

文章编号:1000-6893(2006)06-1209-08

基于移动渐近线方法的结构多刚度拓扑优化设计

张云清, 罗震, 陈立平, 赵永胜

(华中科技大学机械科学与工程学院 CAD 中心, 湖北武汉 430074)

Topological Optimization Design for Multiple Stiffness Structures Using Method of Moving Asymptotes

ZHANG Yun-qing, LUO Zhen, CHEN Li-ping, ZHAO Yong-sheng

(Centre of Computer-Aided Design, School of Mechanical Science & Engineering, Huazhong
University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

摘要: 基于人工密度指数法, 结合序列分层优化方法和折衷规划法, 提出并建立了一种求解复杂工况下连续体结构多刚度拓扑优化设计问题的多目标混合优化策略。连续体结构的多刚度拓扑优化设计问题本质上是一种非线性数学规划问题, 以数学规划方法中的移动渐近线方法为基础, 提出一种具有较佳全局收敛性和单调性特点的序列凸规划近似方法, 该法对于目标函数复杂和多约束的拓扑优化问题具有更好的适用性。通过典型的数值算例证明了所研究方法的有效性。

关键词: 结构拓扑优化; 多刚度; 多目标规划; 数学规划; 移动渐近线方法

中图分类号: TH165 **文献标识码:** A

Abstract: A hybrid multi-objective programming scheme for multi-stiffness continuum topology optimization subject to complex loading cases has been proposed and developed in this paper by using artificial power law, in which sequential hierarchical optimization method and compromising programming method are combined. Multi-stiffness topological optimizations are actually nonlinear mathematical programming problems. A mathematical programming method with globally convergent and monotonous characteristics is presented based on convex approximations of the method of moving asymptotes, which is theoretically well-founded for advanced topology optimizations with complicated objectives and multiple constraints. Numerical application is applied to demonstrate the validity of the presented methodologies.

Key words: structural topology optimization; multiple stiffness; multi-objective programming; mathematical programming; method of moving asymptotes

近年结构拓扑优化设计技术已经应用于多个研究领域^[1-4]。目前对于连续体结构拓扑优化设计研究最多的是单工况下的刚度优化问题, 而对多工况连续体结构拓扑优化问题的研究较少, 一些仅有方法的优化效果并不理想^[5]。文献[6, 7]等针对多工况连续体结构强度拓扑优化设计模型中存在的目标函数非连续现象, 基于独立连续拓扑变量概念及映射变换解法, 建立了多工况应力约束下新的连续模型。连续体结构的多刚度拓扑优化设计中也存在着强度拓扑优化中^[8, 9]类似的现象。以柔度为目标函数进行拓扑优化设计的过程实际上是一个寻求刚度在设计空间最佳分布路径的过程, 结构上作用的任意一个载荷对应一个

最佳的刚度分布形式, 各载荷使目标函数最优化的所有刚度分布形式的组合构成了多载荷条件下的最优拓扑。因为不同的工况对应的最优拓扑形式不一定相同, 多个工况作用时, 各工况对应的多刚度难以同时达到最优, 这使得多工况下的多刚度拓扑优化问题实际上是一种多目标优化问题。很少见到文献以多目标规划方法求解多刚度拓扑优化问题。对于多目标优化问题, 很少能找到一种方法使所有的目标函数同时达到最优。但可以找到一些可能存在的能满足工程要求的次最优化解, 这样的一些优化解也称帕累托优化解。当多工况载荷下各个工况载荷的数值大小的差异较大时, 用传统的方法会造成各工况下单元拓扑值相差较大。在优化过程中, 较小载荷容易丧失刚度传递路径, 小载荷对应的单元拓扑值在优化过程中往往会被删除, 造成所谓的“载荷病态”现象。

收稿日期:2005-06-17; 修订日期:2005-11-24

基金项目:国家“973”重点基础研究发展规划(2003CB716207)、国家“863”高科技计划(2003AA001031)

罗震等^[10]用折衷规划法进行了连续体结构的多刚度拓扑优化设计问题,但对于更复杂的工况载荷,不便于直接用折衷规划法的求解。

准则法以一种间接的方式试图满足一系列与结构行为相关的准则。准则法的发展基本上经历了从经验准则到理性准则的过程。经验准则法是在结构优化的初期依据工程经验建立的一些准则,如等强度设计准则、同步失效准则、满应力准则和满应变能准则等。理性准则法以数学规划方法中的 Kuhn-Tucker 最优化条件作为结构优化设计的准则。Zhou 和 Rozvany^[11]对优化准则法加以改进和推广,用于连续体结构的拓扑优化设计中。优化准则法对于求解具有大量设计变量和单个约束的优化问题,具有很高的优化效率。但对于多约束问题,优化准则法都要使用不同的准则。在每一步迭代中,更新多个 Lagrange 乘子的时间往往多于对设计变量本身的求解;对于不具有凸性的目标,准则法不容易构造设计变量的启发式迭代格式,对于复杂的目标函数,同样不容易构造设计变量的迭代格式。

数学规划法将优化问题归结为在设计空间中由等式约束超曲面和不等式约束半空间所构成的可行域内,寻求位于最小目标等值面上的可行点。凸规划方法更适于处理目标函数复杂且具有多约束的拓扑优化问题,只要求约束函数对设计变量的微分可以通过解析或者数值方法求得。对复杂的拓扑优化问题,凸规划方法具有更好的适定性。MMA 系列方法^[12, 13]属于凸规划方法,它通过引入移动渐近线,将隐式的优化问题转化成一系列显式的可分离的更为简单的严格凸的近似子优化问题。每一步迭代中,可用梯度类算法求解凸近似的子优化问题来获得新的设计变量,而不像 OC 方法那样直接通过一种显式的启发式的迭代格式来进行设计变量的更新。

