

# 认知 MIMO MAC 最优迭代注水算法

魏飞, 杨震

(南京邮电大学 宽带无线通信与传感网技术教育部重点实验室, 江苏 南京 210003)

**摘 要:** 研究发送功率以及干扰温度约束下的认知多入多出多址接入信道 (MIMO MAC) 的速率和最大化问题。通过部分对偶分解技术松弛干扰温度约束, 原始问题被分解为较易处理的子问题, 并提出一种迭代算法, 通过交替进行对偶变量更新与迭代注水运算求解使得速率和最大的最优发送协方差矩阵。最后通过仿真表明算法的有效性。

**关键词:** 认知无线电; 多址接入信道; 迭代注水; 干扰温度; 部分对偶分解

中图分类号: TN92

文献标识码: B

文章编号: 1000-436X(2011)11-0133-07

## Optimum iterative water-filling algorithm for cognitive MIMO MAC

WEI Fei, YANG Zhen

(Key Lab of Broadband Wireless Communication and Sensor Network Technology, Ministry of Education,  
Nanjing University of Posts & Telecommunications, Nanjing 210003, China)

**Abstract:** The sum-rate maximization problem of the cognitive multiple-input multiple-output multiple access channel (MIMO MAC) under transmit power and interference temperature constraints was addressed. By exploiting the partial dual decomposition technique to relax the interference temperature constraint, the original problem was decomposed into more tractable subproblems. An iterative algorithm, in which the dual variable update and the iterative water-filling computation were performed alternately, was proposed to obtain the optimum transmit covariance matrices that achieved the maximum sum-rate. Finally, simulation results have been presented to verify the effectiveness of the algorithm.

**Key words:** cognitive radio; multiple access channel; iterative water-filling; interference temperature; partial dual decomposition

### 1 引言

可分配频谱资源的短缺以及已分配频谱利用率偏低的差异现状已成为制约无线通信发展的瓶颈。认知无线电<sup>[1]</sup>技术通过认知无线电 (CR, cognitive radio) 用户或称为次用户 (SU, secondary user) 与主用户 (PU, primary user) 共享频谱资源的方式来最大化频谱利用率, 作为一种解决频谱资源短缺

困境的有效技术手段正受到广泛的研究。在 CR 场景中, CR 用户通常可采用基于频谱空洞 (spectrum hole) 或干扰温度约束的方式与 PU 共享频谱资源, 前者通过检测 PU 的活动性, 当发现 PU 处于静默状态时 (即 PU 不在通信) 接入 PU 的空闲频谱, 后者则是一种与 PU 同时共存的方式, 通过使得所有 CR 用户对 PU 接收端的叠加干扰限制在 PU 的干扰门限内, 在保证 PU 正常通信的前提下与 PU 共

收稿日期: 2011-04-22; 修回日期: 2011-11-01

基金项目: 国家重点基础研究发展计划 (“973” 计划) 基金资助项目 (2011CB302903); 国家自然科学基金资助项目 (60971129, 61071092); 国家自然科学基金青年基金资助项目 (61001077)

**Foundation Items:** The National Basic Research Program of China (973 Program) (2011CB302903); The National Natural Science Foundation of China (60971129, 61071092); The National Science Foundation for Young Scientists of China (61001077)

享频谱。

近年来, CR 研究从最初的在时域与频域与 PU 共存拓展到空间域, 主要集中在满足给定的 PU 干扰温度约束的条件下如何给 SU 分配资源(如发送功率以及空间方向选择)以优化 CR 系统的某种性能度量<sup>[2-7]</sup>。文献[2]研究了如何设计发送协方差矩阵使得单个 MIMO CR 用户获得的信息速率最大; 文献[3]研究了单个 MIMO CR 用户在完全获取、部分获取以及无法获取其与 PU 接收端信道状态信息时最大化信干噪比(SINR, signal-to-interference-plus-noise ratio)的波束赋形问题; 文献[4]研究了多用户 CR 构成的多址接入信道(MAC, multiple access channel)中最大化加权速率和的最优功率分配问题; 文献[5]研究了在使用零强制的决策反馈均衡器的情况下, 多用户 CR 构成的 SIMO MAC 中的速率和最大化以及 SINR 平衡问题, 提出了联合波束赋形和功率分配算法; 文献[6]研究了在 CR 非完美获取其与 PU 接收端信道状态信息时, 最大化多用户 MISO CR 系统中的最小 SINR 的强健波束赋形设计问题; 文献[7]研究了多用户 CR 系统构成的广播信道(BC, broadcast channel)中使得加权速率和最大的最优发送协方差矩阵设计问题。

然而, 据本文作者所知, 迄今为止尚未有文献研究如何设计 CR 发送协方差矩阵以使得多用户 CR 构成的 MIMO MAC 的速率和最大, 即认知 MIMO MAC 的速率和最大化问题。虽然传统无线环境下的 MIMO MAC 已被充分研究, 如在文献[8]中, Wei Yu 等提出一种迭代注水算法用于求解 MIMO MAC 的速率和最大时的最优发送协方差矩阵。然而, 由于缺乏对 PU 接收端叠加干扰的控制, 已有算法无法确保满足 PU 干扰温度约束, 因而不适用于 CR 系统。同时, 由于文献[8]中的算法只适用于含有一个与发送协方差矩阵相关的约束条件的情况(即单用户最大发送功率约束), 这使得文献[8]中的算法无法直接应用于受发送功率与干扰温度双重约束的 CR 系统。

