

# 湍流的耗散及弥散相互作用理论

北京航空学院 高歌

## 摘 要

湍流具有涡团散裂、耗散和弥散的特性。根据Prigogine倡导的耗散结构理论,推导了表征耗散与弥散相互作用的新的湍流控制方程组。其特点是:用稳定性分析得到湍流动能产生项,再根据广义熵增原理推出并列存在的,分别适用于强弱涡量的二个湍流动量方程。运用该理论已成功地计算了一些典型的湍流问题:湍流边界层中的马蹄涡拟序结构、钝体涡尾区的湍流能量逆转、湍流涡团散裂弛豫及各向异性分布。文中给出了部分算例。

## 一、引 言

众所周知,对Navier-Stokes方程Reynolds平均产生了不封闭问题,尝试封闭Reynolds方程的努力仍不令人满意。有人怀疑:Reynolds应力方法掩盖了湍流运动的本质特征。湍流拟序现象的发现又表明湍流现象并非绝对的无序随机过程,不可能完全使用统计描述解决。当前拟序现象、间歇性及湍流能量逆转等现象给湍流研究带来了更艰巨的任务。现有湍流理论多种多样,难于从逻辑上归结为少数几个基本原理。文献〔1〕表明,在连续分层剪切流中有无限多个离散内孤立波集合存在。文献〔2〕指出,描写弥散现象的各种方程均可化为广义牛顿方程,得出伪势函数、孤立子和谱之间的数学关系。林家翘则进一步提出了湍流波粒二重性及能量逆转密切相关的观点〔3〕。作者认为,以耗散机制为主导的湍流理论忽视了反映湍流本质的另一重要侧面——弥散。在经典热力学中耗散意味着熵增、不允许能量逆转。而弥散具备波粒二重性,允许能量可聚可散。有必要根据湍流耗散、弥散相互作用关系建立新的湍流运动方程。

## 二、湍流运动方程

根据热力学第二定律,耗散过程不可逆。粘性耗散项在能量方程中对应于耗散函数,当 $\mu > 0$ 及 $3\lambda + 2\mu \geq 0$ 时,耗散函数 $\phi$ 恒为正。耗散函数描述了动力系统中随机过程及允许自由度范围内机械能向热能转换的不可逆性。在推导湍流控制方程时,将依据不可逆过程热力学的如下命题:动量方程中反映耗散过程的二阶偏微分项,不论具体形式如何,在能量方程中其对应的耗散项恒为正。

1984年6月12日收到。

从湍流能谱可知，分子粘性主要在湍流涡团演变及衰落后期起作用。湍流的产生，意味着流体微团偏离流线时得到能量，对应于湍流谱的充能区。湍流粘性通常比分子粘性大数百倍。因此，在应用湍流稳定性分析求取湍流粘性应力时，略去分子粘性。在流场任意局部区域采用流动坐标，选择流线上任一点为瞬时坐标原点  $o$ ，流线的切向及内法向为  $x$ 、 $y$  轴方向，构成正交坐标系（图 1）。这种坐标系不同于欧拉坐标系及拉格朗日坐标系，失稳度不表示流线或速度型的破坏程度，而表示流体微团以任意形式脱离流线的强度，即湍流动能的产生强度。采用密度分层流法，分析旋流稳定性，二维无粘流控制方程为

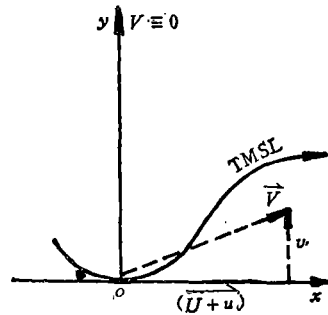


图 1 坐标系

Fig.1 Coordinate system

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + KV = 0 \tag{1}$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + V \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + KUV = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \tag{3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} - KU^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \tag{4}$$

式中  $U$ 、 $V$ 、 $\rho$ 、 $P$  分别为  $x$ 、 $y$  方向瞬时分速、密度、压力， $K$  为流线曲率。取流线坐标时  $V \equiv 0$ ，令

$$\left. \begin{aligned} \text{瞬时速矢 } \vec{v} &= (\overline{U} + u) + \vec{v} \\ \text{瞬时密度 } \rho &= \rho_0 - \rho'_0 \eta \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