针对多刚度拓扑优化设计的多目标优化特点,基于 SIMP 人工密度材料模型^[14, 15],结合序列分层优化和折衷规划法,提出一种求解多刚度问题的混合多目标规划方法,这种方法能够灵活有效地求解复杂工况下的刚度拓扑优化问题。同时针对多刚度拓扑优化非线性、多约束和大规模的非线性数学规划特点,基于 MMA 方法,提出一种凸规划优化方法。

1 多刚度拓扑优化的多目标优化策略

对于复杂工况载荷下的多刚度拓扑优化问

题,采取一种混合优化策略。所谓混合优化策略就是将折衷规划法同序列分层优化法结合起来。序列分层法^[16]是常见的将多目标规划问题转化为一系列单目标问题的求解方法,基本思想是将多目标优化问题中的所有单目标分清主次,按其重要程度依次排序分成不同的层,同一层上目标性质相近。然后依次对各层目标函数求最优解,后一层应在前一层最优解集合内寻优。对多刚度拓扑优化问题,按照载荷量级的大小及各载荷对最终有效解的贡献程度,将拓扑优化问题对应的多个载荷依次分成若干层。当然,每一层中可以再次包含多个单目标函数,同一层中的目标函数形成较简单的多刚度子拓扑优化问题,这个多刚度的子优化问题中的目标函数性质比较接近,没有必要继续分层优化,可以直接用折衷规划方法去求解。当然,多刚度拓扑优化问题的序列分层过程要结合实际问题和设计者的工程经验。这样就形成了包含序列分层优化方法和折衷规划方法的混合优化策略。对两层的多刚度拓扑优化问题,数学模型分别如式(1)和式(2)。

$$\begin{aligned} \text{Minimize}_{x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T} : C = & \left\{ \sum_{k=1}^{h_1} \left[(\omega_k)^q \left(\frac{C_k - C_{k,\min}}{C_{k,\max} - C_{k,\min}} \right)^q \right] \right\}^{\frac{1}{q}} \\ \text{Subject to: } & \left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1}^{h_1} \left(\sum_{j=1}^n V_j x_j^k \right) - \bar{V} \leq 0 \\ & 0 < x_{\min} \leq x_j \leq 1 \\ & (j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, h_1) \\ & \mathbf{KU} = \mathbf{F} \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Minimize}_{x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T} : C = & \left\{ \sum_{k=h_1+1}^m \left[(\tilde{\omega}_k)^q \left(\frac{C_k - C_{k,\min}}{C_{k,\max} - C_{k,\min}} \right)^q \right] \right\}^{\frac{1}{q}} \\ \text{Subject to: } & \left\{ \begin{aligned} & C_k(\mathbf{X}) - C_k^* \leq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, h_1) \\ & \sum_{k=h_1+1}^m \left(\sum_{j=1}^n V_j x_j^k \right) \leq \bar{V} \quad (k = h_1 + 1, \dots, m) \\ & 0 < x_{\min} \leq x_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ & \mathbf{KU} = \mathbf{F} \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (2)$$

式中: ω 为第1层优化中单目标的权系数; h_1 为第1层优化中的单目标个数; $\tilde{\omega}$ 为第2层优化中单目标函数的权系数; h_2 为第2层优化中单目标函数个数。权系数取值依据实际问题决定,权系数较大表示该载荷对结构刚度贡献较大,该载荷的优化拓扑在结构拓扑中起较重要的作

用,其他的载荷起辅助的作用,为避免“载荷病态”现象,也不能完全忽略其他载荷的作用。权因子的选择是一个比较困难的方法,具体的选择过程要依据实际问题和设计者的工程实践经验。可以参考文献[16]中的解决方案,本文不再展开。

式(2)中: C_k^* 为前一层有效解; $h_1 + h_2 = m$ 为单目标函数的个数(载荷数目); x 为设计变量,避免刚度矩阵奇异, $x_{\min} = 0.001$; $j = 1, \dots, n$ 为单元数目; C 为结构的柔度; C_k 为第 k 个工况载荷所对应的目标函数; $C_{k,\max}$ 和 $C_{k,\min}$ 分别为该目标函数的最大值和最小值(最差解和最优解); \bar{V} 为优化的目标体积; q 为直接控制每个目标函数权重的罚因子。

最差和最优工况($C_{k,\max}$ 和 $C_{k,\min}$) 分别通过求解每个工况载荷对应的单目标函数来获得。各工况下的单刚度拓扑优化设计数学模型表示为^[10]

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}=(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T}{\text{Minimize}} \quad C(\mathbf{X}) = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \\ & \text{Subject to:} \quad \left. \begin{aligned} & \sum_{j=1}^n V_j x_j - \bar{V} \leq 0 \\ & 0 < x_{\min} \leq x_j \leq 1 \\ & (j = 1, 2, \dots, n) \\ & \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \end{aligned} \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

对于 SIMP 插值模型,对应的刚度矩阵、目标函数和目标函数的敏度分别表示为

$$E(x_j) = E_{\min} + x_j^p (E_0 - E_{\min}) \quad (4)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^n (E_{\min} + x_j^p \Delta E) \mathbf{K}_j \quad (5)$$

$$C(x) = \sum_{j=1}^n (E_{\min} + x_j^p \Delta E) \mathbf{U}_j^T \mathbf{K}_j \mathbf{U}_j \quad (6)$$

$$C'(x) = - \sum_{j=1}^n p x_j^{p-1} \mathbf{U}_j^T \mathbf{K}_j \mathbf{U}_j \Delta E \quad (7)$$