本文研究了认知 MIMO MAC 的速率和最大化问题, 其主要内容及创新处如下: 本文将认知 MIMO MAC 速率和最大化问题表示为一个凸优化问题, 通过部分对偶分解<sup>[9]</sup>松弛干扰温度约束, 将原始凸优化问题分解为相互联系的 2 个子问题。文中提出一种迭代算法, 通过交替进行对偶变量更新

与顺序迭代注水运算求解分解后的子问题, 从而得到使得速率和最大的 SU 最优发送协方差矩阵。最后通过仿真展示算法的有效性 with 快速收敛特性, 以及 PU 干扰温度约束对认知 MIMO MAC 信道的最大速率和的影响。

## 2 系统模型与问题表述

### 2.1 系统模型

本文考虑的 SU 与 PU 共享频谱的场景如图 1 所示, 包含  $L$  个  $n_t^{(SU)}$  根天线的 SU 发送端, 一个  $n_r^{(SU)}$  根天线的 SU 共同接收端以及  $M$  个 PU 接收端, 考虑 PU 接收端含任意数目天线的一般情况, 且假设第  $j$  个 PU 接收端的天线数目为  $n_{r_j}^{(PU)}$ 。

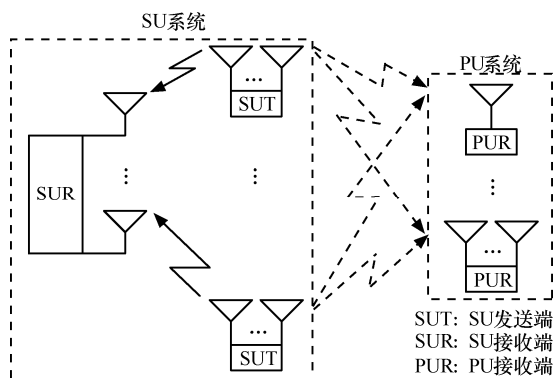


图 1 SU 与 PU 共享频谱场景图

图 2 所示的是上述频谱共享场景所对应的认知 MIMO MAC 信道模型, 简单起见, 图中仅示出 SU 发送端与第  $j$  个 PU 接收端之间的信道。基于上述信道模型, SU 共同接收端接收到的信号向量  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{n_r^{(SU)} \times 1}$  可表示为

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^L \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{n} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{C}^{n_t^{(SU)} \times 1}$ ,  $i=1, \dots, L$  为第  $i$  个 SU 的发送信号向量, 且假设不同的 SU 发送的信号向量是独立的;  $\mathbf{H}_i \in \mathbb{C}^{n_r^{(SU)} \times n_t^{(SU)}}$ ,  $i=1, \dots, L$  为第  $i$  个 SU 到共同接收端的信道系数矩阵;  $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{n_r^{(SU)} \times 1}$  为 SU 接收端的噪声, 包含热噪声以及 PU 干扰信号之和。对于任意给定的 SU 发送信号向量的协方差矩阵  $\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1}^L$ , MIMO MAC 信道的信息速率和<sup>[10]</sup>为

$$r(\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1}^L) = \frac{1}{2} \log \left| \mathbf{I}_{n_r^{(SU)}} + \mathbf{R}_n^{-1} \sum_{i=1}^L \mathbf{H}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_i^H \right| \quad (2)$$

其中,  $SU_i$  的发送协方差矩阵  $\mathbf{Q}_i$  被定义为  $\mathbf{Q}_i \triangleq E\{x_i x_i^H\}$ ,  $\mathbf{R}_n$  被定义为  $\mathbf{R}_n \triangleq E\{nm^H\}$ ,  $E\{\cdot\}$  表示取均值;  $\mathbf{I}_{n_r^{(SU)}}$  为  $n_r^{(SU)}$  阶单位矩阵。同时,  $SU$  发送信号会对  $PU$  接收端造成干扰,  $PU$  接收端  $j$  接收到的  $SU$  的干扰信号  $z_j \in \mathbb{C}^{n_r^{(PU)} \times 1}$  可表示为

$$z_j = \sum_{i=1}^L \mathbf{G}_{ji} x_i \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{G}_{ji} \in \mathbb{C}^{n_r^{(PU)} \times n_t^{(SU)}}$ ,  $i=1, \dots, L$ ,  $j=1, \dots, M$  为  $SU_i$  到  $PU$  接收端  $j$  的信道系数矩阵。