式中  $u$ 、 $v$  为  $x$ 、 $y$  方向扰动速度分量， $\overline{U}$  为  $x$  向时均速度， $\rho_0$  为未扰动时的密度， $'$  表示  $\partial/\partial y$ ， $\eta$  表示流体微团从其初始位置的位移。在不可压流中涡量扰动波以横波形式沿流向传播，因而可令

$$\eta(x, y, t) = F(y) e^{im(x-ct)} \tag{6}$$

式中  $m = 2\pi/l$  是波数、复波速  $C = C_r + iC_i$ 。将 (5)、(6) 式代入 (1)~(4) 式，略去高阶小量，并按文献 [4] 类似的方法进行推导，最后可得稳定流动条件为

$$\underbrace{\frac{4}{P_0} \frac{\partial P_0}{\partial y} \left( K \overline{U}^2 - \overline{U} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} \right)}_{\text{I}} - \underbrace{\left\{ \left[ \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \right)^2 + 2\Omega \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \right]}_{\text{II}} - \underbrace{\omega_p \frac{\partial \overline{U}}{\partial y}}_{\text{III}} \right\}}_{\text{III}} \geq 0 \tag{7}$$

式中  $\Omega$  是涡量、 $\omega_p$  是沿流线传播的涡量扰动值；I 项表示压力梯度、离心加速度及流向迁移加速度相互作用而产生的流动稳定因素；II 项是具有输运耗散特性的不稳定因素，根据前述命题可知，在能量方程及湍流动能产生项中，该项恒为正；III 项是涡团扰动引起的不稳定因素。

从突变理论的 Maxwell 约定可知，I 项相当于稳定吸引子，II、III 项相当于不稳定吸引子。从稳定到不稳定的过程是依吸引子的大小不同以突变形式发生。当  $I < 0$  时，

流动绝对失稳；当  $I > 0$ ，且 (7) 式成立时，流动稳定；当  $I > 0$ ，但 (7) 式不成立时，流动为中性稳定。中性稳定时，动量及能量不断输入，但振幅不增加，积累到一定时候会发生突变失稳，能量以猝发形式流出。稳定态到中性稳定的变化则是渐变过程。流动在失稳及中性稳定二种状态之间的周期性振荡构成湍流间歇性。

在直角坐标系中，II 项可表示为

$$\text{II} = \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + 2\Omega_{ij} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (8)$$

沿流线传播的涡量扰动值正比于流线法向涡量梯度及湍流混合尺度，即

$$\omega_p = l \frac{\partial |\Omega_{ij}|}{\partial x_j}$$

式中  $l$  是湍流的混合尺度。 $\omega_p$  反映了涡量扰动传播速度和湍流弥散波群速度密切相关。

III 项可表示为

$$\text{III} = -\text{sign}(u_i) l \frac{\partial |\Omega_{ij}|}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (9)$$

在湍流  $K-\epsilon$  模型中<sup>[6]</sup>，湍流动能产生项为

$$G_K = \mu_T \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

这实质上是把 Reynolds 应力比拟为层流分子粘性应力，沿袭固体力学的应变能概念得出的，这种比拟缺乏严格证明。本文依据湍流稳定性分析建立流动失稳因素与湍流动能产生率之间的关系。失稳意味着被扰动的涡团不能继续沿流线流动，猝发偏离流线并发生弥散。猝发涡团获得的湍流动能等于涡团中蕴藏的临界失稳能量。这恰巧反映了湍流涡团离散能量与定向流集合能量之间的转换关系。因此，失稳因素愈强，湍流动能产生率也愈强。可取  $G_K = |\text{II}| + \text{III}$ ，即

$$G_K = \mu_T \left\{ \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + 2\Omega_{ij} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\} - \text{sign}(u_i) l \frac{\partial |\Omega_{ij}|}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (10)$$

(7) 式中 II 项在动量方程中对应于二阶偏微分项，表示湍流粘性耗散，在 (10) 式中取绝对值。如果  $\text{II} < 0$ ，在动量方程中其对应项则应取负号。III 项在动量方程中对应于三阶偏微分项，表示湍流弥散效应。

在负弥散能量增大、压力分层增强时，湍流涡团的孤立子特性增强，而散裂将削弱或滞后。(7) 式综合给出了压力分层、耗散及弥散对流动稳定性影响的定量关系。根据该式可定出湍流涡团散裂弛豫系数  $\xi$ 。

散裂耗散态： $\text{III} \geq 0$ ， $\xi = 1 - \frac{I}{|\text{II}| + \text{III}}$ ， $I \leq 0$  时  $\xi = 1$ ， $\xi_{\min} = 0$ ；

负弥散态： $\text{III} < 0$ ， $G_K < 0$ ， $\xi = 0$ ；

耗散——负弥散混合态：

$\text{III} < 0$ ， $G_K > 0$ ， $\xi = 1 - \frac{I - \text{III}}{|\text{II}|}$ ，且  $\begin{cases} I - \text{III} < 0, & \xi = 1 \\ \xi_{\min} = 0 \end{cases}$