式中: \mathbf{K} 为刚度矩阵; \mathbf{U} 为位移向量; E 为插值以后的弹性模量; E_0 和 E_{\min} 分别为固体和空洞部分材料的弹性模量; $\Delta E = E_0 - E_{\min}$, 为保证数值求解稳定性,一般要求 $E_{\min} = E_0 / 1000$; p 为数学模型中对单元中间密度的惩罚因子,其作用是当设计变量的值在 $(0, 1)$ 之间时,通过逐渐增加 p 的值对设计变量的中间值进行惩罚,随着 p 值的增大,设计逐渐接近 0/1 设计。为使 SIMP 插值模型具有物理意义,一般要求泊松比为 0.3 时 $p \geq 3$, 为有效压缩中间密度材料, p 的常见取值范围为 $3 \leq p \leq 7$ 。

2 序列凸规划求解方法研究

2.1 MMA 方法

MMA 的近似方法基于 Fleury 和 Braibant^[17] 的凸近似线性化方法,该方法为基于一阶 Taylor 展开式的凸近似方法,近似函数用原函数在当前设计点处的一阶导数来表示。MMA 方法^[12] 通过引入移动渐近线,将隐式的优化问题转化成一系列显式的可分离的严格凸的近似子优化问题。每一步迭代中,通过用梯度类算法求解凸近似子问题来更新设计变量。在用 MMA 算法求解连续体的结构拓扑优化设计问题时,初始迭代点的选择很重要,如果初始迭代点选择不当,随后的子优化问题将难以得到可行解。为此,实现 MMA 算法时,在优化模型中引入人工变量,以改善每一个子优化问题的性态。

非线性数学规划问题的优化模型为

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}=(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T}{\text{Minimize}} \quad : f_0(\mathbf{X}) + \\ & \left[a_0 z + \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) \right] \\ & \text{Subject to:} \quad \left. \begin{aligned} & f_i(\mathbf{X}) - a_i z - y_i \leq \tilde{f}_i \\ & (i = 1, 2, \dots, m) \\ & x_{j,\min} \leq x_j \leq x_{j,\max} \\ & (j = 1, 2, \dots, n) \\ & z \geq 0, y_i \geq 0 \\ & (i = 1, 2, \dots, m) \\ & \text{平衡方程} \end{aligned} \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

式中: a_i , c_i 和 d_i 分别为给定的大于等于零的常数, $c_i + d_i > 0$; $f_0(x)$ 和 $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 分别为连续可微的设计函数。

凸近似子优化问题的数学模型为

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}=(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T}{\text{Minimize}} \quad : \tilde{f}_0^{(k)}(\mathbf{X}) + \\ & \left[a_0 z + \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) \right] \\ & \text{Subject to:} \quad \left. \begin{aligned} & \tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{X}) - a_i z - y_i \leq \tilde{f}_i \\ & (i = 1, 2, \dots, m) \\ & \alpha_{j,\min} \leq x_j \leq \beta_{j,\max} \\ & (j = 1, 2, \dots, n) \\ & z \geq 0, y_i \geq 0 \\ & (i = 1, 2, \dots, m) \\ & \text{平衡方程} \end{aligned} \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

式中: $j = 1, 2, \dots, n$ 为设计变量的数目; $x_j^{(k)}$ 为设

设计变量; $\alpha_j^{(k)}$ 和 $\beta_j^{(k)}$ 为移动极限参数, 满足 $L_j^{(k)} < \alpha_j^{(k)} < x_j^{(k)} < \beta_j^{(k)} < U_j^{(k)}$; $L_j^{(k)}$ 和 $U_j^{(k)}$ 分别为较小和较大的移动渐近线。

原数学模型中目标函数和约束函数的 MMA 近似形式统一表示为

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(x) = & f_i^{(k)}(x^{(k)}) + \\ & \sum_{j^{(+)}=1}^n p_{ij}^{(k)} \left(\frac{1}{U_j^{(k)} - x_j} - \frac{1}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} \right) + \\ & \sum_{j^{(-)}=1}^n q_{ij}^{(k)} \left(\frac{1}{x_j - L_j^{(k)}} - \frac{1}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

式中: 渐近线 $L_j^{(k)}$ 和 $U_j^{(k)}$ 用来调节近似问题的凸性。对一个设计变量同一时间 $\alpha_j^{(k)}$ 和 $\beta_j^{(k)}$ 只能有一个非零。这意味着, 对每一设计变量, 同时只有一个渐近线 $L_j^{(k)}$ 或 $U_j^{(k)}$ 用于近似。因而, 不管设计函数是单调性或者是非单调性的, MMA 方法都采用单调性的近似过程。其次, 优化过程中对所有的设计函数, MMA 近似方法都使用相同的渐近线 $L_j^{(k)}$ 或 $U_j^{(k)}$, 这样对不同性质结构响应函数的近似缺乏灵活性。