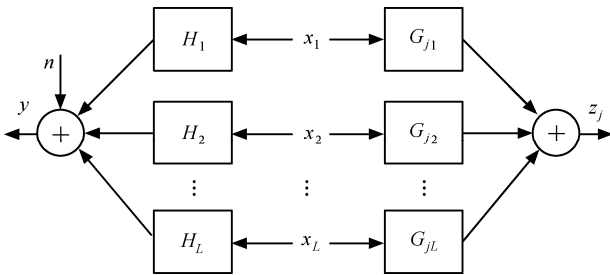


图 2 认知 MIMO MAC 模型

### 2.2 问题表述

每个  $SU$  发送信号时会受到自身发送功率约束, 第  $i$  个  $SU$  的发送协方差矩阵构成的集合  $\mathcal{Q}_i$  可表示为

$$\mathcal{Q}_i \triangleq \left\{ \mathbf{Q}_i \in \mathbb{C}^{n_t^{(SU)} \times n_t^{(SU)}} : \mathbf{Q}_i \succeq 0, \text{Tr}\{\mathbf{Q}_i\} \leq P_i^{\max} \right\} \quad (4)$$

其中,  $P_i^{\max}$  表示  $SU_i$  的最大整体发送功率,  $\succeq$  表示半正定,  $\text{Tr}\{\cdot\}$  表示矩阵的主对角元素之和。

在认知 MIMO MAC 中, 为不影响  $PU$  的正常通信活动,  $SU$  在选择发送协方差矩阵时需使  $PU$  接收到的  $SU$  干扰信号的叠加功率小于一给定值, 即  $PU$  干扰温度约束, 如式(5)所示。

$$E\{z_j z_j^H\} = \sum_{i=1}^L \text{Tr}\{\mathbf{G}_{ji} \mathbf{Q}_i \mathbf{G}_{ji}^H\} \leq P_j^{\text{int}}, \forall j=1, 2, \dots, M \quad (5)$$

其中,  $P_j^{\text{int}}$  为  $PU_j$  可容忍的最大干扰强度, 即干扰门限值。

在给定发送功率约束与  $PU$  干扰温度约束下, 本文研究的认知 MIMO MAC 速率和最大化问题可表述为

$$\begin{aligned} & \max r(\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1}^L) \\ & \text{s.t. } \mathbf{Q}_i \in \mathcal{Q}_i, \forall i=1, \dots, L \\ & \sum_{i=1}^L \text{Tr}\{\mathbf{G}_{ji} \mathbf{Q}_i \mathbf{G}_{ji}^H\} \leq P_j^{\text{int}}, \forall j=1, \dots, M \end{aligned} \quad (6)$$

显然,  $r(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_L)$  为发送协方差矩阵的凹函数, 上述问题为凸优化问题。如不考虑上式中的干扰温度约束, 式(6)则为传统 MIMO MAC 速率和最大化问题, 这样的问题可由多个用户按顺序依次进行迭代注水<sup>[8]</sup>来求解。然而干扰温度约束的存在使得各  $SU$  的发送协方差矩阵互相耦合, 这使得文献[8]中的算法无法通过简单地拓展应用于  $CR$  系统。下面首先通过部分对偶分解<sup>[9]</sup>来去除干扰温度约束的影响。

### 3 部分对偶分解

对式(6)中的原始问题进行部分对偶分解, 松弛  $PU$  干扰温度约束, 可得到 Lagrange 函数为

$$\mathcal{L}(\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1}^L; \lambda) = r(\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1}^L) - \lambda^T \left( \sum_{i=1}^L \text{Tr}\{\mathbf{G}_{ji} \mathbf{Q}_i \mathbf{G}_{ji}^H\} - P_j^{\text{int}} \right)_{j=1}^M \quad (7)$$

其中,  $\lambda \triangleq (\lambda_1, \dots, \lambda_M)^T$ ,  $\lambda_i$  为对应于第  $i$  个  $PU$  干扰温度约束的对偶变量。相应的 Lagrange 对偶函数为

$$\phi(\lambda) = \sup_{\{\mathbf{Q}_i\}} \left\{ \mathcal{L}(\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1}^L; \lambda) \mid \mathbf{Q}_i \in \mathcal{Q}_i, \forall i=1, \dots, L \right\} \quad (8)$$

其中,  $\sup$  表示上确界。

由于原始优化问题(式(6))中目标函数为凹函数, 且干扰温度约束是线性不等式约束, 因而强对偶性存在的条件满足, 由强对偶性定理<sup>[11]</sup>, 式(6)等价于 Lagrange 对偶问题如下

$$\begin{aligned} & \min \phi(\lambda) \\ & \text{s.t. } \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

可以看出, 通过以上部分对偶分解, 原始优化问题被分解为 2 个相对简单的问题, 即子问题(式(8))以及式(9)。由  $\phi(\lambda)$  是关于  $\lambda$  的仿射函数族的点式上确界, 可知  $\phi(\lambda)$  是  $\lambda$  的凸函数, 从而子问题(9)总是存在唯一的最优解。当子问题(式(9))的最优解  $\lambda^*$  被确定后, 使得子问题(式(8))中  $\mathcal{L}(\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1}^L; \lambda^*)$  值最大的  $\{\mathbf{Q}_i^*(\lambda^*)\}_{i=1}^L$  即为取得最大速率和的  $SU$  最优发送协方差矩阵  $\{\mathbf{Q}_i^*\}_{i=1}^L$ , 且此时  $\phi(\lambda^*) = r(\{\mathbf{Q}_i^*\}_{i=1}^L)$ 。