据此即可推出不可压流不同流态时的湍流基本运动方程组，

1. 动量方程

$\text{II} < 0$ ，强涡量时的动量方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_L - v_T) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} v_T \left[ 2\Omega_{ij} + \text{sign}(u_i) c_0 \frac{K^{3/2}}{\epsilon} \frac{\partial |\Omega_{ij}|}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

II > 0, 弱涡量时的动量方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_L + v_T) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} v_T \left[ 2\Omega_{ij} - \text{sign}(u_i) c_0 \frac{K^{3/2}}{\epsilon} \frac{\partial |\Omega_{ij}|}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

## 2. 湍流动能 K 方程

$$\frac{\partial K}{\partial t} + u_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_T}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) + \frac{G_K}{\rho} - \xi \epsilon \quad (13)$$

## 3. 湍流动能耗散率 $\epsilon$ 方程

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + c_1 \frac{\epsilon}{\rho K} G_K - c_2 \frac{\epsilon^2}{K} \quad (14)$$

式中  $\Omega_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ,  $\mu_T = c_\mu \frac{\rho K^2}{\epsilon}$ ,  $c_\mu = 0.09$ ,  $c_0 = 0.38 \sim 0.41$ ,  $c_1 = 1.44$ ,  $c_2 = 1.92$ ,  $\sigma_K = 1.0$ ,  $\sigma_\epsilon = 1.3$ ,  $G_K$  见 (10) 式,  $l = c_0 \frac{K^{3/2}}{\epsilon}$ 。

以上湍流运动方程组在许多情况下可进一步简化或变形。

(1) 当 II > 0, 涡量  $\Omega_{ij}$  很小, 或压力分层很小, 或有强烈拉伸时, 上述方程组可近似为原始的 K- $\epsilon$  模型<sup>[6]</sup>

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_L + \mu_T) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} + u_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_T}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) + \frac{G_K}{\rho} - \epsilon \quad (16)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + c_1 \frac{\epsilon}{\rho K} G_K - c_2 \frac{\epsilon^2}{K} \quad (17)$$

$$G_K = \mu_T \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (18)$$

实质上, 该方程组是描写小剪切流、无压力分层流或强拉伸流的。这恰好说明, 为什么 K- $\epsilon$  模型计算纯拉伸流可以获得满意的结果, 而在纯剪切流及有压力分层的旋涡流场中计算结果十分糟糕的原因<sup>[6]</sup>。

(2) 当 II < 0, 考虑涡量及压力分层影响时, 应用不可压流连续方程简化后二维动量方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v_L \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} v_T \Omega \\ & - \text{sign}(u) c_0 v_T \frac{K^{3/2}}{\epsilon} \frac{\partial^2 |\Omega|}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v_L \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} v_T \Omega \\ & - \text{sign}(v) c_0 v_T \frac{K^{3/2}}{\epsilon} \frac{\partial^2 |\Omega|}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (20)$$

$$G_K = c_\mu \frac{\rho K^2}{\epsilon} \left\{ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \Omega^2 + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right\} - c_0 \frac{K^{3/2}}{\epsilon} \left[ \text{sign}(u) \frac{\partial |\Omega|}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \text{sign}(v) \frac{\partial |\Omega|}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (21)$$

式中  $\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ 。  $\frac{\partial^2 |\Omega|}{\partial x^2}$  及  $\frac{\partial^2 |\Omega|}{\partial y^2}$  是速度分量的三阶偏导数。(19)、(20)两式中右侧最后一项可称为单位质量的弥散力。(19)式中  $-\frac{\partial}{\partial y} v_T \Omega$  项及(20)式中  $+\frac{\partial}{\partial x} v_T \Omega$  项可称为单位质量的拟序力。湍流边界层的数值计算表明,湍流拟序结构的形式和拟序花纹的舒卷方向及变化,主要是由拟序力决定的;而湍流能量逆转及速度型的维持则取决于弥散力。

$\text{II} < 0$  时的动量方程(11)是湍流耗散——弥散相互作用理论研究的最重要结果,许多湍流疑难问题都和这方程有关。以往湍流研究中的多数模型都可归并到  $\text{II} > 0$  的动量方程(12)的范畴中。二个动量方程是并列存在的,以往研究中没有方程(11)的类型。

### 三、经验参数的选择

不同阶段的湍流涡和不同阶次的湍流扰波在不同区域具有不同的衰减率,在基本控制方程中又多次采用了梯度扩散概念。为了得出湍流时均参数,必须在基本运动方程中引入经验系数。本文中唯一新引入的经验系数是  $c_0$ 。在缺少沿流线传播的扰动弥散波角速度的更精湛的知识时,该值不得不由涡量梯度、湍流混合尺度及经验系数  $c_0$  表示。公式中  $c_0 = 0.38 \sim 0.41$  是通过数值计算对照试验结果的初步确定值。