Svanberg^[18] 提出一种 GCMMA1 方法, 与传统的 MMA 方法比较, GCMMA1 中系数 $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$ 在近似中同时不能为零, 这意味着用 $L_j^{(k)}$ 和 $U_j^{(k)}$ 同时形成的近似函数, 从而 GCMMA1 具有非单调性的特点。GCMMA1 方法在每一步迭代中, 系数 $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$ 通过一个启发式的非单调参数 $\rho_j^{(k)}$ 、原函数 Taylor 展开式的一阶偏导数、以及渐近线 $L_j^{(k)}$ 和 $U_j^{(k)}$ 来表示。 $\rho_j^{(k)}$ 的方法更新,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(x) = & f_i^{(k)}(x^{(k)}) + \\ & \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(k)} \left(\frac{1}{U_j^{(k)} - x_j} - \frac{1}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} \right) + \\ & \sum_{j=1}^n q_{ij}^{(k)} \left(\frac{1}{x_j - L_j^{(k)}} - \frac{1}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right) \quad (11) \end{aligned}$$

Svanberg^[19] 提出了一种 GCMMA2 方法, 主要用原设计函数的一阶偏导数以及非混合的二阶偏导数一起来计算 $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$, 以代替 GCMMA1 中 $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$ 包含的启发式非单调性近似参数 $\rho_j^{(k)}$, 这样可以改善原 GCMMA1 方法的近似效果,

$$p_{ij}^{(k)} = \frac{(U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^3}{2(U_j^{(k)} - L_j^{(k)})} \left[2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(k)}) + (x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \frac{\partial^2 f_i(x^{(k)})}{\partial x_j^2} \right] \quad (12)$$

$$q_{ij}^{(k)} = \frac{(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^3}{2(U_j^{(k)} - L_j^{(k)})} \left[(U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2 \frac{\partial^2 f_i(x^{(k)})}{\partial x_j^2} - 2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(k)}) \right] \quad (13)$$

为避免在 GCMMA1 中使用非单调性参数 $\rho_j^{(k)}$ 或

者在 GCMMA2 中使用二阶偏导数形式计算系数 $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$, Bruyneel 等^[13] 研究了基于 2 个连续迭代步间梯度信息的 GBMMA1 方法。GBMMA1 中移动渐近线参数 $L_j^{(k)}$ 和 $U_j^{(k)}$ 仍然按照 MMA 方法^[12] 的形式更新, 但 $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$ 由 2 个连续设计点 $x_j^{(k)}$ 和 $x_j^{(k-1)}$ 的梯度信息表示, $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$ 分别以隐函数形式表示

$$\frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j} = \frac{p_{ij}^{(k)}}{(U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2} - \frac{q_{ij}^{(k)}}{(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial f_i(x^{(k-1)})}{\partial x_j} = \frac{p_{ij}^{(k)}}{(U_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})^2} - \frac{q_{ij}^{(k)}}{(x_j^{(k-1)} - L_j^{(k)})^2} \quad (15)$$

Duysinx 等^[20] 基于 GCMMA2 方法提出一种 GBMMA2 方法, 这种方法用梯度形式来近似表示原来 GCMMA2 中 $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$ 的非混合的二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f_i(x^{(k)})}{\partial x_j^2} \approx \frac{\left(\frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(x^{(k-1)})}{\partial x_j} \right)}{(x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})} \quad (16)$$

文献 [13, 22] 证明了, 在相同的条件下 GBMMA 方法比 GCMMA 方法具有更好的近似效果。各种不同方法的近似过程如图 1 所示。

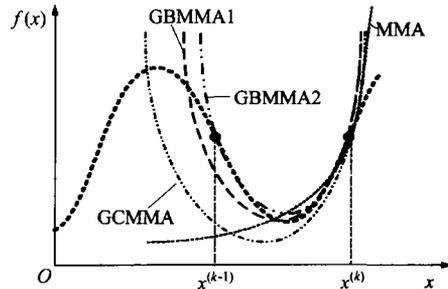


图 1 MMA 方法单调性和非单调性近似示意图

Fig. 1 Monotonous and no-monotonous MMA methods

2.2 GCMMA-GBMMA 优化方法

MMA 系列方法近似的关键是近似问题的凸性, 要使 MMA 系的近似式为严格凸的, 系数 $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$ 必须是正的。此外, 对于 MMA 方法必须满足 $L_j^{(k)} < x_j^{(k)} < U_j^{(k)}$, GCMMA 方法要满足非单调性参数非负。对于 GBMMA1, 2 个连续迭代步之间的符号要求相反; 对于 GBMMA2 方法, 二阶偏导数的梯度近似式必须为正。当 GBMMA1 和 GBMMA2 中的系数 $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$ 非正时, 不能保证

子优化问题的凸性,而 GCMMA 方法可以通过正的非单调性参数 $\rho_j^{(k)}$ 保证 $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$ 为正,从而保证 GCMMA 的子优化问题的凸性。本文基于前人的研究工作,提出一种 GCMMA-GBMMA 的混合求解算法,该方法以 Svanberg 桁架尺寸优化的 MMA 代码为基础,在 Matlab 平台上开发出连续体结构拓扑优化设计的 GCMMA-GBMMA 混合求解算法。GCMMA-GBMMA 混合求解方法具有全局收敛、迭代点向 K-K-T 点集逼近、每一迭代点有可行解且严格递减和求解效率适中等特点。

对于 GBMMA1 和 GBMMA2 算法,优化的求解效率一般要比 GCMMA 高^[13],且当目前设计点在最优点附近时,用 GBMMA2 比使用 GBMMA1 更能加快收敛的速度^[22]。所以在具体的程序设计中,在 GBMMA1 和 GBMMA2 间加入切换开关 SWITCH = 0.01,设计变量在 GBMMA1 和 GBMMA2 间自动切换。如果 GBMMA1 和 GBMMA2 不能保证子优化问题为凸的,接着自动转入 GCMMA 方法形成凸的子优化问题。