### 4 算法

#### 4.1 求解子问题(式(8))

首先, 需要研究在给定任意  $\lambda$  值时如何求解子

问题(式(8)), 显然子问题(式(8))即为以下的优化问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathcal{L}(\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1}^L; \lambda) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Q}_i \in \mathcal{Q}_i, \forall i=1, \dots, L \end{aligned} \quad (10)$$

观察到优化问题(式(10))类似于传统 MIMO MAC 速率和最大化问题<sup>[8]</sup>, 不同之处在于目标函数带有一个与  $\lambda$  有关的附加项, 因而本文使用与求解传统 MIMO MAC 最大速率和类似的方法: 首先令  $\mathbf{Q}_1$  之外的其他  $\{\mathbf{Q}_i\}_{i \neq 1}$  为常量, 优化  $\mathbf{Q}_1$ , 然后令  $\mathbf{Q}_2$  之外的其他  $\{\mathbf{Q}_i\}_{i \neq 2}$  为常量, 优化  $\mathbf{Q}_2$ , 以此类推循环优化其中的单个变量, 直至达到问题的全局最优解。因此, 优化问题(式(10))等价于所有 SU 分别按顺序求解下面的凸优化问题

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathcal{L}(\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1}^L; \lambda) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Q}_i \in \mathcal{Q}_i \end{aligned} \quad (11)$$

对  $\mathcal{L}(\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1}^L; \lambda)$  中的第一项进行如下分解

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \log \left| \mathbf{I}_{n_r^{(su)}} + \mathbf{R}_n^{-1} \sum_{i=1}^L \mathbf{H}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_i^H \right| \\ &= \frac{1}{2} \log |\mathbf{R}_n^{-1}| + \frac{1}{2} \log \left| \mathbf{R}_n + \sum_{i \neq l} \mathbf{H}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_i^H \right| + \\ & \frac{1}{2} \log \left| \mathbf{I}_{n_r^{(su)}} + \left( \mathbf{R}_n + \sum_{i \neq l} \mathbf{H}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_i^H \right)^{-1} \mathbf{H}_l \mathbf{Q}_l \mathbf{H}_l^H \right| \end{aligned} \quad (12)$$

注意到式(12)中的前两项为与  $\mathbf{Q}_l$  无关的常量, 所以, 对任意给定的对偶变量  $\lambda$ , 优化问题(式(11))等价于

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2} \log \left| \mathbf{I}_{n_r^{(su)}} + \left( \mathbf{R}_n + \sum_{i \neq l} \mathbf{H}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_i^H \right)^{-1} \mathbf{H}_l \mathbf{Q}_l \mathbf{H}_l^H \right| - \\ & \sum_{j=1}^M \lambda_j \left( \sum_{i=1}^L \text{Tr}\{\mathbf{G}_{ji} \mathbf{Q}_i \mathbf{G}_{ji}^H\} - P_j^{\text{int}} \right) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Q}_l \in \mathcal{Q}_l \end{aligned} \quad (13)$$

由于优化问题(式(13))是凸优化问题, 因而其最优解的充分必要条件即为 KKT (karush-kuhn-tucker) 条件, 给出如下:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \left( \mathbf{H}_l^H \left( \mathbf{R}_n + \sum_{i \neq l} \mathbf{H}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_i^H \right)^{-1} \mathbf{H}_l \right) + \mathbf{Q}_l \right]^{-1} - \\ & \sum_{j=1}^M \lambda_j \mathbf{G}_{jl}^H \mathbf{G}_{jl} - \mu_l \mathbf{I}_{n_r^{(su)}} + \boldsymbol{\Psi}_l = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mu_l \geq 0, P_l^{\text{max}} - \text{Tr}\{\mathbf{Q}_l\} \geq 0, \mu_l (P_l^{\text{max}} - \text{Tr}\{\mathbf{Q}_l\}) = 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{Q}_l \succeq \mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}_l \succeq \mathbf{0}, \text{Tr}\{\mathbf{Q}_l \boldsymbol{\Psi}_l\} = 0 \quad (16)$$