$K-\epsilon$  模型中经验系数是根据 Колмогоров 各向同性自由湍流试验得出的,在纯拉伸流的计算中能获得满意结果<sup>[6]</sup>。耗散-弥散相互作用理论的运动方程在纯拉伸流或时均涡量很小时,可以退缩为  $K-\epsilon$  方程,恰好需要一组适合纯拉伸流的系数。从  $G_K$  表达式(10)可以看出,与涡量有关的各项是与变形率张量并列的,这意味着表征纯拉伸及纯剪切二种极端情况的各因素可使用同一经验系数。计算结果表明,直接采用  $K-\epsilon$  模型有关平直流的经验系数,就会在纯拉伸、纯剪切及其任意组合情况下均获得满意结果,具有较大的通用性。

### 四、负弥散与能量逆转

在弥散作用强烈的地区,湍流涡团呈现明显的孤立子特性,其串级散裂过程受抑制而滞后。负弥散过程对湍流有特殊重要意义,它解释了较不规律的小尺度脉动运动转化为较规则的大尺度运动的物理实质。能量逆转的机理可解释如下:

在平面圆周旋涡场上叠加一湍流脉动涡团场,构成复合场。复合场可看作是由含有众多任意形状的微小涡团的同心层组成。图 2(a) 中  $o$  是涡心,  $r_0$  是涡核半径,  $\omega_0$  是涡核角速度,  $U_0$  是涡核边界的最大切向速度。同心圆  $b-b$ 、 $a-a$ 、 $c-c$  是圆周旋涡场的时均流线。沿  $r$  的切向速度分布见图 2(b)。令  $\Omega$  及  $l$  为所论湍流涡团的涡量及尺度,  $V$  为涡团的径向扰动速度,  $F$  是涡团受的 Coriolis 力。

现在研究介于时均流线  $b-b$ 、 $a-a$  及  $c-c$  之间的两邻近小涡团,由于剪切作用

小涡团相对圆周旋涡运动时各自维持其涡量  $\Omega$ 。令  $b-b$  线上  $o'$  点及  $c-c$  线上  $o''$  点为小涡团瞬时旋转中心, 在时均流线  $a-a$  上相接触的涡对给出逆向扰动速度  $u = \frac{1}{2} \Omega l + \frac{1}{2} \Omega l = \Omega l$ , 使涡核边缘最大切向速度减少为  $U_0 - u$ , 并使沿半径的速度分布由折线  $bac$  变为曲线  $bHc$  (图 2 (b))。这乃是湍流粘性引起涡量扩散的结果。

假设内层涡团沿径向以扰动速度  $+v$  外传, 外层涡团以扰动速度  $-v$  内传, 则每一涡团在其围绕瞬时旋转中心的角速度作用下都将产生 Corriolis 力, 即每单位质量承受

$F = \Omega v$  的力, 且都作用于时均流线速度  $U$  方向上 (图 2 (a))。正是 Corriolis 力把脉动小涡团的动能转换为定向集合流动的动能, 这就是负弥散或能量逆转。林家翘在文献〔3〕中阐述了类似的观点。

