文章编号：1000-3673（2009）19-0123-04　中图分类号：TM712　文献标志码：A　学科代码：470·40

以对称反对称分裂预条件处理 GMRES(m)的不精确牛顿法潮流计算

刘凯[1]，陈红坤[1]，向铁元[1]，高志新[2]
（1．武汉大学 电气工程学院，湖北省 武汉市 430072；
2．中南电力设计院，湖北省 武汉市 430072）

Inexact Newton Flow Computation Based on Hermitian and Skew-Hermitian Splitting Preconditioners GMRES(m)

LIU Kai[1]，CHEN Hong-kun[1]，XIANG Tie-yuan[1]，GAO Zhi-xin[2]
（1．School of Electrical Engineering，Wuhan University，Wuhan 430072，Hubei Province，China；
2．Central Southern Electric Power Design Institute，Wuhan 430072，Hubei Province，China）

ABSTRACT: According to the feature that the correction equation of large-scale power grid is highly sparse, a method for inexact Newton power flow computation based on Hermitian and skew-Hermitian preconditioners is researched. By use of symmetric and skew-Hermitian splitting of matrix, a new type of preconditioner is proposed. Combining the new preconditioner with GMRES(m), both convergency and convergence rate of power flow computation can be improved. Power flow computation results of IEEE 300-bus system show that the proposed algorithm is effective.

KEY WORDS: power flow calculation；Hermitian and skew-Hermitian splitting；generalized minimal residual algorithm (GMRES(m))；preconditioning

摘要：针对大规模电力系统修正方程式高度稀疏的特点，研究了一种基于对称反对称预处理的不精确牛顿法。利用矩阵的对称反对称分裂，提出一种新的预处理子，并将其与 GMRES(m)算法相结合，改进潮流计算的收敛性和收敛速度。IEEE 300 节点系统的计算结果验证了所提算法的有效性。

关键词：潮流计算；对称反对称分裂；广义极小残余法(GMRES(m))；预条件处理

0　引言

实现区域大电网互联以及电力市场环境下实时、超实时安全控制和潮流跟踪都迫切需要快速地进行大规模甚至超大规模电力系统潮流方程的全局求解[1]。传统的电力系统潮流计算通常选用牛顿法或快速解耦法[2]。牛顿法是求解非线性代数方程的有效方法。它把非线性方程的求解过程变成相应的线性方程求解。虽然牛顿法有令人满意的 2 阶收敛性，但由于每次迭代后都需重新计算雅可比矩阵的元素，导致牛顿法计算潮流时约 80%的时间花费在求解高维修正方程式上[3-4]。快速解耦法则是根据系统有功主要决定于电压相角的变化，而无功主要决定于电压幅值的变化这一特性，进行相关合理假设，具有简单、快速、节省内存且收敛可靠的优点，广泛应用于高压电网在线计算。该方法存在的问题是 R/X 比值敏感，用于配电网可能迭代次数过多或不收敛[5-6]。迭代法近年来越来越受到重视，已成为电力系统中求解线性方程组的主要方法[7]。

目前应用较多的迭代法是以广义极小残余法(generalized minimal residual algorithm，GMRES)为代表的 Krylov 子空间法。Krylov 子空间法是 20 世纪 90 年代提出的一类迭代法，具有存储量少、计算量小、易于并行等优点，非常适合并行求解高维稀疏线性方程组。结合预条件处理技术的 Krylov 子空间法具有良好的收敛特性和较高的数值稳定性，已成为目前求解高维稀疏线性方程组的最主要方法[7-9]。文献[6]将 GMRES 法与牛顿法相结合(通常称为 Newton-GMRES 方法)，采用已有的预处理方法，对 2 个超大规模电网进行了对比分析计算。结果表明：此类迭代法结合适当的预处理比直接法约快 2 倍。

预处理的主要作用是有效降低系数矩阵的条件数并改善其特征值的分布特性，从而提高迭代法

的收敛性[10]。迄今为止，潮流计算常用的预处理方法主要包括不完全分解方法、分块对角矩阵法、PQ分解预处理方法等。文献[11]对上述几种预处理方法进行了比较。不完全 LU 分解(ILU)方法效果较好，但很难寻找到一种适当的平衡，即在不完全分解时既不能产生太多的填充量和增加过多的矩阵分解时间，又要达到较好的预处理效果。PQ 分解预处理方法也是一种较好的方法，但若对 PQ 分解法的雅可比矩阵进行完全求逆，则代价明显过高。

