

文章编号: 1000-6893(2009)08-1454-06

冲击杂波下的 MIMO 雷达 DOA 估计方法

江胜利, 王鞠庭, 何劲, 刘中

(南京理工大学 电子工程系, 江苏 南京 210014)

DOA Estimation in Impulsive Clutter for MIMO Radars

Jiang Shengli, Wang Juting, He Jin, Liu Zhong

(Department of Electronic Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210014, China)

摘要: 研究了对称 α 稳定分布 (S α S) 冲击杂波下的多输入多输出 (MIMO) 雷达目标波达方向 (DOA) 估计问题, 分别提出基于分数低阶最小方差无畸变响应 (FrMVDR) 的 MIMO 雷达 DOA 估计算法和无穷范数归一化最小方差无畸变响应 (Inf-MVDR) 算法。FrMVDR 算法, 首先进行冲击杂波特征指数的估计, 然后使 MIMO 雷达接收阵列的分数低阶输出功率最小, 实现 MIMO 雷达的 DOA 估计。为了避免 FrMVDR 算法对杂波特征指数估计, 提出 Inf-MVDR 算法, 首先用无穷范数对接收信号进行归一化处理, 使归一化后的阵列输出功率有界, 继而采用传统 MVDR 算法进行 DOA 估计。计算机仿真验证了上述两种算法的有效性; 同时仿真结果还表明在冲击杂波下, MIMO 雷达的空间分集特性可显著提高 DOA 估计的精度。

关键词: 冲击杂波; MIMO 雷达; 波达方向估计; 分数低阶统计量; 无穷范数归一化

中图分类号: V243.2; TN951 **文献标识码:** A

Abstract: This article investigates the issue of direction of arrival (DOA) estimation for multi-input multi-output (MIMO) radar in symmetric α -stable (S α S) clutter. Two algorithms are proposed, i. e., a fractional lower order minimum variance distortionless response (FrMVDR) DOA estimation algorithm and an infinity-norm normalization MVDR (Inf-MVDR) DOA estimation algorithm. For the FrMVDR algorithm, the characteristic exponent value of the S α S clutter is first estimated, and then the fractional lower order output power of MIMO radar is minimized to realize DOA estimation. To avoid characteristic exponent estimation, another Inf-MVDR algorithm is developed, which first transforms the S α S clutter into a clutter with bounded output power through infinity-norm normalization, then uses the conventional MVDR algorithm to estimate DOA. Computer simulations verify the effectiveness of the two proposed algorithms. The results also show that spatial diversity of MIMO radar can significantly improve the precision of DOA estimation in impulsive clutter.

Key words: impulsive clutter; MIMO radar; direction of arrival estimation; fractional lower order statistics; infinity-norm normalization

近年来,随着雷达研究的深入和多输入多输出 (Multi-input Multi-output, MIMO) 通信的快速发展,雷达与 MIMO 通信交融建立起来的 MIMO 雷达受到雷达界的广泛关注。目前的 MIMO 雷达研究主要集中在两种不同形式的 MIMO 系统^[1]: 其一是基于相控阵体制的 MIMO 雷达, 其二是基于多基地 (Multi-static) 或多站点 (Multi-site) 雷达的 MIMO 雷达。第 1 类 MIMO 雷达系统充分考虑到现有相控阵雷达的特点, 雷达单元间距足够小, 采用相干处理各单元发射的信号^[2-3]。第 2 类 MIMO 雷达是构建在多基地或

多站点雷达系统基础上,收发单元间距足够大,从而使得各单元信号相互独立,以此获得空间分集增益提高雷达的检测和估计性能^[4-7]。

本文重点研究第 2 类 MIMO 雷达。文献[4]首次提出此类 MIMO 雷达的概念,在此基础上,人们在 MIMO 雷达的波形设计^[5]、信号检测^[6]以及波达方向 (DOA) 估计^[7]等方面进行了深入的研究,其基本思想是把传统雷达的相关成果推广到 MIMO 雷达体制。

在业已开展的 MIMO 雷达 DOA 估计研究中,目前主要考虑的是高斯杂波,采用二阶或高阶统计量的方法进行处理,有关冲击杂波下 MIMO 雷达 DOA 估计的文章还鲜见报道。然而,大量的实验数据表明,雷达实际工作条件下的杂波通常是具有代数拖尾概率密度函数的冲击杂