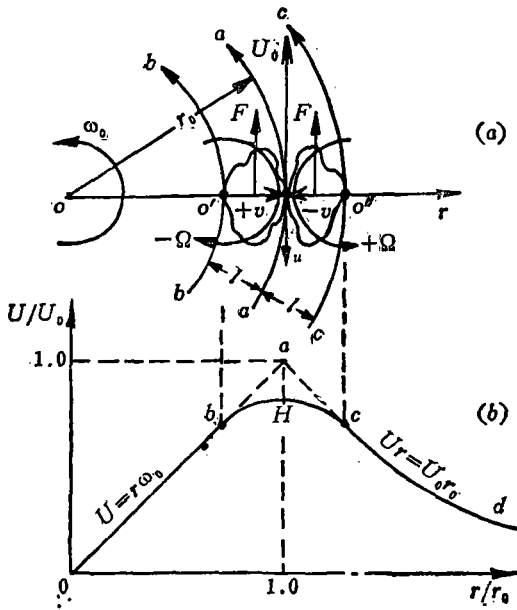


图 2 合成旋涡场

Fig.2 Composite vortex field

在时均流线  $a-a$  上涡量对半径的二阶导数  $\partial^2 \Omega / \partial r^2$  具有最大值, 该区会产生强负弥散。在强负弥散区被激发的微小涡团将具有波粒二重性, 并遵从 Schrödinger 方程。 $a-a$  二侧含有尺度为  $l$  的微小涡团的流体层, 可看作是波导带。只有波长小于或等于临界值 (截止波长  $l$ ) 的微小涡团, 可在波导作用下产生定向运动。显然大波长的波或小波数的波 ( $m < 2\pi / l$ ) 在横越波导带时不能得以整流。波导带二侧的湍流强度不同, 高阶扰波被整流成定向流动能量的数值就不同。例如, 在受迫涡一侧因压力分层作用使湍流强度较大, 整流后总温降也较多。在壁面边界层中, 扰动只来自外流一侧, 在边界层的不稳定层中被 Corriolis 力整流成  $F$  方向的运动, 使湍流边界层速度型遵从  $\frac{1}{7}$  次方对数律。值得指出的是, 负弥散现象只有在负弥散能量大于耗散能量时才产生。

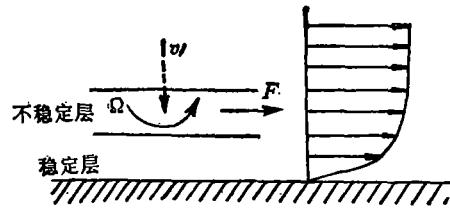


图 3 湍流边界层的整流作用维持 1/7 次方速度型

Fig.3 Rectification of eddies in turbulent B.L. to maintain the 1/7 power velocity profile

### 五、湍流能量方程

湍流的能量方程中同时含有耗散函数和弥散函数, 即

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V_j \frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} V_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\phi}{\rho} + \frac{\psi}{\rho} \quad (22)$$

$$\phi = \mu_T \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + 2\Omega_{ij} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu_L \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (23)$$

$$\psi = -\xi_T \operatorname{sign}(u_i) \frac{\partial |\Omega_{ij}|}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (24)$$

式中  $\mu_T$  为湍流耗散粘性系数;  $\xi_T$  为湍流弥散系数;  $\mu_L$  为层流粘性系数。在任何情况下耗散函数  $\phi \geq 0$ 。正弥散函数  $\psi > 0$  反映湍流扰动波的频率散布对湍流涡团散裂做出贡献, 从而最终经由分子粘性转化为热能的作用。负弥散反映了从高阶小尺度脉动能量转化为大尺度宏观动能的作用。

负弥散项的热力学实质涉及了 Prigogine 倡导的耗散结构理论。该理论提出: 在与外界有能量和物质交换的非线性系统远离平衡态时, 会产生新的有序结构——耗散结构。在远离平衡态的非线性区, 随机脉动通过相干效应(波粒二重性)使系统由不稳定的状态通过涨落跃迁到新的稳定状态。把  $\partial^2 |\Omega| / \partial r^2$  数值大的负弥散区看作是热力学子系统, 它通过湍流扰波和区域外进行物质能量交换, 又通过波导整流效应把扰动波整流成单向运动的孤立子, 形成典型的耗散结构。动量方程中的速度三阶偏导数表示高阶非线性特性, 在湍流扰动波和湍流孤立子的波粒二重性作用下, 就产生了新的有序结构。这种现象出现在大气龙卷风、台风、大洋旋涡、星云旋涡、钝体回流区中的能量逆转区、Ranque-Hilsch 效应及血液微循环自律运动等多种场合。

## 六、计算实例

本文推导湍流基本控制方程组的过程, 是结合数值计算、对比实验结果同时进行的。采用  $K-\epsilon$  模型的全套经验系数是否可行、新经验系数  $c_0$  的确定及湍流涡团散裂弛豫系数  $\xi$  的取法, 都反复进行了大量数值试验。全部计算都是利用 ADC 法<sup>[7]</sup>对湍流基本控制方程(10)~(14)差分进行的。计算初期先求解无量纲化的 Navier-Stokes 方程, 计算  $Re$  数比实际流场  $Re$  数小 50~100 倍, 求得结果后再进行湍流方程的计算。此时, 将求解 N-S 方程的结果作为湍流计算的初值, 并使用实际流场的真实  $Re$  数进行计算。二个并列的动量方程(11)、(12)同时列入程序中, 在每一新的迭代步中, 对每一点都先计算(8)式, 再根据所得参数群 II 的数值正负, 决定使用那个动量方程计算该点数值。同时, 对每一点每次求解湍流动能方程时, 也需事先计算该点的湍流涡团散裂弛豫系数  $\xi$ 。为了利用数值计算进一步摸清湍流基本方程中各项的物理意义和作用, 还采用了临时扣除某项, 把缺项方程和完整方程的计算结果进行对比。下面介绍二个典型算例:

