

文章编号: 1000-6893(2004)02-0125-05

# 结构在环境激励下的模态参数辨识

史东锋<sup>1</sup>, 许 锋<sup>1</sup>, 申 凡<sup>1</sup>, 郑 敏<sup>2</sup>

(1. 南京航空航天大学 航空宇航学院, 江苏 南京 210016)

(2. 南京航空航天大学 民航学院, 江苏 南京 210016)

## Modal Parameter Identification of Structure in Ambient Excitation

SHI Dong-feng<sup>1</sup>, XU Feng<sup>1</sup>, SHEN Fan<sup>1</sup>, ZHENG Min<sup>2</sup>

(1. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

(2. College of Civil Aviation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**摘 要:** 针对传统模态辨识方法存在的缺陷,研究了工程结构在环境激励下的模态参数的辨识问题。通过各点测试数据的协方差数据构成 Hankel 矩阵,运用随机子空间实现进行系统矩阵的辨识。经飞机模型的环境激励分析验证,上述方法具有理想的辨识精度,在大型结构的模态辨识领域,拥有广阔的应用前景。

**关键词:** 模态测试; 子空间方法; 环境激励

**中图分类号:** TB122 **文献标识码:** A

**Abstract:** Focusing on the defects of the classical modal parameter estimation approach, this paper investigates a novel technique for modal parameter identification of structures under operation conditions. Stochastic subspace realization is introduced to determine the system matrix only using output data. The performance of the method is critically evaluated for an airplane model. The results of experiment show that the above method has the same accuracy as the classical modal estimation method and possesses a broad application prospect in parameter identification of structures under operation conditions.

**Key words:** modal testing; subspace identification; ambient excitation

传统的模态参数辨识是在非工作状态下,采用人工激励通过测量工程结构的激振力和响应,进而采用频响函数或脉冲响应函数来识别模态参数,该方法在工程实践中取得了良好的效果。但在以下方面存在着明显的不足。

首先,传统方法的测试数据大多是在试验条件下得到的,结构内部各部件间的摩擦、间隙、外界载荷和边界条件这些因素,会直接影响到结构的模态特性,使得实验模态参数与环境激励下的模态参数存在明显的差异。G. H. James<sup>[1]</sup>等人的研究表明,风力发电机在工作和非工作条件下的固有频率相差 1%,阻尼比的差异为 230%。Roberts 和 Pearson<sup>[2]</sup>对一个九跨、长 840m 的大桥进行了监测,在为期一年的监测中,发现环境条件的变化将直接导致系统特征频率变化 3%~4%。其次,一些大型的工程结构通常需要花费大量的人力、特殊的设备去激励,大大增加了模态辨识的成本和难度,比如大型桥梁的模态测试,往往采用发射火箭的方式对桥梁施加激励,不仅增加了测

试成本,而且还会对桥梁的安全构成严重的威胁。此外,激励信号很难完全覆盖所有频带,因而不能保证激励出工程结构的所有模态。

在工程实践中,一些工程结构在工作状态下只受到环境激励,如海洋平台受海浪和风的激励,桥梁受风力和车辆激励,而这些激励源的输入信号是无法得到的。根据线性系统理论,系统的行为由输入、传递函数和输出所确定,知道了其中的两个基本要素,则第 3 个要素惟一确定。因此,如何只利用响应信号,测试大型工程结构(如飞行器、海洋平台、核反应堆和桥梁等)在环境激励下的工作模态参数,进而通过参数的变化实现对大型工程结构的在线监测和故障诊断,就成为摆在工程技术人员面前的一个课题。

目前在环境激励条件下的模态识别方法主要包括功率谱和 multidimensional ARMA 建模方法。Eberhard-Luz 等人<sup>[3]</sup>利用谱峰值法提取模态参数,首先通过功率谱密度函数的峰值得到自然频率,然后采用半功率法得到阻尼,最后计算所测各响应点间参考点之间的互谱密度与参考点自谱密度的比值(复传递率)得到振型。由于工作状态下的响应数

收稿日期:2003-03-03; 修订日期:2003-05-14

基金项目:国家自然科学基金(50205012)、航空基金(02152067)及中国博士后科学基金(2002032193)资助项目

据总是被测量噪声严重污染,因此所得的结果总不能令人满意。Luc Hermans 等<sup>[4]</sup>在输入为白噪声且具有零均值的假设下,利用实测响应数据建立自回归模型,将一个由 AR 系数组成的矩阵进行特征值分解,得到特征值和特征向量,进而获得模态参数,由于该方法涉及到求解一个多元非线性的最优化问题,因而会导致收敛性不能保证,局部最小以及大量计算时间的消耗,得到的结构参数不太理想。