收稿日期: 2008-05-28; 修订日期: 2008-10-16

基金项目: 国家自然科学基金(60472059); 江苏省博士后科研资助计划(0801021B); 中国博士后科学基金(20080431098)

通讯作者: 刘中 E-mail: eezliu@mail.njust.edu.cn

波^[8-10]。同时,近年来的研究表明冲击杂波更适合用对称 α 稳定分布(S α S)过程来表示,它不存在二阶及以上矩,这就意味着高斯杂波下基于二阶或更高阶累计量 DOA 估计算法的性能将急剧下降。在传统阵列信号处理领域人们提出了各种算法^[10-14],用于估计冲击杂波下的目标 DOA。本文针对 MIMO 雷达在冲击杂波下的目标 DOA 估计问题,提出分数低阶最小方差无畸变(FrMVDR)算法和无穷范数归一化最小方差无畸变(Inf-MVDR)算法,并分析空间分集特性对 DOA 估计性能的改善。

1 MIMO 雷达信号与杂波模型

研究对象为文献[7]中的 MIMO 雷达系统, MIMO 雷达原理框图如图 1 所示。

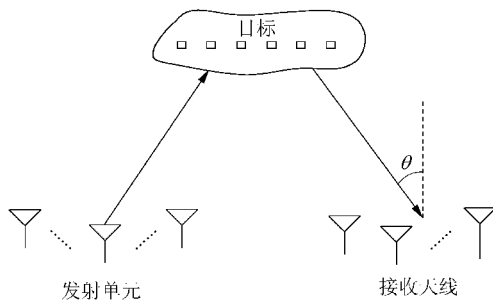


图 1 MIMO 雷达原理框图

Fig. 1 Principle diagram of MIMO radar

发射端由 M 个雷达单元构成,每个单元使用相同载频发射相互正交的窄带信号 $s_m(t)$ ($m=1, 2, \dots, M$),发射单元间距足够大,目标对各发射信号的回波相互统计独立;接收端采用普通阵列接收回波,阵列单元数为 N 。目标由排成一条直线的 Q 个散射点构成,相邻散射点的间距为 Δ ,各散射点的散射系数 ζ_q ($q=1, 2, \dots, Q$)为独立同分布的复高斯变量,则目标散射特性为

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2Q}} [\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \dots \quad \zeta_Q]^T \quad (1)$$

假设 $s_m(t)$ 相对于目标的 DOA 为 φ_m ,目标相对于 MIMO 雷达接收机的 DOA 为 θ ,则 $s_m(t)$ 在目标各散射点上引起的相位差为

$$\mathbf{g}_m = [1 \quad e^{-j2\pi \sin \varphi_m \Delta / \lambda} \quad \dots \quad e^{-j2\pi \sin \varphi_m (Q-1) \Delta / \lambda}]^T \quad (2)$$

式中: λ 为波长。

因此,MIMO 雷达接收 $s_m(t)$ 经目标反射所得的回波强度为^[7]

$$\alpha_m = \sqrt{2} \zeta^T \mathbf{g}_m \quad (3)$$

则 MIMO 雷达接收信号第 t 次快拍为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{a}(\theta) \sum_{m=1}^M \alpha_m s_m(t) + \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{n}(t) &= [n_1(t) \quad n_2(t) \quad \dots \quad n_N(t)]^T \\ \mathbf{x}(t) &= [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_N(t)]^T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{a}(\theta)$ 为接收阵列的导向向量; $n_j(t)$ 为第 j 个接收阵元接收到的杂波, $t=1, 2, \dots, L$ 。

由式(3)和式(4)可以看出,MIMO 雷达能够从不同角度接收目标的回波信息,而这些回波相互统计独立,故它们同时出现衰落的概率很小。因此,MIMO 雷达通过融合这些回波可以抑制目标“闪烁”,从而提高 DOA 估计性能。