GCMMA-GBMMA 方法中参数 $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$ 在计算中不能同时为零,意味可同时使用 $L_j^{(k)}$ 和 $U_j^{(k)}$ 形成近似函数,从而整个近似过程具有非单调性的特点。在每一步迭代中, $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$ 通过非单调参数 $\rho_j^{(k)}$ 等来表示,非单调性参数使近似子优化问题是严格凸的,可保证子优化问题存在着惟一的全局最优解。GCMMA-GBMMA 方法中使用非混合的二阶偏导数形式,二阶导数相对于一阶导数近似函数的光滑性和可微性有明显的改善,但对大规模问题优化效率要受到影响(GCMMA2 的特点)。为避免使用非混合的二阶偏导数形式,GCMMA-GBMMA 以相邻两次迭代的梯度表示原函数中的二阶导数,以提高优化的效率和目标函数的可微性。求解流程见图 2,其中 GCMMA 的求解流程见图 3。

GCMMA-GBMMA 中 GCMMA 的求解包含内部 (Inner) 和外部 (Outer) 2 个循环过程, ν 为内部循环的迭代次数; κ 为外部循环的迭代次数; (κ, ν) 为第 κ 个外部循环中的第 ν 个内部循环。在每一个新的外部循环开始以前,必须计算目标和约束函数的函数值和偏导数值,而在开始每个新的内部循环前,只需计算函数值。外层从第 κ 点到第 $\kappa+1$ 个设计点的循环过程参见文献[4]。

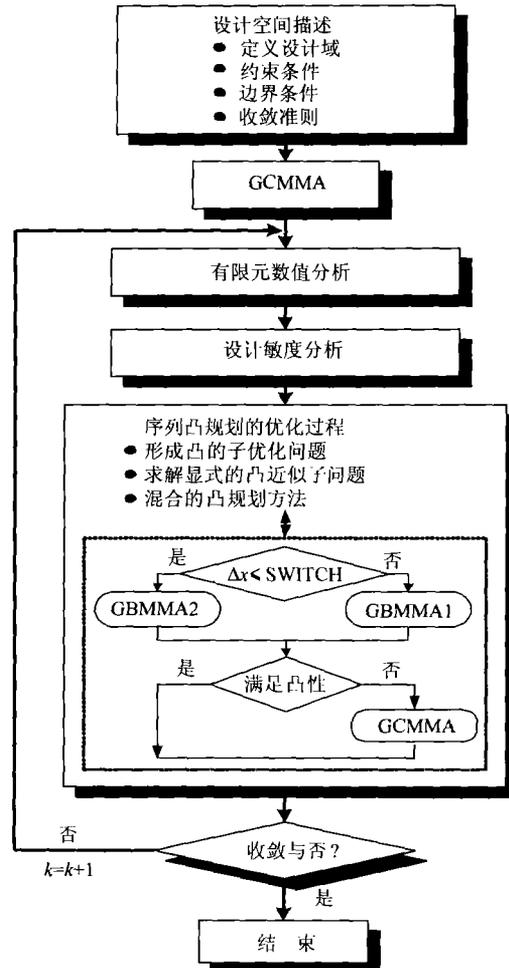


图 2 GCMMA-GBMMA 求解流程

Fig. 2 Flowchart of GCMMA-GBMMA

优化模型为

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & \tilde{f}_0^{(\kappa, \nu)}(\mathbf{X}) + \left[a_0 z + \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) \right] \\ \text{Subject to: } & \left. \begin{aligned} & \tilde{f}_i^{(\kappa, \nu)}(\mathbf{X}) - a_i z - y_i \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \\ & \alpha_{j, \min} \leq x_j \leq \beta_{j, \max} \quad (j = 1, \dots, n) \\ & z \geq 0, y_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \\ & \text{平衡方程} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\tilde{f}_i^{(\kappa, \nu)}(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(\kappa, \nu)}}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(\kappa, \nu)}}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right) + r_i^{(\kappa, \nu)} \quad (18)$$

式中: $\rho_i^{(\kappa, \nu)}$ 为非单调参数,按以下规则求解

$$\left. \begin{aligned} & \text{如果 } \delta_j^{(\kappa, \nu)} > 0 \\ & \rho_j^{(\kappa, \nu+1)} = \max \{ 1.1 \rho_j^{(\kappa, \nu)}, \min [0.9 \rho_j^{(\kappa, \nu)} + 1.1 \delta_j^{(\kappa, \nu)}] \} \\ & \text{如果 } \delta_j^{(\kappa, \nu)} \leq 0, \rho_j^{(\kappa, \nu+1)} = \rho_j^{(\kappa, \nu)} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中,

$$\delta_i^{(\kappa, \nu)} = \frac{\tilde{f}_i(x^{(\kappa, \nu)}) - f_i^{(\kappa, \nu)}(x^{(\kappa, \nu)})}{\max [10^{-7}, d^{(\kappa)}(x^{(\kappa, \nu)})]} \quad (20)$$

