近似下的消息迭代公式由此得出,因为没有卷积运算,计算复杂度减少很多,另外文献[4]中图4、图5对于2种不同迭代公式的仿真结果表明,高斯近似与离散密度进化理论2种实现方法非常接近,满足门限分析的要求。

3 码率矫正

因变量节点和校验节点度分布满足和为1约束与码率约束,令 R 为码率,则:

$$R = 1 - \frac{\sum_j \rho_j \frac{j}{i}}{\sum_i \lambda_i} \quad (7)$$

令 \bar{d}_c 为校验节点度分布的平均值,则:

$$R = 1 - \frac{1}{\bar{d}_c} \frac{\sum_i \lambda_i}{\sum_i i} \quad (8)$$

那么 $\bar{d}_c = \frac{1}{(1-R)\sum_i \frac{\lambda_i}{i}}$ 是唯一确定的,为简化度分布设计,

假设校验节点只有2种度分布,且是连续整数,这样获得的度分布通常具有较好的门限且对于校验节点只要给出平均值就可以完全确定其度分布。对平均值取整数设为其中一个校验节点的度数 d_{c_1} ,那么另一个校验节点的度数即为 $d_{c_2} = d_{c_1} + 1$,可以由式(9)得到校验节点的度分布 ρ_x :

$$\frac{1}{\bar{d}_c} = \frac{\rho_x}{d_{c_1}} + \frac{1-\rho_x}{d_{c_2}} \quad (9)$$

因为 \bar{d}_c 固定,所以检验节点的度分布也是相对固定的。只需要优化变量节点的度分布,这样就扩大了搜索的范围。

4 差分进化算法及其改进

通过上面分析,已经可以确定对于一个给定度分布 (λ, ρ) 的 LDPC 的门限值,因此,本文目标就是在 AWGN

信道给定码率 R 的情况下寻找具有最大噪声门限的度分布。这是个连续空间非线性代价方程求最值的优化问题,差分进化被证明是一种非常有效的算法^[8,11]。

差分进化是一种并行搜索算法,它可避免错误地收敛,并保证向量跳出局部最小点。其中,样本差异个数设为 NP ,也称为成员个数,即在这些样本中进行差分进化选择最优的度分布, L 维表示优化的度的个数,本文修改了文献[9]提出的算法更新规则和停止准则,使其适合 LDPC 的度序列优化,且收敛速度较快。具体步骤如下:

(1)初始化:先随机产生 NP 个 L 维向量 $p_{i,G}$,每个向量均满足式(7),其中, NP 可取 $10L$, G 代表迭代次数,在初始化时需要进行码率校正,校验节点度分布满足式(8)、式(9)。每个向量的高斯近似门限值记为 $p_{i,G}(i=0,1,\dots, NP-1)$,用 $S_bestval$ 保存具有最大门限值的向量。最终得到具有最大门限值的变量节点度分布记为 $FVr_bestmem$ 。

(2)进化:选用 DE/best/1 with jitter 的差分进化方法,在 $G+1$ 次迭代,从 $[0, NP-1]$ 中随机选择 2 组序列 FM_pm1 和 FM_pm2 、 FM_mui 和 FM_mpo 分别表示度数互补的 2 个度分布, FM_popold 表示整个样本矩阵,则更新向量可以表示为:

$$\begin{aligned} FM_ui &= FVr_bestmem + (FM_pm1 - FM_pm2) \times \\ &\quad ((1-0.9999) \times rand(I_NP, I_D) + F_weight) \\ FM_ui &= FM_popold \times FM_mpo + \\ &\quad FM_ui \times FM_mui \end{aligned} \quad (10)$$