在实际环境中,尽管目标散射强度服从高斯分布,然而,杂波通常是具有代数拖尾概率密度函数的冲击杂波。在式(4)所给的 MIMO 雷达信号模型中,假设接收阵列各阵元间的杂波是零均值独立同分布的 S α S 过程,其分布的特征函数为

$$\varphi(t) = e^{j\delta t - \gamma |t|^\alpha} \quad (5)$$

式中: α 为特征指数, $0 < \alpha \leq 2$; δ 为位置参数; γ 为偏移系数。当 $\delta=0, \gamma=1$ 时,S α S 型随机过程服从标准 S α S 分布。此时,其概率密度函数为

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \Gamma(\alpha k + 1) X & 0 < \alpha < 1.0 \\ \frac{1}{\pi(x^2 + 1)} & \alpha = 1.0 \\ \frac{1}{\pi \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right) x^{2k} & 1.0 < \alpha < 2.0 \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} & \alpha = 2.0 \end{cases} \quad (6)$$

式中: $X = x^{-\alpha k} \sin(\alpha k \pi / 2)$ 。

图 2 给出了 α 取不同值时标准 S α S 分布概率

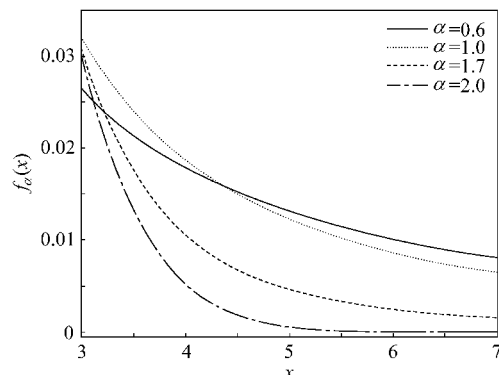


图 2 标准 S α S 分布概率密度曲线

Fig. 2 Standard S α S densities

密度函数,由图2可以发现 α 越小,SaS概率密度函数的拖尾越长,即杂波的冲击性越强。高斯分布是SaS分布的极限形式($\alpha=2.0$),特征指数为 α 的SaS分布与高斯分布的一个根本区别在于,前者二阶及以上矩都不存在,即

$$\left. \begin{aligned} E(|x|^p) &= \infty & p \geq \alpha \\ E(|x|^p) &< \infty & p < \alpha \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: $E(\cdot)$ 表示数学期望。

本文的研究目的就是给定 L 个快拍的测量值 $\{x(t)\}_{t=1}^L$,在冲击杂波背景下估计出目标相对于MIMO雷达接收机的DOA。

2 冲击杂波下MIMO雷达DOA估计算法

首先定义MIMO雷达在冲击杂波下的分数低阶响应,给出FrMVDR算法。然后,针对FrMVDR算法需要冲击杂波特征指数先验信息的缺陷,提出Inf-MVDR算法,即用无穷范数对接收数据归一化处理,使归一化后MIMO雷达输出功率有界,继而采用传统MVDR算法进行DOA估计。

2.1 FrMVDR算法

定义

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_M]^T \\ \boldsymbol{s}(t) &= [s_1(t) \quad s_2(t) \quad \cdots \quad s_M(t)]^T \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

则式(4)所给MIMO雷达的接收回波可表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{n}(t) \quad (t = 1, 2, \dots, L) \quad (9)$$

定义 $\boldsymbol{x}(t)$ 的分数低阶矩为

$$\boldsymbol{x}^{(p)}(t) = [x_1^{(p)}(t) \quad x_2^{(p)}(t) \quad \cdots \quad x_N^{(p)}(t)]^T \quad (10)$$

式中: $x_n^{(p)}(t) = |x_n(t)|^{p-1}x_n(t)$, $n=1, 2, \dots, N$; $0 \leq p \leq 1$ 。

由式(10)可定义出 t 时刻MIMO雷达接收阵列的分数低阶响应为

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{x}^{(p)}(t) \quad (11)$$

式中: $\boldsymbol{w} = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_N]^T$ 为加权矢量,因此MIMO雷达的分数低阶输出功率为

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{w}) &= E\{|\boldsymbol{y}(t)|^2\} = \\ & \boldsymbol{w}^H E\{\boldsymbol{x}^{(p)}(t)[\boldsymbol{x}^{(p)}(t)]^H\} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}^{(p)} \boldsymbol{w} \end{aligned} \quad (12)$$