本文针对上述大型结构在工作条件下,其所受的环境激励近似为一随机激励的特点。以状态空间的形式来描述各测点的振动响应时间序列,并通过随机子空间实现方法求取工程结构的系统矩阵和输入输出矩阵,相当于对响应时间序列进行了一次维纳滤波,剔除了与输入输出特性无关的随机噪声,相对于传统的子空间辨识方法,可以求得更为精确的结构各阶固有频率、阻尼和振型。

## 1 工程结构的状态方程描述

在时域中进行模态辨识时,通常采用微(差)分方程、传递函数矩阵等形式来描述结构的振动行为,而以上输入输出模型只刻画结构的外部特性而未深入内部。与此不同的是,状态空间模型则可以进一步深入到结构的内部情况,因此可以揭示更多的信息<sup>[5]</sup>。本节主要介绍如何将输入输出模型转化为状态方程模型。

对于一个  $N$  自由度的线性定常振动系统,在激励力的作用下,其振动行为可以采用下述微分方程组来描述

$$M_0 \ddot{x} + C_0 \dot{x} + K_0 x = LU \quad (1)$$

其中:  $x$  为  $N$  维位移向量;  $M_0$ ,  $C_0$ ,  $K_0$  分别表示系统的质量、阻尼和刚度矩阵 ( $N \times N$ );  $L$  为载荷分配矩阵,反映了各激励源在各激励点的载荷分配情况 ( $N \times P$ );  $U$  为外界激励。

将上式与恒等式组合在一起,可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= I\dot{x} \\ \ddot{x} &= -M_0^{-1}K_0x - M_0^{-1}C_0\dot{x} + M_0^{-1}LU \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

令  $X = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}$ , 定义为状态向量,为  $2N$  维,并得状态方程

$$\dot{X} = AX + BU \quad (3)$$

其中:  $A$  称为系统矩阵 ( $2N \times 2N$ );  $B$  称为输入矩阵 ( $2N \times P$ )

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -M_0^{-1}K_0 & -M_0^{-1}C_0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M_0^{-1}L \end{bmatrix} \quad (4)$$

系统的输出向量与状态向量  $x$  间的关系为

$$Y = CX + V \quad (5)$$

其中:  $Y$  为  $m$  维输出向量;  $C$  为结构的输出矩阵 ( $m \times 2N$ );  $V$  为系统的测试噪声 ( $m \times 1$ )。

式(3)、式(5)所述状态方程的离散形式为

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + v_k \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(1)系统的模态特性 ( $\mu$ ,  $\mu$ ) 为如下方程的解<sup>[6]</sup>

$$\left. \begin{aligned} / M_0 \mu^2 + C_0 \mu + K_0 / &= 0 \\ (M_0 \mu^2 + C_0 \mu + K_0) \mu &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

而系统矩阵  $A$  的特征值及特征向量与系统的模态参数 ( $\mu$ ,  $\mu$ ) 间存在如下关系<sup>[6]</sup>

$$\left. \begin{aligned} &= e^{\mu t} \\ \mu &= C \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中:  $t$  为采样间隔。

那么,结构的模态参数:第  $i$  阶固有频率  $f_i$ 、阻尼率  $\zeta_i$  及振型  $\phi_i$  分别为

$$\left. \begin{aligned} f_i &= \frac{1}{2} \frac{1}{t} \sqrt{\ln \phi_i \ln \bar{\phi}_i} \\ \zeta_i &= -\frac{\ln(\phi_i \bar{\phi}_i)}{2 \sqrt{\ln \phi_i \ln \bar{\phi}_i}} \\ \phi_i &= C \phi_i \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

## 2 状态方程的随机子空间实现

从式(8)不难看出,如何根据输入、输出向量估计系统的系统矩阵  $A$  和输出矩阵  $C$ ,是实现模态辨识的关键。

定义输出和输入向量的 Hankel 矩阵为

$$Y_s = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_q \\ y_2 & \cdots & \cdots & y_{q+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_p & \cdots & \cdots & y_{p+q-1} \end{bmatrix}, U_s = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_q \\ u_2 & \cdots & \cdots & u_{q+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_p & \cdots & \cdots & u_{p+q-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

由文献[7]可得

$$Y_s = X_s + GU_s \quad (11)$$

其中:  $G$  为观测矩阵;  $X_s$  为多维时间序列;  $G$  为 Markov 参数的 Toeplitz 矩阵

$$= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix}, X_s = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_q] \quad (12)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ CAB & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ CA^2B & CAB & \ddots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ CA^{p-1}B & CA^{p-2}B & \dots & CAB & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

根据式(11),易得

$$Y_s U_s = Y_s [I - U_s^T [U_s U_s^T]^{-1} U_s] = X_s U_s \quad (14)$$

其中:  $U_s$  为  $U_s$  的正交矩阵.

