【制造技术】

不同约束条件下压杆屈曲载荷的统一矩阵计算方法*

颜彩飞，刘庆潭

（中南大学 土木建筑学院，长沙 410075）

摘要：对压杆屈曲状态微分方程进行求解，形成了包含压杆变形和内力等变量的传递矩阵，提出了基于矩阵运算的不同约束条件下压杆屈曲载荷的统一计算方法。该方法采用代入边界条件直接求解的固定模式，把各种不同约束条件下细长杆的屈曲载荷公式用相同的基本矩阵式同时推出，推导过程简单、力学概念清晰、规律性强，易于掌握。

关键词：约束；压杆变形；屈曲载荷

中图分类号：TB301　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1006－0707(2010)07－0069－02

现在的材料力学中有关细长压杆的屈曲载荷的计算均以欧拉(L. Euler)1744 提出的欧拉临界力计算公式为基本理论体系。在这一体系中，首先由两端铰支细长杆的平衡条件建立微分方程，根据边界条件求解。因为推导需要花费一定的时间，所以在求得两端铰支细长杆的临界力后，其他约束情况下细长杆的临界力公式就不再逐一推导，而是采用有效长度来类比两端铰支的情况得到。由于其他约束情况下的临界力公式不像两端铰支那样是通过力学推导而得来的，总感到比较抽象。而且这种由平衡条件建立微分方程，再根据边界条件求得解答的过程，会因压杆本身的结构形式及约束条件的复杂化而变得非常复杂。这种传统的处理手法难以形成通用的计算机程序，无法适应工程实际中对复杂情况下临界载荷的计算。针对这些问题，本文通过对压杆屈曲状态微分方程的求解，形成了包含压杆变形和内力等变量的传递矩阵式，提出了基于矩阵运算的不同约束条件下压杆屈曲载荷的统一计算方法。

1　传递矩阵式的推导

对于图 1 所示的等截面细长受压杆，其挠曲线近似微分方程为

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \tag{1}$$

观察图 1 中的 dx 微段，对其右端建立力矩平衡方程式

$$F_Q = \frac{dM}{dx} - F_N\frac{dv}{dx} \tag{2}$$

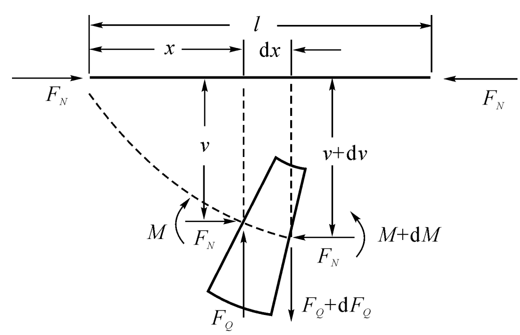

图 1　等截面细长受压杆

由此可得

$$\frac{d^2M}{dx^2} - F_N\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \tag{3}$$

将式(1)代入式(3)得

$$\frac{d^4v}{dx^4} + \frac{F_N}{EI}\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \tag{4}$$

令 $\alpha^2 = F_N/EI$，式(4)可写成

$$\frac{d^4v}{dx^4} + \alpha^2\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \tag{5}$$

式(5)的通解为[1]

$$v = C_1 + C_2x + C_3\sin\alpha x + C_4\cos\alpha x \tag{6}$$

注意到 $\theta = \frac{dv}{dx}$，再应用式(1)及式(2)可得求得 θ，M 和 F_Q 的表达式。令 $x = 0$ 时，$v = v_0$，$\theta = \theta_0$，$M = M_0$，$F_Q = F_{Q0}$，将其代入这些表达式，并写成矩阵形式为[2]

* 收稿日期：2010－03－02

作者简介：颜彩飞(1964—)，硕士研究生，主要从事结构工程研究；
刘庆潭(1947—)，教授，博士生导师，主要从事结构分析、地下工程方面研究。

$$\begin{pmatrix} v \\ \theta \\ M \\ F_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e_2 & -e_3/EI & -e_4/EI \\ 0 & e_1 & -e_2/EI & -e_3/EI \\ 0 & EI \cdot e_0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ F_{Q0} \end{pmatrix} \tag{7}$$

式中：$e_0 = \alpha\sin\alpha x$，$e_1 = \cos\alpha x$，$e_2 = \sin\alpha x/\alpha$，$e_3 = (1 - \cos\alpha x)/\alpha^2$，$e_4 = (\alpha x - \sin\alpha x)/\alpha^3$。式(7)中 4×4 的方阵就是等截面细长压杆在临界力计算时的传递矩阵。

2 各种约束情况下的临界力

2.1 两端铰支情况

对于两端铰支情况下长度为 l 的细长杆，边界条件为 $v_0 = 0, M_0 = 0, v_{x=l} = 0, M_{x=l} = 0$，只需将式(7)的传递矩阵划去第2,4行，同时划去第1,3列。划去有关的行和列后，得[3]