式中:矩阵 $\boldsymbol{R}^{(p)}$ 的第 i 行、第 k 列的元素为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{ik}^{(p)} &= E\{x_i^{(p)}(t)[x_k^{(p)}(t)]^H\} \\ & (i, k = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (13)$$

当 $p=1$ 时, $\boldsymbol{R}^{(p)}$ 退化为传统的协方差矩阵。然而,在 α 稳定分布杂波环境下, $\boldsymbol{R}^{(p)}$ 无界,这表明传统基于二阶矩的DOA估计方法在 α 稳定冲击杂波下将会失效。可以证明,当 $p < \alpha/2$ 时,矩阵 $\boldsymbol{R}^{(p)}$ 是有界统计量^[13]。由此,本文所提出的FrMVDR算法可表述为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}^{(p)} \boldsymbol{w} \\ \text{s. t. } \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{a}(\theta) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式(14)的物理意义可描述为:在保证观测方向 θ 上增益不变的基础上,使MIMO雷达接收阵列分数低阶功率最小化。类似于传统MVDR算法最优权向量求解,通过拉格朗日乘子法可求出FrMVDR算法的最优权向量为

$$\boldsymbol{w}_0 = \frac{[\boldsymbol{R}^{(p)}]^{-1} \boldsymbol{a}(\theta)}{\boldsymbol{a}^H(\theta)[\boldsymbol{R}^{(p)}]^{-1} \boldsymbol{a}(\theta)} \quad (15)$$

在实际应用中,矩阵 $\boldsymbol{R}^{(p)}$ 可由下式估计:

$$\hat{\boldsymbol{R}}^{(p)} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \boldsymbol{x}^{(p)}(t)[\boldsymbol{x}^{(p)}(t)]^H \quad (16)$$

此时,FrMVDR算法的最优权向量和空间谱分别为

$$\hat{\boldsymbol{w}}_0 = \frac{[\hat{\boldsymbol{R}}^{(p)}]^{-1} \boldsymbol{a}(\theta)}{\boldsymbol{a}^H(\theta)[\hat{\boldsymbol{R}}^{(p)}]^{-1} \boldsymbol{a}(\theta)} \quad (17)$$

$$V_{\text{FrMVDR}}(\theta) = \frac{1}{\boldsymbol{a}^H(\theta)\hat{\boldsymbol{R}}^{(p)}\boldsymbol{a}(\theta)} \quad (18)$$

谱峰对应的角度值即为MIMO雷达目标DOA的估计值。

2.2 Inf-MVDR算法

由2.1节可以看出,FrMVDR是基于分数低阶输出功率有界而提出的DOA估计算法,然而,其分数阶数 p 必须小于 $\alpha/2$ 。这就需获得有 α 的先验信息或是 α 的估计值。 α 的先验信息在实际应用中通常很难得到,对 α 进行估计则需要付出很大的计算代价并且存在误差,因此限制了FrMVDR算法的应用范围。针对该问题,提出一种无需任何参数设置的Inf-MVDR算法。

Inf-MVDR算法的基本思想是首先用无穷范数对接收信号进行归一化加权,使归一化后阵列输出功率有界,继而采用传统MVDR算法进行DOA估计。对MIMO雷达接收阵列在第 t 个快拍的无穷范数归一化加权系数定义为

$$\boldsymbol{w}(t) = \frac{1}{\max\{|x_1(t)|, |x_2(t)|, \dots, |x_N(t)|\}} \quad (19)$$

则式(9)所给 MIMO 雷达接收信号经 $w(t)$ 加权后为

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= a(\theta)r(t) + m(t) \\ r(t) &= w(t)\alpha^T s(t) \\ m(t) &= w(t)n(t) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

定义无穷范数归一化后的 MIMO 雷达的接收阵列响应为

$$z(t) = w^H y(t) \quad (21)$$

式中: $w = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_N]^T$ 为加权矢量。因此,此时无穷范数归一输出功率为

$$P(w) = E(z(t)z^H(t)) = w^H \Omega w \quad (22)$$

式中: $\Omega \triangleq E(y(t)y^H(t))$ 。下面的定理表明,在任意分布的杂波背景下 Ω 是有界统计量。

定理 1 在任意分布的杂波背景下, MIMO 雷达接收信号经无穷范数归一化加权处理后, 矩阵 Ω 是有界统计量。

证明过程见附录 A。

定理表明式(22)定义的无穷范数归一输出功率 $w^H \Omega w$ 是有界的, 因此 Inf-MVDR 算法可表述为

$$\left. \begin{aligned} \min_w w^H \Omega w \\ \text{s. t. } w^H a(\theta) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