1. 钝体尾流旋涡场的计算。利用湍流基本控制方程(10)~(14)计算了和文献[8]同样的二维钝体旋涡场, 并和文献[9]激光测试结果对比。在矩形通道中安置夹角  $60^\circ$ 、阻塞比 0.5 的楔形钝体,  $Re_L = 6.9 \times 10^4$ 。钝体前方风洞通道中的直匀流相当于无压力分层流或小涡量流, 钝体近前上方的流场近似于小涡量拉伸流。程序记录表明, 这些区域的计算都是利用动量方程(12)进行的, 且散裂弛豫系数  $\xi \approx 1$ 。该区的计算获得了和  $K-\epsilon$  模型同样精度的与实验相符的结果。其原因在于动量方程(12)在小涡量情况可以退化成  $K-\epsilon$  的方程。

钝体后旋涡场的计算结果见图 4。回流区长度的误差为 3%, 湍流强度的误差  $< 5\%$ 。此外, 速度场、涡量场、回流区形状及回流区中局部湍流能量逆转区的分布等都得到了

与试验〔9〕相符的结果。

文献〔8〕列举了使用  $K-\epsilon$  模型计算同样流场时存在的一系列问题, 在本文的计算中克服了这些缺陷: 1. 回流区与外流相接处存在湍流能量逆转区, 呈现负粘性现象。使用动量方程 (11) 及  $c_0=0.38\sim 0.41$  计算该区域, 出现了拟序力项与负弥散力项的总和大于零的结果, 这相当于负粘性。取消方程 (11) 中的三阶速度偏微分项 (令  $c_0=0$ ) 后, 负粘性区消失。当  $c_0<0.38\sim 0.41$ , 负粘性区小于实测值,  $c_0>0.41$  后, 负粘性区过大并最终导致程序发散。2. 正确的回流区形状及湍流强度分布, 主要取决于散裂弛豫系数  $\xi$  的使用。数值试验表明, 计算  $\xi$  时如令 I 项中的压力梯度为零, 则回流内部 (图 4 a 区) 的湍流强度急剧下降; 如令 I 项中的离心力项  $K\bar{U}^2$  为零, 则旋涡尾部的湍流强度大幅度下降; 如令 I 项中的迁移加速度项为零, 则旋涡后的尾流速度亏损区 (图 4 b 区) 的湍流强度大大低于实际值。

该算例印证了本文有关负弥散及湍流能量逆转的理论观点; 同时也表明, 在高压梯度区、高离心力区及强压缩区, 湍流动能的耗散过程不遵从 Колмогоров 规律, 会出现散裂滞后或停止的现象。这是造成钝体回流区内部及尾部高湍流强度分布的原因。最有趣的是, 作者在本计算结果中偶然发现风洞固体壁面处算出了拟序花纹, 这引导作者进一步开展了对拟序结构的数值计算。

2. 边界层拟序结构的计算。应用方程 (10)~(14), 使用固体边界条件 (速度、法向压力梯度及法向涡量梯度为零), 不需附加任何其它条件, 就可在壁面边界层中算出周期性拟序马蹄涡花纹。计算表明, 获得壁面边界层周期性马蹄涡的充分必要条件是湍流边界层具有  $1/7$  次方对数律的时均速度型。采用涡粘性模型 (如原始  $K-\epsilon$  模型), 只能算出遵从层流  $1/2$  次方对数律的速度型, 改变  $\mu_T$  大小仅影响边界层厚度。采用本文模型, 在  $c_0=0.38\sim 0.41$  范围时, 则可算出湍流边界层速度型。如减少  $c_0$ , 则速度型饱满程序下降;  $c_0=0$ , 变为层流速度型; 增大  $c_0$ , 则引起不稳、计算程序发散。这说明, 湍流近壁面层对数律主要由负弥散力项 (速度三阶偏微分项) 决定。

二维边界层拟序结构的计算, 网格划分为边界层内采用 20 层细网格, 外流场采用 20 层渐疏网格, 入口速度分布直接采用湍流边界层速度型。计算表明, 边界层主要受动量方程 (11) 控制, 只有采用正确的  $c_0$  值, 流场才能维持湍流边界层速度型, 并产生周期性拟序花纹。计算结果见图 5。在固定坐标中, 边界层中周期性出现倾斜涡斑 (图 5 (a)), 最大涡量位于涡眼处; 随流观察, 这些涡斑呈现周期性花纹 (图 5 (b))。将对应于某一花纹上各点处的速度型画出 (图 5 (c)), 就可清晰地看出每一花纹周期, 速度