基于上述思路，考虑潮流计算的系数矩阵通常具有对称正定性，本文利用系数矩阵对称反对称分裂的预处理方法，将其与 Newton–GMRES(m)方法结合可以有效提高大规模电力系统潮流迭代求解的收敛性。

1 不精确牛顿法

在电力系统中，潮流方程可以简单地表示为

$$F(x,\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{V})=0 \tag{1}$$

式中：x 是节点电压构成的复变量；$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 为注入有功和无功向量；$\boldsymbol{V}$ 为 PV 节点电压幅值向量。

用直角坐标系或极坐标系分离式(1)的实部和虚部，可以得到一个关于 $y\in\mathbf{R}^{2n}$ 的由 $2n$ 个方程组成的非线性方程组

$$F(y)=0 \tag{2}$$

不精确牛顿法[12]步骤如下：

1）给定初值 y^0。

2）对于 k=0, 1, 2,…, 直到 $\|F(y^k)\|<\varepsilon_0$ 停止。

用迭代法近似求解

$$F'(y^k)s^k=-F(y^k)$$

使之满足

$$F'(y^k)s^k=-F(y^k)+r^k$$

$$\frac{\|r^k\|}{\|F(y^k)\|}<\eta^k,\quad 0\le\eta^k<1$$

$$y^{k+1}=y^k+r^k$$

可以看出，不精确 Newotn 法实质上是一类内外迭代算法。本文采用的不精确牛顿法，外迭代为经典 Newotn 法，内迭代为 GMRES(m)法。

2 对称反对称分裂预处理 GMRES(m)算法

2.1 GMRES(m)算法

对线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为大型稀疏非奇异矩阵，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n$。GMRES 算法实质是取 Krylov 子空间 $K_N(\boldsymbol{A},r_0)=\mathrm{span}\{r_0,\boldsymbol{A}r_0,\ldots,\boldsymbol{A}^{N-1}r_0\}$，且 $r_0=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}x_0$ 是初始残量，在 Krylov 子空间 $K_N(\boldsymbol{A},r_0)$ 找一向量 $\Delta\boldsymbol{x}$，使其极小化 $\min\limits_{\Delta x\in K_N(A,r_0)}\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}(x_0+\Delta x)\|$。理论上，GMRES 方法能够在最多 n 步迭代内计算出线性方程组的精确解[6]。但在实际计算中，由于舍入误差的积累[9]，通过 Arnoldi 过程计算出的 v_i 将会很快失去正交性。为计算出一个满意的步长，通常需要执行很多次 GMRES 迭代。且如果 m 很大，Kyrlov 子空间的基 $\boldsymbol{V}_m$ 的存储将会是一个问题($\boldsymbol{V}_m$ 是 n 行 m 列矩阵，而通常 n 比较大)。为解决这个问题，实际计算中经过 $m_{\max}$ 次迭代后，若残量范数 $\|r_{k,\max}\|$ 仍然不能充分小，则需要采用重启动的 GMRES 方法，即 GMRES(m)方法，但该方法的不足之处是无法保证迭代序列的收敛性[13]。

关于 GMRES 方法的收敛性，文献[14]中得出：对 $n\times n$ 线性问题，GMRES 至多 n 步收敛；当系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正实数时，对所有 k，GMRES(k)收敛；当 $\boldsymbol{A}$ 不是正实数时，以上结论不再正确[14]。为保证收敛的最小 k 只与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分布有关，则它与问题的规模 n 无关，所以 GMRES 方法特别适宜求解高维稀疏线性方程组。由于其收敛性与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分布有关，所以选择适当的预条件子来改变矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分布就显得尤为重要。

GMRES(m)[13]算法步骤如下：

1）选初值 x_0，整数 m，并计算 $r_0=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}x_0$，$\beta=\|r_0\|$，$v_1=r_0/\beta$。

2）$h_{i,j}=(\boldsymbol{A}v_j,v_i)$，$i=1,2,\cdots,j$，$j$=1, 2, 3, …,$m$，

$$v_{j+1}=\boldsymbol{A}v_j-\sum_{i=1}^{j}h_{i,j}v_i$$

$$h_{j+1,j}=\|v_{j+1}\|,\text{ 且 } v_{j+1}=v_{j+1}/h_{j+1,j}$$

定义 $\boldsymbol{H}_m$ 为$(m+1)\times m$ 的 Hessenberg 阵，它的非零元为系数 $h_{i,j}$。

3）形成近似解：$x_m=x_0+\boldsymbol{V}_m y_m$，其中 $y_m\in\mathbf{R}^m$ 使 $\|\beta\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{H}_m y\|$ 极小。这里

$$\boldsymbol{e}_1=[1,0,\ldots,0]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{m+1}$$

$$\boldsymbol{V}_m=[v_1,v_2,\ldots,v_m]\in\mathbf{R}^{n\times m},\ \boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^m$$