其中,  $\mu_l$  与  $\boldsymbol{\Psi}_l$  分别为对应于最大发送功率约束以及正半定发送协方差矩阵约束的对偶变量。

由 KKT 条件可知优化问题(式(13))的最优解  $\mathbf{Q}_l$  可通过以下的注水运算求解:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_l &= \mathcal{WF}_l(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_{-l}; \lambda) \\ &= \frac{1}{2} \left( \mu_l \mathbf{I}_{n_r^{(su)}} + \sum_{j=1}^M \lambda_j \mathbf{G}_{jl}^H \mathbf{G}_{jl} - \boldsymbol{\Psi}_l \right)^{-1} - \\ & \left( \mathbf{H}_l^H \left( \mathbf{R}_n + \sum_{i \neq l} \mathbf{H}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_i^H \right)^{-1} \mathbf{H}_l \right)^{-1} \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $\mu_l$  的选择需使式  $\text{Tr}\{\mathbf{Q}_l\} \leq P_l^{\text{max}}$  成立,  $\boldsymbol{\Psi}_l$  的选择需使  $\mathbf{Q}_l \succeq \mathbf{0}$ 。由于式(17)中的计算需要确定 2 个对偶变量  $\mu_l$  以及  $\boldsymbol{\Psi}_l$ , 同时  $\boldsymbol{\Psi}_l$  还是矩阵变量, 这使得通过式(17)计算最优解几乎不可能。但利用  $\mathbf{Q}_l \succeq \mathbf{0}$  等价于  $\mathbf{Q}_l$  的所有特征值非负的性质, 可将式(17)等价于以下更具有实际操作意义的运算符:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_l &= \mathcal{WF}_l(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_{-l}; \lambda) \\ &= \left[ \frac{1}{2} \left( \mu_l \mathbf{I}_{n_r^{(su)}} + \sum_{j=1}^M \lambda_j \mathbf{G}_{jl}^H \mathbf{G}_{jl} \right)^{-1} - \right. \\ & \left. \left( \mathbf{H}_l^H \left( \mathbf{R}_n + \sum_{i \neq l} \mathbf{H}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_i^H \right)^{-1} \mathbf{H}_l \right)^{-1} \right]_{\text{eig}}^+ \end{aligned} \quad (18)$$

其中,  $[\mathbf{A}]_{\text{eig}}^+$  被定义为  $[\mathbf{A}]_{\text{eig}}^+ \triangleq \sum_i [\lambda_i]^+ u_i u_i^H$ ,  $\lambda_i$  和  $u_i$  分别为矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值及相应的特征向量,  $[a]^+$  被定义为  $[a]^+ \triangleq \max(0, a)$ 。此时  $\mu_l$  值的选择只需通过简单的线性搜索方法(如二分搜索)即可确定。

算法 1 所示的是求解子问题(式(8))的顺序迭代注水算法的主要步骤。由于算法 1 中的迭代注水总是使得子问题(式(8))中的目标函数值单调非递减, 而子问题(式(8))中的目标函数具有上界且是凹的, 因而算法 1 总是能够收敛到唯一最优解。

**算法 1** 顺序迭代注水。

**步骤 1** 初始化迭代指数  $k_1 = 0$ ;

**步骤 2** 所有 SU 按下式更新发送协方差矩阵  $\mathbf{Q}_i^{(k_1+1)}(\lambda)$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} \mathcal{WF}_i(\mathbf{Q}_i^{(k_1)}(\lambda), \mathbf{Q}_{-i}^{(k_1)}(\lambda); \lambda), & \text{如果 } i = k_1 \bmod L \\ \mathbf{Q}_i^{(k_1)}(\lambda), & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

其中, 式(19)中的注水运算  $\mathcal{WF}(\cdot)$  见式(18),  $\text{mod}$  表示模运算;

**步骤 3** 若满足停止条件,  $k_1 \leftarrow k_1 + 1$  停止并输出  $\mathbf{Q}_i^*(\lambda) = \mathbf{Q}_i^{(k_1)}(\lambda)$ ,  $i=1, \dots, L$ ;

**步骤 4** 设置, 返回步骤 2。

#### 4.2 求解子问题(式(9))

由于子问题(式(9))中的目标函数  $\phi(\lambda)$  是不可微的, 这使得一些基于梯度的方法(如最速下降法、牛顿法)无法应用于求解  $\phi(\lambda)$  的极值, 因而本文使用基于次梯度的方法。首先需要确定函数  $\phi(\lambda)$  的次梯度, 对于函数  $\phi(\lambda)$  的次梯度, 有如下命题成立

**命题 1**  $\phi(\lambda)$  在任意  $\lambda$  点处的次梯度为  $\nabla_i \phi(\lambda) = \left( P_j^{\text{int}} - \sum_{i=1}^L \mathbf{G}_{ji} \mathbf{Q}_i^*(\lambda) \mathbf{G}_{ji}^H \right)_{j=1}^M$ , 其中  $\mathbf{Q}_i^*(\lambda)$  为子问题(式(8))的最优解。

**证明** 令  $\{\mathbf{Q}_i^*(\hat{\lambda})\}_{i=1}^L$ ,  $\{\mathbf{Q}_i^*(\lambda)\}_{i=1}^L$  分别为任意给定  $\hat{\lambda}$  与  $\lambda$  时子问题(式(8))的最优解。因而下二式成立

$$\phi(\lambda) = \mathcal{L}(\{\mathbf{Q}_i^*(\lambda)\}_{i=1}^L; \lambda) = r(\{\mathbf{Q}_i^*(\lambda)\}_{i=1}^L) - \sum_{j=1}^M \lambda_j \left( \sum_{i=1}^L \text{Tr}\{\mathbf{G}_{ji} \mathbf{Q}_i^*(\lambda) \mathbf{G}_{ji}^H\} - P_j^{\text{int}} \right) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \phi(\hat{\lambda}) &= L(\{\mathbf{Q}_i^*(\hat{\lambda})\}_{i=1}^L; \hat{\lambda}) \\ &\geq L(\{\mathbf{Q}_i^*(\lambda)\}_{i=1}^L; \hat{\lambda}) = r(\{\mathbf{Q}_i^*(\lambda)\}_{i=1}^L) - \sum_{j=1}^M \hat{\lambda}_j \left( \sum_{i=1}^L \text{Tr}\{\mathbf{G}_{ji} \mathbf{Q}_i^*(\lambda) \mathbf{G}_{ji}^H\} - P_j^{\text{int}} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