其中, F_weight 是差分偏移的放大系数,本文选择 0.8。

(3)选择:本文采用的策略是每次更新时都以上次迭代更新寻找到的最好的测试向量 $FVr_bestmem$ 作为基本向量,这样的进化策略加快了迭代的收敛速度,但是会降低向量空间集的差异性,随着迭代次数的增加,向量空间集中的向量都趋向于具有最佳门限的向量数的增加,使得再迭代时向量的变化范围变小,为了增加向量空间的差异性,本文在向量更新时对门限的调整采用逐级递减的方式,即调整门限的步长是随着迭代次数变化的,每次递减一个数量级。这样有利于快速搜索出最优值。比较门限时,若 $p_{i,G+1}$ 比 $p_{i,G}$ 大,则 $p_{i,G+1}$ 更新为 $p_{i,G+1}$,否则 $p_{i,G+1} = p_{i,G}$,每次迭代均更新向量集中的所有向量。

(4)停止准则:每次的进化前设定门限,通过比较筛选,得到最优解,这样提高了进化速度。假设校验节点输出信息均值为 m ,信道初始信息均值为 m_0 ,那么度数为 d_v 的变量节点输出的信息均值 $m_v = (d_v - 1)m + m_0$,那么每次迭代输入的错误概率为 $p_e(0) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{m_0}/2)$;输出的错误概率为

$$p_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{m_v}/2)。$$

在进化过程中,门限初始值是矢量进化前对应的门限值。这样每个进化矢量都从不同的初始门限开始,直到搜索出最优解。与所有进化矢量采用同一初始门限值相比,单独为每个矢量设定初始门限可以减小搜索的运算量。在进化时,门限值不一定每次都计算到精确的数值,例如要求每次门限值增大万分之一,当增大后码字收敛则进一步精确计算门限值,若度分布在该门限下码字不收敛则停止计算,返回。

在 AWGN 信道下,通过上面的迭代可以得到给定度和码率的具有最佳噪声门限的度分布 (λ, ρ) 。

5 仿真结果与分析

为了分析本文方法的性能, 设计了一系列非规则 LDPC 码, 如图 1 所示。仿真参数设置如下: 码率为 0.5, 差分进化参数 $F=0.8$ 、 $CR=0.8$, 样本差异个数 $NP=80$, 最大迭代次数为 500。其中, λ_i 表示与度为 i 的节点相连的边占 Tanner 图总边数的百分比, $2 \leq i \leq d_{\max}$ 。

d_{\max}	20	30	50	80	100
λ_2	0.218 7	0.194 2	0.145 4	0.108 6	0.091 1
λ_3	0.171 6	0.123 8	0.131 4	0.065 6	0.047 6
λ_4	0.006 1	0.108 1	0.013 5	0.077 9	0.077 9
λ_6	0.223 4		0.075 0		
λ_9	0.000 8	0.224 5			
λ_{10}		0.000 2	0.161 9	0.001 4	0.004 6
λ_{11}		0.000 8	0.027 8	0.169 7	
λ_{12}			0.000 1	0.020 7	0.163 4
λ_{19}		0.000 9			
λ_{20}	0.379 3	0.000 3			
λ_{30}		0.347 2	0.001 2	0.003 2	0.008 4
λ_{50}			0.443 7	0.000 5	0.000 3
λ_{80}				0.552 4	0.001 9
λ_{100}					0.604 8
λ_{200}					
σ	0.961 7	0.965 9	0.972 5	0.978 2	0.982 2
σ_1	0.955 4	0.959 2	0.960 1	0.962 9	0.963 1

图 1 度分布序列及噪声门限的优化

本文选择的进化策略为 DE/best/1 with jitter, 同时还列出了参考文献[9]通过差分进化得到的非规则 LDPC 码优化度分布的噪声门限。最后 2 行是度分布对应的噪声门限。其中, σ 表示本文通过优化设计得到的噪声门限; σ_1 表示文献[9]中噪声门限。为了与文献[9]进行公平比较, 采用相同的变量点度分布, 变量点最大度数 d_{\max} 分别取 20、30、50、80、100。结果表明, 本文方法设计的 LDPC 码的噪声门限比文献[9]的 LDPC 码的噪声门限有一定程度的提高。同时, 由于停止准则的设立, 计算的复杂度也有一定程度的降低。实际中不需要每次都完成设定的迭代次数才结束进化, 如图 1 在优化 $d_{\max}=20$ 的度分布设计中, 当经过 258 次的迭代就达到收敛, 结束进化过程, 从而提高了优化度分布设计的有效性。