由式(23)可求得 Inf-MVDR 算法的最优权向量为

$$w_{o, \text{Inf}} = \frac{\Omega^{-1} a(\theta)}{a^H(\theta) \Omega^{-1} a(\theta)} \quad (24)$$

在实际应用中, Ω 由下式估计得出:

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L y(t)y^H(t) \quad (25)$$

此时最优权向量为

$$\hat{w}_{o, \text{Inf}} = \frac{\hat{\Omega}^{-1} a(\theta)}{a^H(\theta) \hat{\Omega}^{-1} a(\theta)} \quad (26)$$

故 Inf-MVDR 的谱函数为

$$V_{\text{Inf-MVDR}}(\theta) = \frac{1}{a^H(\theta) \hat{\Omega}^{-1} a(\theta)} \quad (27)$$

谱峰对应的角度值即为 MIMO 雷达目标 DOA 的估计值。

由以上理论推导可以看出, Inf-MVDR 算法实质上是通过无穷范数归一化处理, 将不存在二阶以上矩的冲击杂波转化为功率有限的杂波。相比于 FrMVDR 算法, Inf-MVDR 算法的优点是: ①无需利用杂波的统计特性, 属于盲处理; ②不需要任何参数设置, 计算简单。

3 计算机仿真

通过计算机仿真研究冲击杂波下, 传统 MVDR 算法、FrMVDR 算法和 Inf-MVDR 算法三者之间的性能比较, 以及 MIMO 雷达的空间分集特性对目标 DOA 估计性能的改善。在仿真中, 目标反射系数 α_i 为服从均值为零、方差为 1 的复高斯变量。接收天线为间距等于半波长且阵列单元数 $N=6$ 的均匀线阵, 目标相对于 MIMO 雷达接收机的 DOA 为 $\theta=0^\circ$ 。杂波为标准 $S\alpha S$ 分布杂波。