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \theta \\ 0 \\ F_Q \end{pmatrix}_{x=l} = \begin{pmatrix} | & e_2 & | & -e_4/EI \\ | & --- & | & --- \\ | & EIe_0 & | & e_2 \\ | & --- & | & --- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ F_{Q0} \end{pmatrix}$$

即有

$$\begin{pmatrix} e_2 & -e_4/EI \\ EIe_0 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ F_{Q0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式有非零解的前提是 $e_2^2 + e_0 e_4 = 0$，也即有

$$\sin^2(\alpha l) + \sin(\alpha l)[\alpha l - \sin(\alpha l)] = 0$$

故 $\sin(\alpha l) = 0, \alpha l = n\pi (n = 0,1,2,3,\cdots)$

n 取有实际意义的值 $n = 1$，即 $\alpha l = \pi$，由此得临界荷载为

$$F_{P_{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{8}$$

2.2 一端铰支一端固定情况

对于一端铰支一端固定的长度为 l 的细长杆，边界条件为 $v_0 = 0, M_0 = 0, v_{x=l} = 0, \theta_{x=l} = 0$，只需将式(7)的传递矩阵，划去第3,4行，同时划去第1,3列。划去有关的行和列后，得

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ F_Q \end{pmatrix}_{x=l} = \begin{pmatrix} | & e_2 & | & -e_4/EI \\ | & e_1 & | & -e_3/EI \\ | & --- & | & --- \\ | & --- & | & --- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ F_{Q0} \end{pmatrix}$$

即有

$$\begin{pmatrix} e_2 & -e_4/EI \\ e_1 & -e_3/EI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ F_{Q0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式有非零解的前提是 $-e_2 e_3 + e_1 e_4 = 0$，也即

$$\mathrm{tg}(\alpha l) = \alpha l$$

解这个超越方程得 $\alpha l = 4.4939$，即有

$$F_{P_{cr}} = \frac{20.19EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2} \tag{9}$$

应用式(9)还不难得出，在 $x = 0.7l$ 处，挠曲线出现反弯点，即此处的 $M = 0$。

2.3 两端固定情况

对于两端固定的长度为 l 的细长杆，边界条件为 $v_0 = 0, \theta_0 = 0, v_{x=l} = 0, \theta_{x=l} = 0$，只需将式(7)的传递矩阵划去第3,4行，同时划去第1,2列。划去有关的行和列后，得

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ F_Q \end{pmatrix}_{x=l} = \begin{pmatrix} | & | & -e_3/EI & -e_4/EI \\ | & | & -e_2/EI & -e_3/EI \\ | & | & --- & --- \\ | & | & --- & --- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \\ F_{Q0} \end{pmatrix}$$

即有

$$\begin{pmatrix} -e_3/EI & -e_4/EI \\ -e_2/EI & -e_3/EI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ F_{Q0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式有非零解的前提是 $e_3^2 - e_2 e_4 = 0$，解得 $\alpha l = m\pi (m = 0, 2,4,\cdots)$，$m$ 取有实际意义的值 $m = 2$，即 $\alpha l = 2\pi$，由此得临界荷载为

$$F_{P_{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2} \tag{10}$$

2.4 一端固定一端自由情况

对于一端固定一端自由的长度为 l 的细长杆，边界条件为 $v_0 = 0, \theta_0 = 0, M_{x=l} = 0, F_{Qx=l} = 0$，只需将式(7)的传递矩阵划去第1,2行，同时划去第1,2列。划去有关的行和列后，得

$$\begin{pmatrix} v \\ \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{x=l} = \begin{pmatrix} | & | & --- & --- \\ | & | & --- & --- \\ | & | & e_1 & e_2 \\ | & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \\ F_{Q0} \end{pmatrix}$$

即有

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ F_{Q0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式有非零解的前提是 $e_1 = \cos\alpha l = 0$，即有 $\alpha l = n\pi/2 (n = 1,3,5,\cdots)$，$n$ 取有实际意义的值 $n = 1$，即 $\alpha l = \pi/2$，由此得临界荷载为

$$F_{P_{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \tag{11}$$

3 结束语

通过上述分析可以看到，由式(7)采用代入边界条件直接求解的固定模式，把4种不同约束情况下的细长杆临界力公式同时推出，结果和经典的材料力学关于不同约束情况下细长杆临界力公式完全相同[4]。

1）本文的方法推导过程简单、力学概念清晰、规律性强，易于掌握。

2）基于这种方法，在处理带有若干个弹性支座以及阶梯状压杆临界力计算时，只需按固定模式形成各段的矩阵，然后进行矩阵运算即可，无需再另行考虑各段交接处力的平衡条件和位移协调条件，免去了边界处理上造成的困难，极大地简化了求解多个微分方程及确定积分常数的冗长计算[5]。

3）可以编制成通用的计算机程序，用于求解各种复杂情况下细长杆的屈曲载荷。

（下转第84页）