由式(21)减去式(20)易知:

$$\begin{aligned} \phi(\hat{\lambda}) - \phi(\lambda) &\geq \sum_{j=1}^M (\hat{\lambda}_j - \lambda_j) \cdot \left( P_j^{\text{int}} - \sum_{i=1}^L \text{Tr}\{\mathbf{G}_{ji} \mathbf{Q}_i^*(\lambda) \mathbf{G}_{ji}^H\} \right) \\ &= (\hat{\lambda} - \lambda)^T \left( P_j^{\text{int}} - \sum_{i=1}^L \mathbf{G}_{ji} \mathbf{Q}_i^*(\lambda) \mathbf{G}_{ji}^H \right)_{j=1}^M \end{aligned} \quad (22)$$

而对于凸函数  $\phi(\lambda)$ , 向量  $d$  为其在  $\lambda$  点处的次梯度<sup>[11]</sup>, 如  $d$  满足以下的不等式:

$$\phi(\hat{\lambda}) \geq \phi(\lambda) + (\hat{\lambda} - \lambda)^T d \quad (23)$$

最后, 比较式(22)和式(23)易知命题成立。证毕。

算法 2 中所示的是基于次梯度投影法<sup>[12]</sup>(projected subgradient method) 的对偶变量  $\lambda$  更新算法的主要步骤。文献[12]中证明了次梯度投影法能够收敛到最优解, 由于  $\phi(\lambda)$  是凸函数, 因而算法 2 总是能够收敛到唯一最优对偶变量。当最优对偶变量  $\lambda^*$  被取得后, 其相应的  $\mathbf{Q}_i^*(\lambda^*)$ ,  $i=1, 2, \dots, K$  即为所求的 SU 最优发送协方差矩阵。

**算法 2** 对偶变量更新。

**步骤 1** 选择任意  $\lambda^{(0)} \geq 0$ ,  $\mathbf{Q}_i^{(0)}(\lambda^{(0)}) \in \mathcal{Q}_i$ ,  $i=1, \dots, L$ , 初始化迭代指数  $k_2=0$ ;

**步骤 2** 调用算法 1 计算  $\mathbf{Q}_i^*(\lambda^{(k_2)})$ ;

**步骤 3** 按下式更新对偶变量。

$$\lambda^{(k_2+1)} = \left[ \lambda^{(k_2)} - \alpha^{(k_2+1)} \nabla_{\lambda^{(k_2)}} \phi(\lambda) \right]^+ \quad (24)$$

其中,  $\alpha^{(k_2+1)}$  为第  $k_2+1$  次迭代的步长;

**步骤 4** 若  $\|\lambda^{(k_2+1)} - \lambda^{(k_2)}\| \leq \varepsilon$ , 停止并输出  $\lambda^* = \lambda^{(k_2)}$ ,  $\mathbf{Q}_i^* = \mathbf{Q}_i^*(\lambda^{(k_2)})$ , 其中  $\varepsilon$  为控制算法精度的常数;

**步骤 5** 设置  $k_2 \leftarrow k_2 + 1$ , 返回步骤 2。

## 5 仿真结果

本节通过 MATLAB 数值仿真展示本文算法的有效性。仿真中使用的认知无线场景包含有 4 个 2 天线 SU 发送端与一个 2 天线 SU 公共接收端以及 1 个单天线 PU 接收端。简单起见, 设置各个 SU 发送端与 SU 接收端的距离相等为  $d_{ss}$ , 各个 SU 发送端与 PU 接收端的距离相等为  $d_{ps}$ 。仿真中所使用的随机信道系数为 0 均值单位方差循环对称复高斯的, 如表 1 所示; SU 共同接收端的复高斯噪声向量  $n$  是 0 均值、方差  $\sigma_n^2$  的, 简单起见, 归一化  $\sigma_n^2=1$ , 设置 SU 的发送功率相等为  $P$ ; 路径损耗系数设置为  $\gamma^{\text{dB}}$ <sup>[1]</sup>。初始化算法参数  $\lambda^{(0)} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{Q}_i^{(0)}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 。

图 3 中所示的是在表 1 中的信道系数下经典算法与本文算法取得的速率和以及对 PU 的叠加干扰随迭代次数的变化过程, 干扰门限分别设置为  $P^{\text{int}}=2$  与  $P^{\text{int}}=4$ <sup>[2]</sup>。从图中可以看出, 相对于经典算法, 本文算法能够很好地控制 SU 对 PU 的叠加干扰, 满足 PU 的干扰温度约束, 同时, 由于要满足 PU 干扰温度约