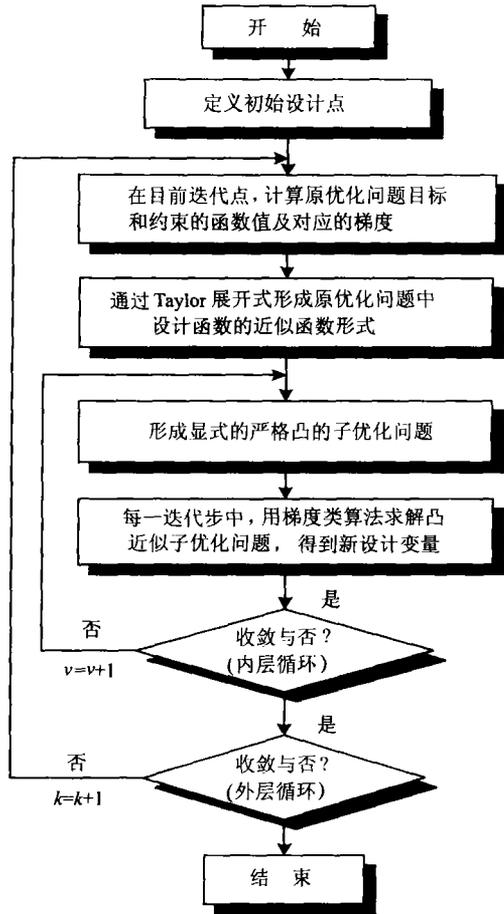


图 3 GCMMA 算法流程图

Fig. 3 Flowchart for GCMMA

$$d^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{(x_{j,\max} - x_{j,\min})(U_j^{(k)} - L_j^{(k)})}{(U_j^{(k)} - x_j)(x_j - L_j^{(k)})} (x_j - x_j^{(k)})^2 \quad (21)$$

式(18)中

$$r_i^{(\kappa,\nu)} = f_i(x^{(\kappa,\nu)}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_j^{(\kappa,\nu)}}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} + \frac{q_j^{(\kappa,\nu)}}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right) \quad (22)$$

移动渐近线 $L_j^{(k)}$ 和 $U_j^{(k)}$ 按照以下迭代格式更新:

(1) 当 $k=1, k=2$ 时的迭代格式为

$$\left. \begin{aligned} L_j^{(k)} &= x_j^{(k)} - 0.5(x_{j,\max} - x_{j,\min}) \\ U_j^{(k)} &= x_j^{(k)} + 0.5(x_{j,\max} - x_{j,\min}) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

(2) 当 $k \geq 3$ 时的迭代格式为

$$\left. \begin{aligned} L_j^{(k)} &= x_j^{(k)} - \chi_j^{(k)}(x_{j,\max} - x_{j,\min}) \\ U_j^{(k)} &= x_j^{(k)} + \chi_j^{(k)}(x_{j,\max} - x_{j,\min}) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\chi_j^{(k)} = \begin{cases} 0.7, & \text{if } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) < 0 \\ 1.2, & \text{if } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) > 0 \\ 1, & \text{if } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

相关参数更详细的介绍可以参考文献[17~21]。

3 数值求解算例

设计域如图 4, 其中, $F_1 \sim F_9$ 假定为桥梁表面承受的工况载荷条件, 将 $F_1 \sim F_9$ 分别看做工况 1 至工况 9。依据实际的结构类型, 假定 $F_1 \sim F_4$ 在结构最终有效解中起的作用要高于其他的工况。因而将前 4 个工况看做分层优化的第 1 层, 其余的工况作为第 2 层。第 1 层和第 2 层同时分别是一个多刚度问题, 用折衷规划法求解。各个载荷的分布情况为: $F_1 = F_2 = F_3 = 75 \text{ kN}$; $F_4 = F_5 = F_6 = 25 \text{ kN}$; $F_7 = F_8 = F_9 = 5 \text{ kN}$ 。使用分层序列规划法和折衷规划法作为不同阶段的求解策略, 体积约束 20%, SIMP 为材料模型, 采用 GCMMA-GBMMA 方法求解。以结构多刚度最小化作为优化目标, 约束为全局体积约束。第 1 层优化的约束为体积约束; 第 2 层优化的体积约束为第 1 层优化所得的刚度约束和体积约束。

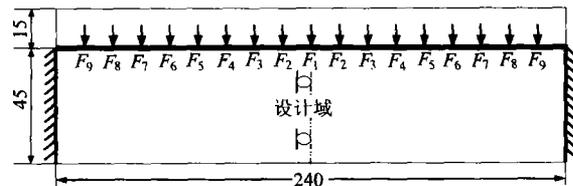


图 4 多刚度设计域示意图

Fig. 4 Design domain of multi-stiffness

数值计算奇异性问题^[23]是连续体结构优化中的一个重要问题, 敏度过滤技术是目前常用的方法^[24]。本文采用二重敏度过滤技术^[10]来消除优化结果中的棋盘格式和网格依赖性。

为节约篇幅, 这里只给出第 2 层(最终)的优化结果。从优化过程和优化结果可以看出。GBMMA 方法要稍优于 GCMMA, 而 GBMMA-GCMMA 混合算法的稳定性和收敛性有一定程度的改善。在相同的条件下, 原来 MMA 算法的迭代步数几乎是 GCMMA 方法的 2 倍, 接近 GBMMA 方法的 4 倍, GBMMA-GCMMA 方法的求解效率几乎是 GCMMA 的 2 倍, 求解效率适中, 虽然几种方法的优化拓扑图具有较好的相似性, 优化的柔度值也比较相似。各种方法的迭代历程如图 5 所示, 优化的柔度值和迭代步数如表 1 所示。从以上的优化结果可以看出, GCMMA-GBMMA 方法的求解过程稳定性要优于其他几种 MMA 方法, 迭代收敛的步数要明显少于原始的 MMA 方法和 GCMMA 方法, 和 GBMMA 方