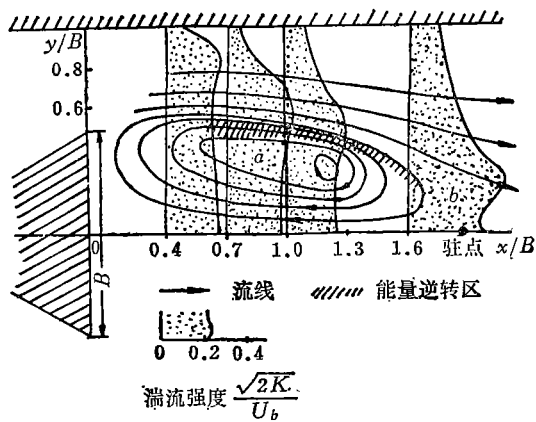


图 4 钝体尾涡流线及湍流强度计算结果  
Fig.4 The calculation results of mean streamlines and turbulent kinetic energy distribution in vortex tail



型将首先在  $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}$  最大处 (线性底层外缘) 产生凹陷, 然后凹陷处逐渐上升, 速度型渐趋饱满, 最后恢复为  $1/7$  次方速度型。根据方程 (19)、(20) 中拟序力项  $-\frac{\partial}{\partial y} v_r \Omega$ 、 $+\frac{\partial}{\partial x} v_r \Omega$  进行分析可知, 拟序花纹的舒卷方向完全由瞬时速度型得出的拟序力项决定。作者曾做过如下试算: 计算程序中去掉负弥散力项, 则因入口边条采用湍流边界速度型, 在近入口处产生一个不完整的花纹后, 不能恢复湍流速度型, 也不再产生拟序花纹。如保留负弥散力, 全部或部分去掉拟序力项, 即使存在湍流速度型, 也无拟序花纹产生。这表明: 拟序力产生花纹, 负弥散力维持湍流速度型, 并保证花纹周期性。

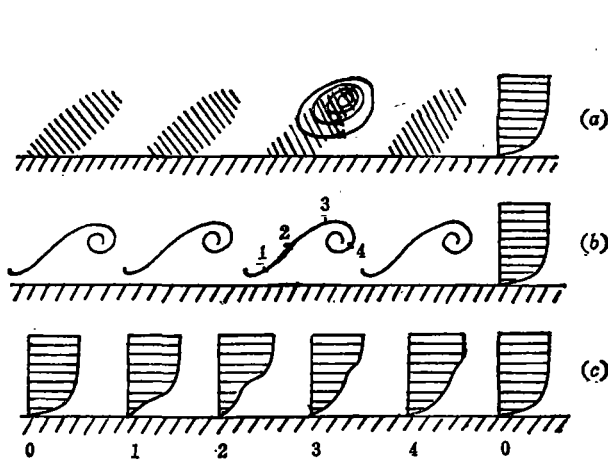


图5 二维边界层中的拟序花纹计算结果

(a) 固定坐标系, 观察时的周期性涡斑; (b) 随流观察时周期性花纹; (c) 速度型的周期性变化。

Fig. 5 The calculation results of coherent patterns in a 2-D boundary layer

(a) periodic vortex speckles in fixed coordinate system  
(b) periodic coherent patterns observed with the flow  
(c) periodic change of velocity profile

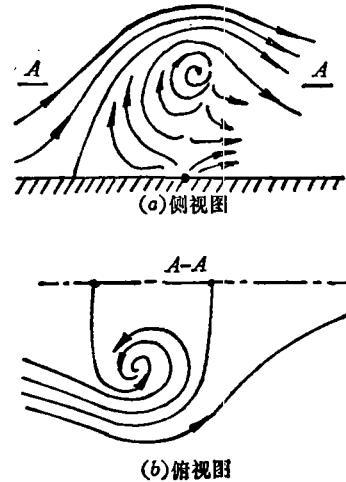


图6 三维边界层中的马蹄涡计算结果

(a) 侧视图; (b) 俯视图。

Fig. 6 Calculation results of the horse shoe vortex in 3-D boundary layer

(a) sideview (b) vertical view

三维壁面边界层计算采用了同样的边界条件和类似的网格划分方式, 算出了成串的三维马蹄涡 (图6), 底层存在快慢斑, 马蹄涡中心线与慢斑中心线重合。与文献[10]的结果符合很好。

计算过程还发现: 扩压管道的逆压梯度有利于产生边界拟序花纹, 花纹周期和外流速度成正比, 和边界层厚度成反比。使用湍流耗散及弥散相互作用理论计算拟序花纹的成功表明: 边界层中产生周期性拟序结构, 湍流涡团的散裂还遵从级联过程; 边界层中局部各向同性粘性的概念是错误的 (把拟序力及负弥散力折合成 Reynolds 应力形式, 就可得出各向异性粘性系数)。