4）重新开始计算 $r_m=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}x_m$，如果 $\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}x_m\|\le\varepsilon$，其中 ε 是预先给定的误差限，则停止迭代；否则 $x_0=x_m$，$v_1=r_m/\|r_m\|$，转步骤 2）。

2.2 预条件子选取

对线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，如果条件数 Cond($\boldsymbol{A}$)很小，说明方程组是良态方程组。当用 GMRES 算法求解这种方程组时，将会很快收敛。相反，如果条

件数很大，则方程组很可能为病态方程组，此时 GMRES 算法存在不收敛和收敛速度慢的潜在问题。因此 GMRES 算法的成功在很大程度上取决于预条件矩阵的选取，旨在改变特征值的分布，加速收敛。一个好的预条件矩阵 $\boldsymbol{M}$ 应使 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{J}$ 在某种意义下接近单位阵或 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 接近 $\boldsymbol{J}^{-1}$，且方程 $\boldsymbol{MZ}=\boldsymbol{r}$ 易解[15]。设 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=\mathbf{R}^{n\times n}$ 是非奇异的、接近 $\boldsymbol{J}$ 的矩阵，且 $\boldsymbol{M}$ 可以分解为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2 \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$ 表示预条件子矩阵，简称预条件子；此时经过预处理后的方程组变为

$$\boldsymbol{J}'\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{b}' \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{J}'=\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}_2^{-1}$， $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{M}_2x$， $b'=\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{b}$。

若 $\boldsymbol{M}_1$=1，则得右预条件子；同理令式(3)中 $\boldsymbol{M}_2$=1 可得左预条件子。本文选取左预条件子，利用矩阵的对称反对称分裂[16-17]，提出对称反对称分裂预条件子。

假设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 是一正定矩阵，$\boldsymbol{H}=1/2(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 和 $\boldsymbol{S}=1/2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 是它的对称和反对称部分，α是正常数，那么由文献[16]中 HSS(Hermitian/Skew-Hermitian splitting)的迭代矩阵

$$\boldsymbol{M}(\alpha)=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}) \tag{5}$$

并且谱半径 $\rho(M(\alpha))$ 有上界

$$\sigma(\alpha)\equiv\max_{\lambda_i\in\lambda(H)}\left|\frac{\alpha-\lambda_i}{\alpha+\lambda_i}\right| \tag{6}$$

当满足 $\rho(M(\alpha))\le\sigma(\alpha)<1$，任意 $\alpha>0$，HSS 迭代收敛到唯一解 $x^*\in\mathbf{R}^n$。

HSS 迭代[16]算法步骤如下：

1）给定一个初始解 x_0。

2）对 k=0, 1, 2, …, 计算

$$(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})x_{k+\frac{1}{2}}=(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})x_k+\boldsymbol{b}$$

$$(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})x_{k+1}=(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})x_{k+\frac{1}{2}}+\boldsymbol{b}$$

至$\{x^k\}$收敛，其中α是给定的正常数。

考虑算法收敛速度，α取其最优值

$$\alpha^*=\arg\min_{\alpha}\left\{\max_{\lambda_{\min}\le\lambda\le\lambda_{\max}}\left|\frac{\alpha-\lambda}{\alpha+\lambda}\right|\right\}=\sqrt{r_{\max}r_{\min}} \tag{7}$$

式中$\lambda_{\max}$ 和$\lambda_{\min}$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的最小和最大特征值，且

$$\sigma(\alpha^*)=\min_{\alpha}(\sigma(\alpha))=\frac{\sqrt{r_{\max}}-\sqrt{r_{\min}}}{\sqrt{r_{\max}}+\sqrt{r_{\min}}}=\frac{\sqrt{k(\boldsymbol{H})-1}}{\sqrt{k(\boldsymbol{H})+1}} \tag{8}$$

其中 $k(\boldsymbol{H})$为矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的谱条件数。

由式(5)结合文献[18]的定理 1 可得，存在唯一可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{M}(\alpha)=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}$$

其中 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{H}+\alpha\boldsymbol{I})(\boldsymbol{S}+\alpha\boldsymbol{I})$。因为常数对加速迭代算法无关紧要，所以由 HSS 迭代推出的预条件件矩阵为

$$\boldsymbol{M}=P_{\mathrm{HSS}}=(\boldsymbol{H}+\alpha\boldsymbol{I})(\boldsymbol{S}+\alpha\boldsymbol{I}) \tag{9}$$