法的迭代步数接近。GCMMA-GBMMA 的优化拓扑图布置形式也要优于其他几种方法。

表 1 迭代过程和优化结果比较
Table 1 Comparison of optimal results

优化方法	MMA	GCMMA	GBMMA	GBMMA-GCMMA
迭代步数	537	306	183	201
结构柔度	1.673 4	1.654 4	1.665 0	1.660 4

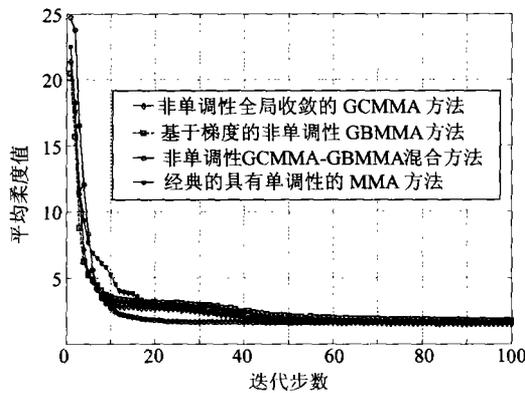


图 5 MMA 系列方法的收敛曲线
Fig. 5 Convergent histories of MMA family

为了验证本文方法的有效性和合理性,将本例的优化结果同 Altair. Optistruct 软件包的优化结果进行比较。对于图 4 所示的设计域,利用对称性取左面一半的结构作为设计域。初始单元数为 9 600,体积比 0.20,收敛容差为 0.001。在相同的优化条件下,用 Optistruct 软件包的优化结果(图 6)和本文 Matlab 优化算法的结果(图 7)具有较好的相似性。

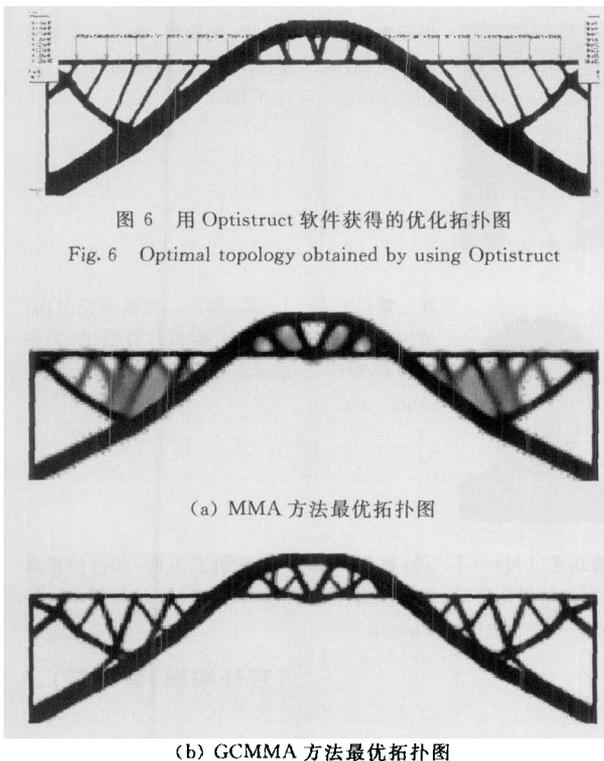


图 6 用 Optistruct 软件获得的优化拓扑图
Fig. 6 Optimal topology obtained by using Optistruct

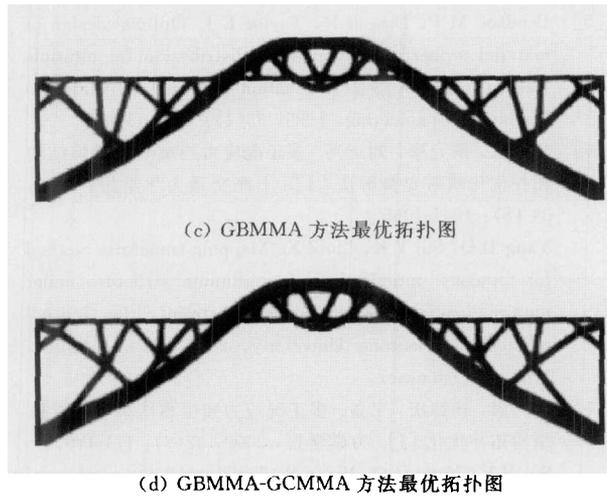


图 7 MMA, GCMMA, GBMMA 和 GBMMA-GCMMA 的优化拓扑图
Fig. 7 Optimal topologies for MMA, GCMMA, GBMMA and GBMMA-GCMMA

4 结 论

(1) 连续体结构的多刚度拓扑优化设计问题本质上是一种非线性多目标数学规划问题。基于序列分层法和折衷规划法的多目标混合规划方法能够灵活有效地处理复杂工况下连续体结构多刚度拓扑优化设计问题,并能防止传统直接加权方法引起的载荷病态现象。

(2) 基于凸近似的 GCMMA-GBMMA 规划方法对具有复杂目标函数和多个约束的大规模拓扑优化问题具有更好的适定性。算例表明该方法具有非单调性和全局收敛性,求解效率适中。