## 七、结 论

1. 湍流是耗散-弥散相互作用的物理过程。
2. 湍流动量方程有二个, 由强旋湍流动量方程 (11) 与弱旋湍流动量方程 (12) 并

列组成。

3. 强旋动量方程反映了拟序现象、湍流涡团散裂弛豫现象的物理实质。

4. 湍流能量方程 (22) 同时含有耗散函数和弥散函数。弥散函数可正可负, 和耗散结构有密切关系。

### 参 考 文 献

- [1] Miles, John W., Solitary Waves, Ann. Rev. Fl. Mech., (1980), Vol. 12, pp. 11~43.
- [2] 张学铭, 控制论在现代物理中应用伪势理论和孤立子理论, 数学物理学报, Vol. 1, No. 1, (1981), p59.
- [3] Lin, C. C., Galaxies, Turbulence, and Plasmas, 第二届亚洲流体力学会议论文集, p 1.
- [4] Gao Ge, On the Localized Stability of Vortices, 6th International Symposium on Air Breathing Engines. Paris, June. (1983).
- [5] Lannder, D. E., Spalding, D. B., The Numerical Computation of Turbulent flow, Comp. Method in Appl. Mech. and Eng. Vol, 3, 1974, pp269~288.
- [6] Reynolds, W. C., Computation of Turbulent Flows, Ann. Rev. Fl. Mech. 1976, Vol. 8, p 183.
- [7] Gao Ge, The ADC Method, a Rapid Numerical Method for Solving Three Dimensional Navier-Stokes Equation, ASME, 82-GT-76.
- [8] 高歌, K-ε湍流模型计算钝体尾涡的结果分析, 工程热物理学报, Vol. 5, No. 2, (1984), p 210.
- [9] S. Fujii, M. Gomi and K. Equeci, Cold Flow Tests of a Bluff-Body Flame Stabilizer. J. Fluids Eng. Vol. 100, Sep. (1978), p 323.
- [10] Head, M. R., Bandyopadhyay, P., New Aspects of Turbulent Boundary-Layer Structure, J. Fluid Mech. (1981). Vol. 107, pp297~337.

## A THEORY OF INTERACTION BETWEEN DISSIPATION AND DISPERSION FOR TURBULENCE

*Gao Ge*

*(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)*

Abstract

A theory of interaction between dissipation and dispersion for turbulence and a pair of new momentum equations are presented. The deduction of the theory is based upon the following ideas:

a) Turbulent flows possess the properties of vortex decay, dissipation and soliton dispersion. Since the dissipation means entropy rise and forbids inversion, the fact of turbulent energy inversion shows that the turbulence theory considering only dissipation as dominant has neglected another important aspect of turbulent flow, i. e. dispersion.

b) Whatever form the 2nd partial derivative takes in the momentum equation its corresponding term in the energy equation must be positive. In fact, this is a concrete application of the generalized theory of entropy rise.

Based on the stability analysis of turbulent flow, the relation between the destabilizing factors and the turbulent energy production is established (Eqn 10). A moving coordinate system along a temporal mean streamline is adopted. The coordinate system is radically different from either the Euler or the Lagrange coordinates. The loss of stability does not mean the TMSL is destroyed but means eddies are displaced off the track of the TMSL or bursted away. Actually, this is the energy exchange between the collective temporal mean flow and the discretized turbulent eddies. In order to keep the viscous dissipative terms in the turbulent energy production rate (Eqn 10) positive, two coexisting momentum equations of turbulent flow have been derived: one for strong vorticity (Eqn 11) and the other for weak vorticity (Eqn 12). Most models of turbulence in the published literature may be included in the domain of Equation 12. In previous investigation forms like Equation 11 were absent. A lot of difficult turbulence problems, such as the coherent patterns, the energy inversion, the decay or halt in cascading down of turbulent energy through the energy spectrum and the anisotropy, can be solved by Equation 11.

The physical meaning of turbulent energy inversion is that turbulent eddies possess the duality of wave and particle, and can be rectified to be the unidirectional flow by Coriolis force in the particular region. The 2nd partial derivative of vorticity in the region has large value that signifies strong negative dispersion. The new energy equation of turbulent flow (Eqn 22) contains both dissipation function  $\phi$  and dispersion function  $\psi$ .  $\phi$  is always positive. But  $\psi$  may be positive or negative and allows energy inversion.

Successful numerical computations of typical turbulence problems have been obtained. The calculations of the coherent patterns in boundary layers and the energy inversion within a complex vortex tail are provided. The theoretical analyses and the numerical calculations have revealed that the theory possesses good generality and gives a reasonable explanation of the physical meaning of turbulence.