为得到观测矩阵 的估计值,对上式进行奇异值分解可得

$$YU = [P_1 \quad P_2] \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \quad (15)$$

那么 的估计值为

$$\hat{\phantom{A}} = P_1 \quad (16)$$

根据式(12)不难得 A 和 C 的估计值为

$$A = (P_{p-1})^{-1} (P_{p-1}) \quad (17)$$

其中:  $P_{p-1}$  为  $P_1$  的前  $p-1$  行的块矩阵;  $P_{p-1}$  为  $P_1$  的后  $p-1$  行的块矩阵;  $^{-1}$  代表伪逆.

C 即取观测矩阵 的第 1 行子块矩阵. 另外,可以采用类似于 ERA 方法<sup>[8]</sup>估计系统矩阵 A 和输出矩阵 C.

首先定义如下左移 Hankel 矩阵

$$\vec{Y} = \begin{bmatrix} y_2 & y_3 & \dots & y_{q+1} \\ y_3 & \dots & \dots & y_{q+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{p+1} & \dots & \dots & y_{p+q} \end{bmatrix} \quad (18)$$

相应的 G 和可测矩阵 的左移矩阵为

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} CAB & 0 & \dots & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & \ddots & \ddots & 0 \\ CA^3B & CA^2B & \ddots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ CA^pB & CA^{p-1}B & \dots & CA^2B & CAB \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\vec{\phantom{A}} = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^p \end{bmatrix} \quad (20)$$

将式(18)代入式(14)得

$$\vec{Y}U_s = \vec{X}_s U_s = AX_s U_s \quad (21)$$

由式(14)和式(21)可得系统矩阵 A 为

$$A = (\vec{Y}U_s (YU_s)^{-1}) \quad (22)$$

根据式(14)可得观测矩阵的估计值

$$= P_1 S_1^{0.5} \quad (23)$$

将式(23)代入式(22),可得

$$A = S_1^{-0.5} P_1^T \vec{Y}U_s V_1 S_1^{0.5} \quad (24)$$

随机子空间实现采用奇异值分解技术来实现系统矩阵 A 和输出矩阵 C 的估计. 这是由于:从逼近理论来看,  $P_1 S_1 V_1$  是 H 的子空间的最佳逼近,以尽量少的阶次来描述系统的振动特性,减少了计算量;从信号处理的角度看,上述分解相当于对数据进行了一次维纳滤波,剔除了与输入输出特性无关的随机噪声,提高了子空间辨识算法的抗干扰能力.

### 3 飞机模型环境激励下的模态测试

为了验证本文所提出的方法的科学性和有效性,采用飞机模型作为试件进行试验验证. 该模型为铝制,机长 1000mm,翼展 1100mm. 通过框架上的 3 个悬挂点用橡皮绳将它悬挂起来,模拟飞机在空中飞行时的自由状态. 为了模拟飞行状态下气动噪声的影响,噪声源采用美国惠普公司 HP3562 信号发生器产生的白噪声信号,使用南京航空航天大学振动工程研究所自行研制的两个 HEV-20 型 (2kg) 激振器在两侧机翼激振. 框架上布置 24 个扬州无线电二厂生产的 CA-YD-107 型压电晶体加速度传感器测量各点响应信号(测点布置见图 1),采用南京航空航天大学振动工程研究所自行研制的 64 通道 MVMAS-3 多点激振和测量分析系统(见图 2)进行数据采集.