3 算例分析

为验证本文所提对称反对称预处理方法的效果，基于 Matlab7.0 测试平台，选用 IEEE 300 节点系统对所提方法进行测试和对比分析，其数据见表 1。

表 1 测试系统

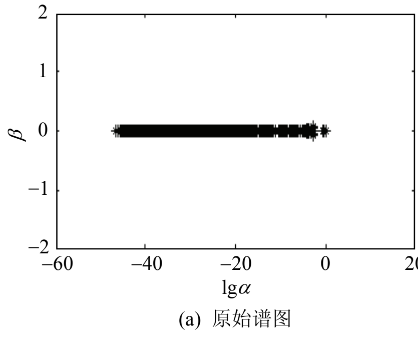
Tab. 1 Testing system

系统	母线数	线路数	条件数
IEEE 300	300	411	1.17×10^{-5}

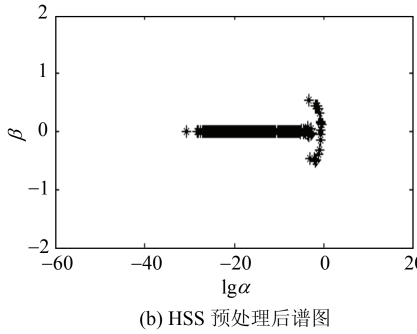
图 1 为 IEEE 300 节点系统初始迭代时的雅可比矩阵经过预处理后的谱图。谱图横轴代表 lgα，纵轴代表β(α、β分别为特征值的实部与虚部)。

对比预处理前后的谱图可以看出，预处理后系统的特征值更加集中，预处理的实际效果比较明显。

表 2 是利用未经预处理 Newton-GMRES(m)算法和本文所提 Newton-GMRES(m)算法对测试系统进行潮流计算的收敛情况。参考标准是计算过程中的迭代次数。从左到右分别为外迭代次数、内迭代次数(GMRES(m)迭代)、单次最多内迭代次数。计算中采用如下参数，牛顿法的迭代精度为 $\varepsilon=10^{-6}$，GMRES 法的迭代精度为 $\eta=0.01\|r_0\|_2$ ($r=b-\boldsymbol{J}\Delta x$，



(a) 原始谱图



(b) HSS 预处理后谱图

图 1 IEEE 300 节点系统经过预处理后的谱图

Fig. 1 Spectrum of preconditioned IEEE 300 nodes system

表 2　预处理 Newton-GMRES(m)算法与未预处理 Newton-GMRES(m)算法收敛性能比较

Tab. 2　Convergence performance comparison of preconditioned Newton-GMRES(m) method and conditioned Newton-GMRES(m) method

预处理情况	基于牛顿法 GMRES(m)潮流计算
无预处理	5/681/285
HSS 预处理	5/104/38

r_0为初始残差)，Krylov 自空间维数 m=5。潮流计算采用平启动，并忽略任何节点类型转移和补偿控制。

由表 2 可以看出，本文提出的预处理方法实际效果不错，能有效减少潮流计算中内外迭代次数，加快收敛速度。

4　结论

针对大规模电力系统潮流计算，基于预处理 GMRES 的不精确牛顿潮流算法已被证明是一种有效方法。因此选择适合的预处理子对 Newton-GMRES(m)算法的成功与否起着重要作用。针对雅可比矩阵的特性，找寻合适的预处理技术仍是今后研究的一个重点。IEEE 300 节点系统的测试结果表明，本文所提预处理方法对提高潮流计算的收敛速度有一定作用。

参考文献

[1] 卢强，周孝信，薛禹胜，等. 面向 21 世纪电力科学技术讲座[M]. 北京：中国电力出版社，2000：29-30.