参 考 文 献

- [1] Bendsøe M P, Sigmund O. Topology optimization: theory, methods, and applications [M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003.
- [2] 罗震, 陈立平, 黄玉盈, 等. 连续体结构的拓扑优化设计 [J]. 力学进展, 2004, 34(4): 463-476.
Luo Z, Chen L P, Huang Y Y, et al. Topological optimization design for continuum structures [J]. Advances in Mechanics, 2004, 34(4): 463-476. (in Chinese)
- [3] 于靖军, 毕树生, 宗光华. 全柔性微位移放大机构的设计技术研究 [J]. 航空学报, 2004, 25(1): 74-78.
Yu J J, Bi S S, Zong G H. Study on the design of fully compliant motion amplification mechanisms in actuation systems for micromanipulators [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2004, 25(1): 74-78. (in Chinese)
- [4] 罗震, 郭文德, 蒙永利, 等. 全柔性微型机构的拓扑优化设计技术研究 [J]. 航空学报, 2005, 26(5): 617-625.
Luo Z, Guo W D, Meng Y L, et al. Fully compliant micro-mechanism using topological optimization approach [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2005, 26(5): 617-625. (in Chinese)

- [5] Bendsøe M P, Diaz A R, Taylor E J. Optimal design of material properties and material distribution for multiple loading condition [J]. *International Journal of Numerical Method in Engineering*, 1995, 35(1): 1149-1170.
- [6] 杨德庆, 隋允康, 刘正兴. 多工况应力约束下连续体结构拓扑优化映射变换解法 [J]. *上海交通大学学报*, 2000, 34 (8): 1061-1065.
Yang D Q, Sui Y K, Liu Z X. Mapping transform method for topology optimization of continuum structure under multiple loading cases and stress constraints [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2000, 34 (8): 1061-1065. (in Chinese)
- [7] 隋允康, 杨德庆, 王备. 多工况应力和位移约束下连续体结构拓扑优化 [J]. *力学学报*, 2000, 32(2): 171-179.
Sui Y K, Yang D Q, Wang B. Topological optimization of continuum structure with stress and displacement constraints under multiple loading cases [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, 32(2): 171-179. (in Chinese)
- [8] 王建, 程耿东. 多工况应力约束下连续体结构拓扑优化设计 [J]. *机械强度*, 2003, 25 (1): 55-57.
Wang J, Cheng G D. Topology optimization design of the continuum structure for multiple loading conditions with stress constraints [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2003, 25(1): 55-57. (in Chinese)
- [9] 程耿东, 张东旭. 受应力约束的平面弹性体的拓扑优化 [J]. *大连理工大学学报*, 1995, 35(1): 317-322.
Cheng G D, Zhang D X. Topological optimization of plane elastic continuum with stress constraints [J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1995, 35(1): 317-322. (in Chinese)
- [10] 罗震, 陈立平, 张云清, 等. 连续体结构的多刚度拓扑优化设计和二重敏度过滤技术 [J]. *固体力学学报*, 2005, 26(1): 29-36.
Luo Z, Chen L P, Zhang Y Q, et al. Multi-stiffness topological optimization for continuum structures with multiple loading cases and a duplicate filtering method [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2005, 26(1): 29-36. (in Chinese)
- [11] Zhou M, Rozvany G I N. The COC algorithm, Part II: topological, geometry and generalized shape optimization [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, 89:197-224.
- [12] Svanberg K. The method of moving asymptotes: a new method for structural optimization [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24: 359-373.
- [13] Bruyneel M, Duysinx P. A family of MMA approximation for structural optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2002, 24: 263-276.
- [14] Bendsøe M P, Sigmund O. Material interpolation schemes in topology optimization [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1999, 69:635-654.
- [15] Rozvany G I N, Kirsch U, Bendsøe M P, et al. Layout optimization of structures [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1995, 48(2):41-119.
- [16] Luo Z, Yang J Z, Chen L P, et al. A hybrid fuzzy-goal programming scheme for multi-objective topology optimization of static and dynamic under multiple loading conditions [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2006, 31(1): 26-39.
- [17] Fleury C, Braibant V. Structural optimization: a new dual method using mixed variable [J]. *International Journal of Numerical Method in Engineering*, 1986, 23: 409-428.
- [18] Svanberg K. A globally convergent version of MMA without linesearch[C]//Rozvany G I N, Olhoff N. *Proc First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*. Oxford: Pergamon Press, 1995:9-16.
- [19] Svanberg K. Non-mixed second order derivatives in MMA [R]. Stockholm: Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, 1995.
- [20] Duysinx P, Zhang W H, Fleury C, et al. A new separable approximation scheme for topological problems and optimization problems characterized by a large number of design variables[C]//Rozvany G I N, Olhoff N. *Proc First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*. Oxford: Pergamon, 1995:1-8.
- [21] Svanberg K. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2002, 12: 555-573.
- [22] Bruyneel M, Duysinx P. Note on topology optimization of continuum structures including self-weight [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2005, 29 (4): 245-256.
- [23] Sigmund O, Petersson J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1998, 16: 68-75.
- [24] Sigmund O. Design of numerical structures using topology optimization [D]. Denmark: Technical University of Denmark, 1994.

作者简介:



张云清(1968—) 男,副教授,博士。主要研究方向:数值计算技术,车辆系统动力学。E-mail:zhangyq@mail.hust.edu.cn



罗震(1974—) 男,博士。主要研究方向:结构分析与多学科优化、数值计算技术、柔性机构和 MEMS 技术。E-mail:luozhen_me@yahoo.com.cn

陈立平(1964—) 男,教授,博士。主要研究方向:几何约束求解、机械优化设计、多体动力学分析、CAD/CAM/CAE 技术。E-mail:chenlp@hustcad.com

(责任编辑:蔡斐)