注 1 经过路径损耗后的信道系数可表示为  $\mathbf{H}_i = \hat{\mathbf{H}}_i d_{ss}^{-\gamma}$ ,  $\mathbf{G}_{ji} = \hat{\mathbf{G}}_{ji} d_{ps}^{-\gamma}$ ,  $\forall i=1, 2, \dots, L$ ,  $j=1, 2, \dots, M$ 。

注 2 设定干扰门限为 2 倍与 4 倍  $\sigma_n^2$

表 1 信道系数

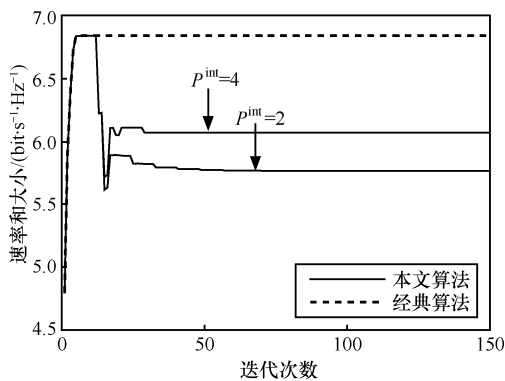
$\hat{H}_1$	$\hat{H}_2$	$\hat{H}_3$	$\hat{H}_4$	$\hat{G}_{11}$	$\hat{G}_{12}$	$\hat{G}_{13}$	$\hat{G}_{14}$
0.537 7+0.318 8	0.725 4-0.124 1i	0.488 9+0.293 9i	0.325 2-0.102 2i	3.578 4-1.349 9i	0.671 5+0.717 2i	-1.068 9-2.944 3i	-0.864 9-0.164 9i
-2.258 8-0.433 6i	0.714 7+1.409 0i	0.726 9+0.888 4i	1.370 3+0.319 2i	2.769 4+3.034 9i	-1.207 5+1.630 2i	-0.809 5+1.438 4i	-0.030 1+0.627 7i
1.833 9-1.307 7i	-0.063 1+1.489 7i	1.034 7-0.787 3i	-0.754 9-0.241 4i				
0.862 2+0.342 6i	-0.205 0+1.417 2i	-0.303 4-1.147 1i	-1.711 5+0.312 9i				

表 2 最优发送协方差矩阵 ( $P/\sigma_n^2=10\text{dB}$ ,  $d_{ss}=1$ ,  $d_{ps}=2$ ,  $\gamma=2.5$ )

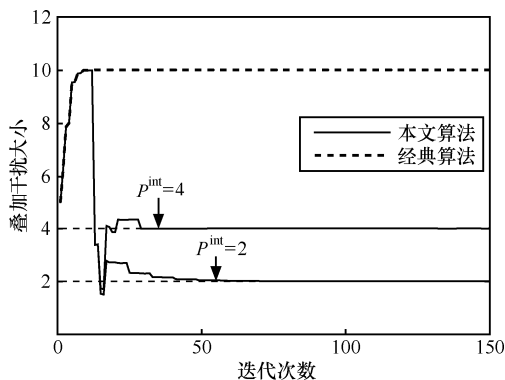
本文算法 ( $P^{\text{int}}=2$ )				本文算法 ( $P^{\text{int}}=4$ )				经典算法 (无干扰温度约束)			
$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$
0.295 9	1.791 2	0 0	1.454 6	1.299 0	2.184 4	0 0	1.269 5	3.717 4	2.942 7	4.700 3	0.850 7
-0.145 8	3.720 6	0 0	3.525 4	-0.555 2	3.863 6	0 0	3.322 8	-3.612 0	3.971 3	3.837 3	2.646 6
+0.308 4i	+0.927 6i		+0.047 3i	+1.372 2i	+1.464 2i		-0.204 4i	+3.210 6i	+2.235 2i	-3.191 4i	-0.882 5i
-0.145 8	3.720 6		3.525 4	-0.555 2	3.863 6		3.322 8	-3.612 0	3.971 3	3.837 3	2.646 6
-0.308 4i	-0.927 6i		-0.047 3i	-1.372 2i	-1.464 2i		+0.204 4i	-3.210 6i	-2.235 2i	+3.191 4i	+0.882 5i
0.393 3	8.208 8		8.545 4	1.686 9	7.815 5		8.730 4	6.282 6	7.057 3	5.299 7	9.149 3

束, 本文算法收敛到最优解所需的迭代次数有所增加, 但仍然具有较快的收敛速度。

表 2 所示是上面的仿真中最后得到的 SU 最优发送协方差矩阵。注意到相对于无干扰温度约束时, 在  $P^{\text{int}}$  为 2 以及 4 时, SU3 的最优发送协方差矩阵  $Q_3 = \mathbf{0}$ 。对任一 SU 来说, 理想的信道状况指的是它到 SU 接收端之间的信道传输特性好而到 PU 接收端之间的信道传输特性差。SU3 的信道状况差于其他 3 个 SU, 因而相对于其他 SU, SU3 在对 PU 产生单位干扰时能够给 CR 系统提供的信息速率是最小的, 因而从系统速率和最大的角度出发, 只有在其他 3 个 PU 都已满功率传输且叠加干扰仍小于干扰门限时才会考虑 SU3, 而由表 2 中可知,  $Q_1$  的主对角元素之和小于发送功率 10, SU1 尚未满功率传输而此时叠加干扰就已达达到干扰门限, 因而 SU3 选择不发送任何信号。同时从表中可以看出, 随着  $P^{\text{int}}$  的上升, SU1 能够使用的发送功率也在增大。