[2] 苏津，阳育德，覃智君．基于矢量化运算模式的电力系统潮流计算[J]．电网技术，2008，32(3)：88-92．
Su Jin，Yang Yude，Qin Zhijun．Power flow calculation based on vectorized operation mode[J]．Power System Technology，2008，32(3)：88-92(in Chinese)．

[3] 蔡大用，陈玉荣．用不完全 LU 分解预处理的不精确潮流计算方法[J]．电力系统自动化，2002，22(25)：11-14．
Cai Dayong，Chen Yurong．Solving power flow equations with inexact Newton methods preconditioned by incomplete LU factorization with partially fill-in[J]．Automation of Electric Power Systems，2002，22(25)：11-14(in Chinese)．

[4] 彭谦，姜彤，曲鹏．修正节点接入导纳潮流算法[J]．电网技术，2007，31(10)：61-63．
Peng Qian，Jiang Tong，Qu Peng．Power flow algorithm by amending injected admittance[J]．Power System Technology，2007，31(10)：61-63(in Chinese)．

[5] 彭谦，胡国新，张利．高斯–快速解耦潮流算法[J]．电网技术，2009，33(3)：53-56．
Peng Qian，Hu Guoxin，Zhang Li．A load flow algorithm based on gauss algorithm and fast decoupling algorithm[J]．Power System Technology，2009，33(3)：53-56(in Chinese)．

[6] Alexander F J，Chiang H D．Solving the nonlinear power flow equations with an inexact Newton method using GMRES [J]．IEEE Transactions on Power Systems，1998，13(2)：267-273．

[7] Leon F D，Semlyen A．Iterative solvers in the Newton power flow problem：preconditioners，inexact solutions and partial Jacobian updates[J]．IEEE Proceedings Online，2002，149(4)：479-484．

[8] 李传栋，房大中，杨金刚，等．大规模电网并行潮流算法[J]．电网技术，2008，32(7)：34-39．
Li Chuandong，Fang Dazhong，Yang Jingang，et al．New research on parallel power-flow calculation for large-scale power system [J]．Power System Technology，2008，32(7)：34-39(in Chinese)．

[9] 戈卢布 G H，范洛恩 C F. 矩阵计算[M]. 北京：科学出版社，2001：412-424．

[10] 汪芳宗，何一帆，叶婧．基于稀疏近似逆预处理的牛顿–广义极小残余潮流计算方法[J]．电网技术，2008，32(14)：50-53．
Wang Fangzong，He Yifan，Ye Jing．Load flow calculation of Newton-GMRES method with sparse approximate inverse preconditioners[J]. Power System Technology，2008，32(14)：50-53(in Chinese)．

[11] 李晓华，厉吉文，张林鑫，等．潮流计算雅可比矩阵预处理方法的比较研究[J]．继电器，2005，33(15)：33-36．
Li Xiaohua，Li Jiwen，Zhang Linxin，et al．Comparison and study of preconditioning method of Jacobian matrix of power flow calculation [J]．Relay，2005，33(15)：33-36(in Chinese)．

[12] Dembo R S，Eisenstat S C，Steihaug T．Inexact Newton methods[J]．SIAM Jon Numer Anal，1982，19(2)：400-408．

[13] 曹志浩，陈光喜，侯小东．一种收敛的重开始 GMRES 算法[J]．复旦学报：自然科学版，1997，36(6)：645-651．
Cao Zhihao，Chen Guangxi，Hou Xiaodong．A convergent restarted GMRES algorithm[J]．Journal of Fudan University：Natural Science，1997，36(6)：645-651(in Chinese)．

[14] Saad Y，Schultz M H．GMRES：a Generalized minimum residual algorithm for solving nonsysmmetric linear system[J]．SIAMJ，1986，7(6)：856-869．

[15] 胡博，周家启，刘洋，等．基于预条件处理 GMRES 的不精确牛顿法潮流计算[J]．电工技术，2007，22(2)：98-104．
Hu Bo，Zhou Jiaqi，Liu Yang，et al．Inexact Newton flow computation based on preconditioned GMRES method[J]．Transactions of China Electrotechnical Society，2007，22(2)：98-104(in Chinese)．

[16] Bai Z Z，Golub G H，Ng M K．On inexact Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems[M]．Linear Algebra and Its Applications，2008：413-440．

[17] Bai Z Z，Golub G H，Ng M K．Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems[J]．SIAMJ，2003，24(3)：603-626．

[18] Benzi M，Szyld D B．Existence and uniqueness of splittings for stationary iterative methods with applications to alternating methods [J]．Numer Math，1997，76(3)：309-320．

刘凯

收稿日期：2009-02-11。

作者简介：

刘凯(1985—)，男，硕士研究生，研究方向为电力系统运行与控制，E-mail：liu_kai.2008@163.com；

陈红坤(1968—)，男，博士，副教授，主要从事电能质量分析、电力系统运行与控制方面的研究与教学工作；

向铁元(1953—)，男，教授，主要研究方向为电力系统分析与计算、电力系统安全运行与控制；

高志新(1984—)，男，硕士，从事电网运行与规划方面的研究工作。

（责任编辑　王晔）