首先采用传统的模态实验方法对系统进行激



图 1 飞机模型测点及激励点布置图

Fig. 1 The airplane model with distribution of transducers and shakers

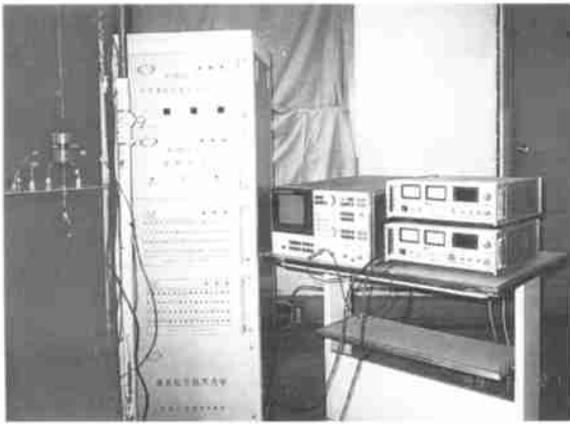


图2 环境激励试验测试系统

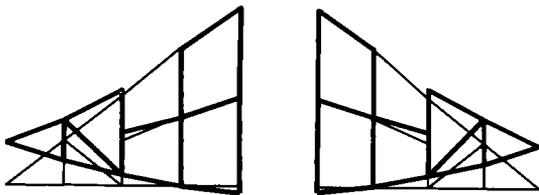
Fig.2 Ambient vibration measurement system

励,对24个测点响应和2点激励信号同时进行采集,每个通道的采样点数为6144,采样频率为512Hz,通过多点适调算法得到它的15阶模态参数(不包括刚体模态),模态频率和阻尼比如表1所示,前三阶模态振型如图3所示。以此作为参考数据,用来同随机子空间实现算法得到的结果进行比较。

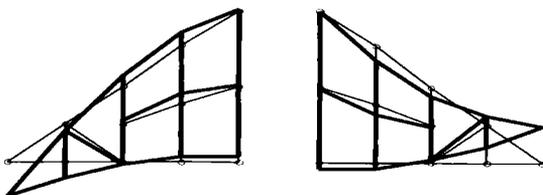
表1 适调激振法所得飞机模型模态频率和阻尼比

Table 1 Modal frequencies and damping ratios of airplane model via harmonic excitation method

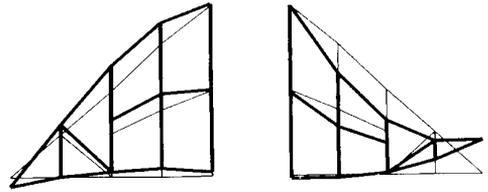
模态阶数	1	2	3	4	5
频率/ Hz	14.8	23.6	35.14	45.02	52.5
阻尼比/ %	5.14	0.86	4.25	1.67	3.11
模态阶数	6	7	8	9	10
频率/ Hz	63	69	98.7	107.34	112.9
阻尼比/ %	1.50	1.45	1.36	0.93	1.58
模态阶数	11	12	13	14	15
频率/ Hz	143.5	151.54	158	170	173.3
阻尼比/ %	0.70	0.39	0.48	1.05	0.54



(a) 1阶模态振型



(b) 2阶模态振型

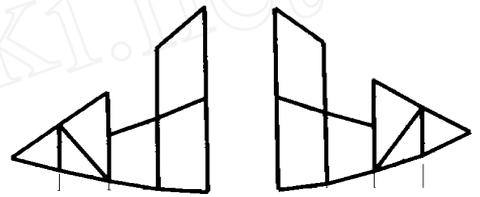


(c) 3阶模态振型

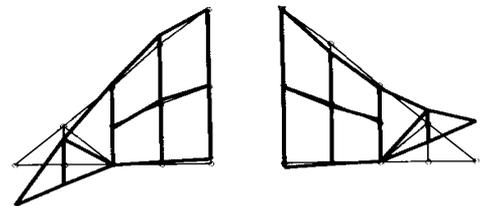
图3 适调激振法所得模态振型

Fig.3 The first three modal shapes via harmonic excitation method

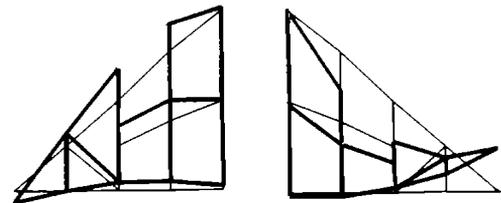
由于飞机在飞行状态下的环境激励可以近似为一随机激励,为此用HP3562产生白噪声信号来驱动激振器模拟飞机的环境激励,只采集24路响应信号,然后采用子空间算法识别飞机模型的模态参数,模态频率和阻尼如表2所示,前三阶模态振型如图4所示。不难看出其结果与适调激振法的结果非常一致。