6 结束语

LDPC 码度分布优化设计在 LDPC 码研究与应用中占有

十分重要的位置。本文通过改进差分进化算法的进化规则和停止准则, 并结合高斯近似分析方法进行度分布优化设计, 获得了码率为 0.5 的一系列具有较大噪声门限的度分布, 同时降低了优化算法复杂度。

参考文献

- [1] Gallager R G. Low-density Parity-check Codes[D]. Cambridge, USA: MIT Press, 1963.
- [2] Mackey R M. Near Shannon Limit Performance of Low Density Parity Check Codes[J]. Electronics Letters, 1996, 33(6): 1645-1646.
- [3] Di Changyan, Richardson T, Urbanke R. Weight Distribution of Low Density Parity Check Codes[J]. IEEE Trans. on Information Theory, 2006, 52(11): 4839-4855.
- [4] Richardson T, Shokrollahi A, Urbanke R. Design of Capacity-approaching Irregular Low-density Parity-check Codes[J]. IEEE Trans. on Information Theory, 2001, 47(2): 619-637.
- [5] Chung Sae-Young, Richardson T J, Urbanke R L. Analysis of Sum-product Decoding of Low-density Parity-check Codes Using a Gaussian Approximation[J]. IEEE Trans. on Information Theory, 2001, 47(2): 657-670.
- [6] Smith B, Ardalkani M, Yu Wei. Design of Irregular LDPC Codes with Optimized Performance-complexity Tradeoff[J]. IEEE Trans. on Communications, 2010, 58(2): 489-499.
- [7] 毛 倩, 董德存, 曾小清. 一种 AWGN 信道下非规则 LDPC 码的优化方法[J]. 计算机应用, 2010, 30(2): 292-294.
- [8] Price K, Storm R. Differential Evolution—A Simple and Efficient Adaptive Scheme for Global Optimization over Continuous Spaces[J]. Journal Global Optimization, 1997, 11(4): 341-359.
- [9] 李二保, 雷 菁, 徐富兵. 非规则 LDPC 度分布优化设计[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(11): 2788-2791.
- [10] 马 琦, 王海滨, 陈曾平. 非规则 LDPC 码度分布优化算法研究[J]. 计算机仿真, 2009, 26(4): 171-176.
- [11] 易文周, 张超英, 王 强. 基于改进 PSO 和 DE 的混合算法[J]. 计算机工程, 2010, 36(10): 233-235.

编辑 陆燕菲

(上接第 266 页)

7 结束语

本文实现了基于 CUDA 模型的高质量光线投射算法, 并对其进行了加速研究。针对高质量光线投射算法, 设计一种 CUDA 存储器的访存优化策略, 合理使用 CUDA 存储器模型, 更好地发挥 GPU 的性能优势。在此基础上, 提出一种改进的适用于 CUDA 存储器模型的空体素跳跃加速法, 更有效地减少了对空体素采样点的处理, 在保证图像质量的条件下提高了绘制速度。

参考文献

- [1] Marsalek L, Hauber A, Slusallek P. High-speed Volume Raycasting with CUDA[C]//Proc. of Symposium on Interactive Ray Tracing.

Los Angeles, USA: IEEE Press, 2008: 185-190.

- [2] Kim J. Efficient Rendering of Large 3-D and 4-D Scalar Fields[D]. Baltimore, USA: University of Maryland, 2008.
- [3] 刘 磊. 基于 GPU 的医学图像三维重建及可视化技术研究[D]. 广州: 南方医科大学, 2008.
- [4] Engel K, Hadwiger M, Kniss J M, et al. Real-time Volume Graphics[M]. [S. l.]: CRC Press, 2006: 115-119.
- [5] Mensmann J, Ropinski T, Hinrichs K. An Advanced Volume Recasting Technique Using GPU Stream Processing[C]//Proc. of International Conference on Computer Graphics Theory and Applications. [S. l.]: IEEE Press, 2010: 190-198.

编辑 陆燕菲