图 3 和图 4 分别给出了 $\alpha=1$, FrMVDR 的参

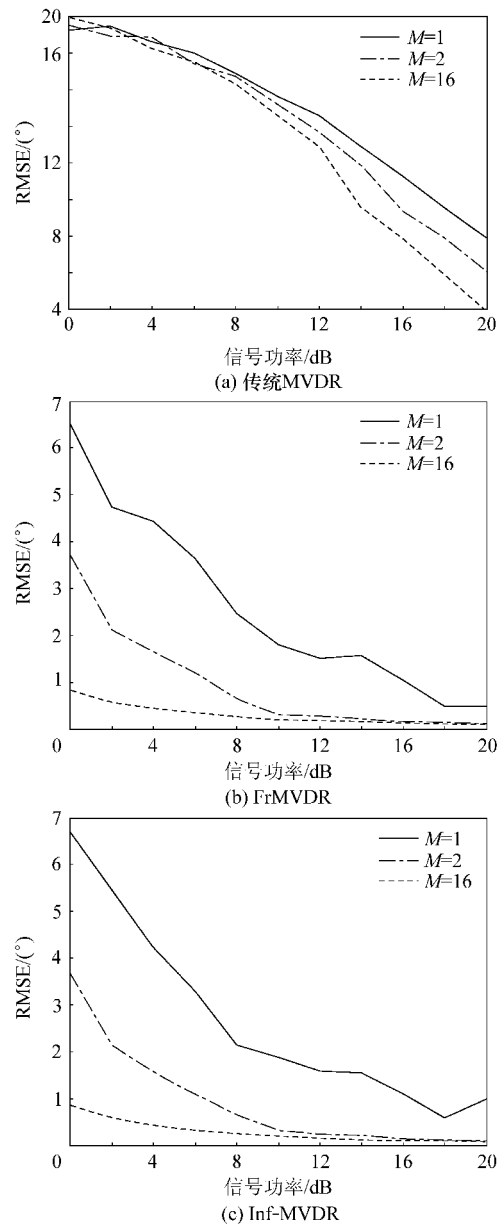


图 3 $p=0.3$ 时 3 种算法的 RMSE

Fig. 3 RMSE of three algorithms with $p=0.3$

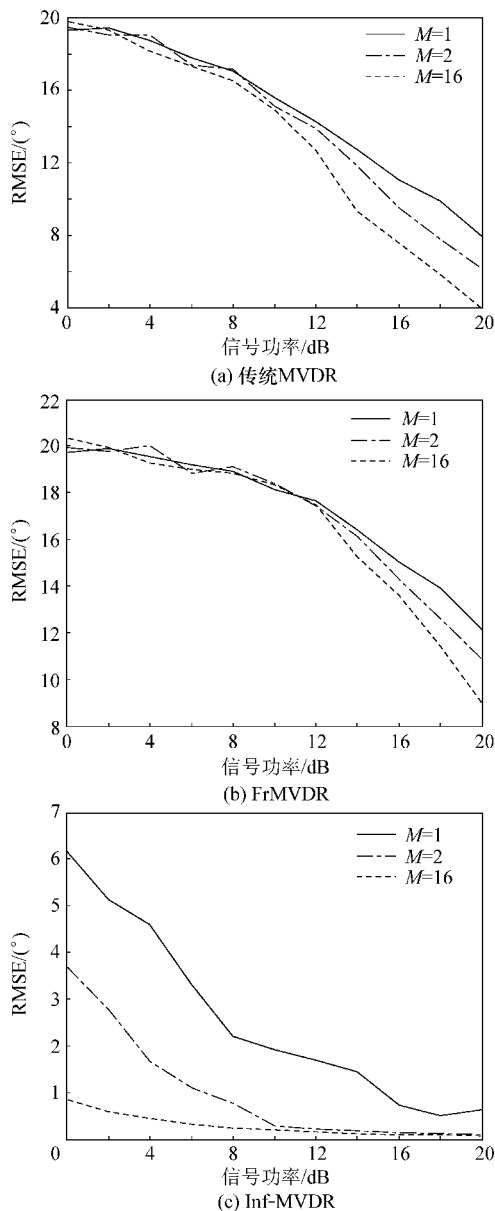


图4 $p=1.2$ 时3种算法的RMSE

Fig. 4 RMSE of three algorithms with $p=1.2$ 数 p 分别取 0.3 和 1.2, MIMO 雷达发射单元 M 取不同值时, 传统 MVDR, FrMVDR 和 Inf-MVDR 3 种算法的目标 DOA 估计均方根误差 (RMSE), 共进行 2 000 次独立蒙特卡罗试验。

由图 3 和图 4 可以看出, 在冲击杂波下, 传统 MVDR 算法的 DOA 估计误差很大, 不能正确估计出目标 DOA; 而 FrMVDR 算法必须选择合适的参数 p , 才能正确估计出目标 DOA; Inf-MVDR 算法无需任何参数设置, 均能以很小误差正确估计出目标 DOA。仿真结果还表明 DOA 估计的 RMSE 随着 M 的增大而变小, 这是因为随着 M 的增大, 目标回波强度都出现衰减的概率很小, 即 MIMO 雷达的空间分集特性, 在冲击杂波背景下也能改善目标 DOA 估计性能。

4 结论

提出 FrMVDR 和 Inf-MVDR 两种算法实现了 MIMO 雷达在冲击杂波下对目标的 DOA 估计。理论分析和计算机仿真表明上述两种算法在冲击杂波下都能稳定工作, 是鲁棒的 DOA 估计算法。相比于 FrMVDR 算法, Inf-MVDR 算法无需利用杂波的统计特性和任何参数设置, 计算简单, 具有一定的工程应用价值。同时, 仿真结果还表明在冲击杂波下, MIMO 雷达的空间分集特性也能改善 DOA 估计的精度。