(a) 速率和随迭代次数变化



(b) 叠加干扰随迭代次数变化

图 2 算法收敛过程 ( $P/\sigma_n^2=10\text{dB}$ ,  $d_{ss}=1$ ,  $d_{ps}=2$ ,  $\gamma=2.5$ )

图 4 中所示是给定不同的 PU 干扰门限时, 认知 MIMO MAC 的最大速率和随 SU 收发端的距离的变化曲线图, 同样使用了表 1 中信道系数。从图中可以看出, 随着干扰门限  $P^{\text{int}}$  的不断增大, 认知 MIMO MAC 的速率和不断逼近没有干扰门限限制的传统 MIMO MAC 的最大速率和。在干扰门限增大至  $P^{\text{int}}=12$  时, 由于此时 PU 干扰温度约束失效 (由图 3(b)中经典算法对 PU 产生的叠加干扰小于  $P^{\text{int}}=12$  可知), 从而认知 MIMO MAC 与传统 MIMO MAC 的最大速率和相等。

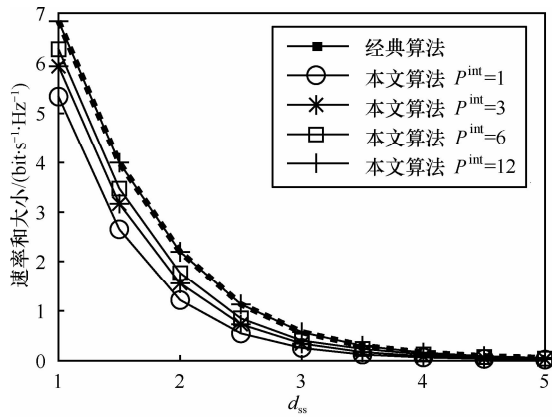


图 4 不同干扰门限下的速率和 vs.  $d_{ss}$  ( $P/\sigma_n^2=10\text{dB}$ ,  $d_{ps}=2$ ,  $\gamma=2.5$ )

## 6 结束语

本文研究了发送功率以及干扰温度约束下的认知 MIMO MAC 的速率和最大化问题,提出了一种迭代注水算法求解使得速率和最大的 SU 最优发送协方差矩阵。仿真结果表明本文算法具有快速收敛的特点且很好地满足了干扰温度约束,能够适用于认知无线电环境。

### 参考文献:

[1] HAYKIN S. Cognitive radio: brain-empowered wireless communications [J]. IEEE Journals on Selected Areas in Communications, 2005, 23 (2): 201-220.

[2] ZHANG R, LIANG Y C. Exploiting multi-antennas for opportunistic spectrum sharing in cognitive radio networks[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2008, 2 (1): 88-102.

[3] ZHANG Y J, SO A M. Optimal spectrum sharing in MIMO cognitive radio networks via semidefinite programming[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2011, 29 (2): 362-373.

[4] ZHANG L, XIN Y, LIANG Y C. Optimal power allocation for multiple access channels in cognitive radio networks[A]. Proceedings of IEEE Vehicular Technology Conference[C]. Singapore, 2008. 1549- 1553.

[5] ZHANG L, LIANG Y C, XIN Y. Joint beamforming and power alloca-

tion for multiple access channels in cognitive radio networks[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2008, 26 (1): 38-51.

[6] ZHENG G, WONG K K, OTTERSTEN B. Robust cognitive beamforming with bounded channel uncertainties[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(12): 4871-4881.

[7] ZHANG L, XIN Y, LIANG Y C. Weighted sum rate optimization for cognitive radio MIMO broadcast channels[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2009, 8(6): 2950-2959.

[8] YU W, RHEE W, BOYD S, *et al*. Iterative water-filling for Gaussian vector multiple-access channels[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(1): 145-152.

[9] PALOMAR D P, CHIANG M. A tutorial on decomposition methods for network utility maximization[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2006, 24 (8): 1439-1451.

[10] GOLDSMITH A, JAFAR S A, JINDAL N, *et al*. Capacity limits of MIMO channels[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2003, 21(5): 684-702.

[11] BERTSEKAS D. Nonlinear Programming[M]. Belmont, MA: AthenaScientific, 1999.

[12] BOYD S, XIAO L, MUTAPCIC A. Subgradient methods[EB/OL]. [http://mit.edu/6.976/www/notes/subgrad\\_method.pdf](http://mit.edu/6.976/www/notes/subgrad_method.pdf), 2003.

### 作者简介:



魏飞 (1982-), 男, 安徽桐城人, 南京邮电大学博士生, 主要研究方向为无线通信与网络信号处理。



杨震 (1961-), 男, 江苏武进人, 博士, 南京邮电大学教授、博士生导师, 主要研究方向为无线通信与网络信号处理、语音信号处理。