(a) 1阶模态振型



(b) 2阶模态振型



(c) 3阶模态振型

图4 环境激励下子空间随机实现所得模态振型

Fig.4 The first three modal shapes via stochastic subspace realization in ambient excitation

#### 4 结论

研究了环境激励下只利用响应数据进行模态辨识的随机子空间实现方法,经飞机模型的环境激励实验,与传统的多点适调方法相比(需要同时测取响应和激励信号),在只利用响应数据的

表2 环境激励下随机子空间实现所得模态频率和阻尼比  
Table 2 Modal frequencies and damping ratios of airplane model via stochastic subspace realization in ambient excitation

模态阶数	1	2	3	4	5
频率/ Hz	14.9	23.4	35.3	45.0	52.3
阻尼比/ %	5.44	0.96	4.5	1.7	3.1
模态阶数	6	7	8	9	10
频率/ Hz	63.4	69.2	98.7	107.4	113.1
阻尼比/ %	1.40	1.48	1.43	1.1	1.78
模态阶数	11	12	13	14	15
频率/ Hz	143.9	151.4	158.4	170.4	173.8
阻尼比/ %	0.81	0.49	0.68	1.15	0.64

条件下,依然具有类似的识别结果。从而证明该方法在确保识别精度的前提下,可以大大降低模态试验的设备需求和工作量,为模态试验由实验室面向工程实践提供了有效的技术支撑。本文仅探讨了环境激励为随机激励这一工程实践中较常见形式下的结构参数的辨识问题,而更为复杂的、广义激励形式下辨识问题值得进一步研究。

### 参 考 文 献

- [1] James III G H, Carne T G. The natural excitation technique (NExT) for modal parameter extraction from operating structure[J]. *Modal Analysis: the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 1995, 10 (4): 260 - 277.
- [2] Roberts G P, Pearson A J. Health monitoring of structures towards a stethoscope for bridges[A]. *Proceeding of ISMA 23. the International Conference on Noise and Vibration Engineering*[C]. Leuven, Belgium, 1998. 342 - 350.
- [3] Luz E, Wallaschek J. Experiment modal analysis using ambient vibration[J]. *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 1992, 7(1): 29 - 39.
- [4] Hermans L, Mathieu L, et al. Modal parameter extraction from in-operation data[A]. *Proceedings of the 15<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference*[C]. Orlando, FL, USA, 1997. 531 - 539.
- [5] 方崇智, 萧德云. 过程辨识[M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.

(Fang C Z, Xiao D Y. Process identification [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1987.)

- [6] 史东锋. 工程结构工作模态监测方法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2000.  
(Shi D F. Research on monitoring approaches to operational deflection shapes of engineering structures[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2000.)
- [7] Verhaegen M, Dewilde P. Subspace modal identification part I: the output-error state-space model identification class of algorithms[J]. *International Journal of Control*, 1992, 56(5): 1187 - 1210.
- [8] van Overschee, de Moor B. Subspace identification for linear systems: theory-implementation & applications [M]. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996.

#### 作者简介:



史东锋(1972 - ) 男, 陕西咸阳人, 南京航空航天大学航空宇航学院副教授, 1998年毕业于西安交通大学机械制造专业, 博士。2000年于南京航空航天大学博士后出站, 2001年赴香港科技大学作访问研究。现主要从事机械系统的辨识、监测、故障诊断和控制等方面研究。E-mail: dfshi@hotmail.com, 联系电话: 86-25-84895827



许锋(1964 - ) 男, 江苏镇江人, 副教授, 博士。2001年毕业于南京航空航天大学机械设计及理论专业, 现在南京航空航天大学航空宇航学院从事博士后研究。主要研究方向为振动测试与控制、飞行器冲击动力学反问题辨识等。E-mail: xf\_sxh@sina.com, 联系电话: 86-25-84893082

申凡(1971 - ) 男, 江西瑞金人, 南京航空航天大学航空宇航学院讲师。1995年毕业于南京航空航天大学振动、冲击、噪声专业, 硕士。2000年至2001年在香港科技大学作访问研究, 主要从事振动测试与控制方面研究与开发。E-mail: shenfanzm@163.com

郑敏(1972 - ) 女, 山东阳谷人, 南京航空航天大学民航学院副教授, 博士。2000年毕业于南京航空航天大学机械设计及理论专业, 2002年于南京理工大学机械学院博士后出站, 现主要从事民航教学与科研工作。E-mail: zhengminsf@163.com

(责任编辑: 李铁柏)