参 考 文 献

- [1] Xu L Z, Li J. Iterative generalized-likelihood ratio test for MIMO radar[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(6):2375-2385.
- [2] Bekkerman I, Tabrikian J. Target detection and localization using MIMO radars and sonars[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(10): 3873-3883.
- [3] Stoica P, Li J, Xie Y. On probing signal design for MIMO radar[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(8):4151-4161.
- [4] Fishler E, Haimovich A, Blum R, et al. Spatial diversity in radars-models and detection performance [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(3): 823-838.
- [5] Yang Y, Blum R S. MIMO radar waveform design based on mutual information and minimum mean-square error estimation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(1):330-343.
- [6] Haimovich A M, Blum R S, Cimini L J. MIMO radar with widely separated antennas[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(1):116-129.
- [7] Lehmann N H, Fishler E, Haimovich A M, et al. Evaluation of transmit diversity in MIMO-radar direction finding[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(5):2215-2225.
- [8] Tsakalides P, Nikias C L. Robust space-time adaptive processing (STAP) in non-Gaussian clutter environments [J]. IEE Proceedings Radar, Sonar and Navigation, 1999, 146(2): 84-93.
- [9] Tsakalides P, Raspanti R, Nikias C L. Angle/Doppler estimation in heavy-tailed clutter backgrounds [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1999, 35(2): 419-436.
- [10] Liu T H, Mendel J M. A subspace-based direction finding algorithm using fractional lower order statistics[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(8):1605-1613.
- [11] Tsakalides P, Nikias C L. Maximum likelihood localiza-

- tion of sources in noise modeled as a stable process[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(11): 2700-2713.
- [12] Tsakalides P, Nikias C L. The robust covariation-based MUSIC (ROC-MUSIC) algorithm for bearing estimation in impulsive noise environments[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(7):1623-1633.
- [13] 何劲,刘中. 脉冲杂波环境中鲁棒的自适应波束形成方法[J]. 电子学报, 2006, 34(3):464-468.
He Jin, Liu Zhong. Robust adaptive beamforming method in impulsive noise[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(3):464-468. (in Chinese)
- [14] He J, Liu Z. Snapshot-instantaneous $\| \cdot \|_{\infty}$ normalization against heavy-tail noise[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2008, 44(3): 1221-1227.

作者简介:

江胜利(1979—) 男,博士研究生。主要研究方向:雷达波形设计与信号处理。

Tel: 025-84315156

E-mail: jsl2006_hz@163.com

王鞠庭(1983—) 男,博士研究生。主要研究方向:雷达波形设计与信号处理。

Tel: 025-84315156

E-mail: jtwang767@hotmail.com

何劲(1980—) 男,博士。主要研究方向:阵列信号处理与时空自适应信号处理。

Tel: 025-84315156

E-mail: andrie1111@hotmail.com

刘中(1963—) 男,博士,教授,博士生导师。主要研究方向:现代信号处理、雷达信号处理、混沌与信息动力学。

Tel: 025-84315156

E-mail: eezliu@mail.njust.edu.cn

附录 A:

定理 1 证明。

要证明矩阵 Ω 有界,只需证明 Ω 的组成元素是有界的。令 Ω_{pq} 表示 Ω 第 (p, q) 个元素,由于通常情况下 Ω_{pq} 为复数,以下证明 Ω_{pq} 的实部 $\text{Re}\{\Omega_{pq}\}$ 和虚部 $\text{Im}\{\Omega_{pq}\}$ 都是有界的。

$$\begin{aligned} \text{Re}\{\Omega_{pq}\} &= \text{Re}\{E[y_p(t)y_q^*(t)]\} = \\ &E\{\text{Re}[y_p(t)y_q^*(t)]\} \leq \\ &E\{|y_p(t)y_q^*(t)|\} \leq \\ &E\{|y_p(t)| |y_q(t)|\} \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

由式(19)和式(20)可得

$$\begin{aligned} E\{|y_p(t)| |y_q(t)|\} &= \\ E\left\{\frac{|x_p(t)|}{\max\{|x_1(t)|, |x_2(t)|, \dots, |x_N(t)|\}} \cdot \right. \\ &\left. \frac{|x_q(t)|}{\max\{|x_1(t)|, |x_2(t)|, \dots, |x_N(t)|\}}\right\} \leq \\ E\left\{\frac{|x_p(t)|}{|x_p(t)|} \cdot \frac{|x_q(t)|}{|x_q(t)|}\right\} &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

又

$$\begin{aligned} \text{Re}\{\Omega_{pq}\} &\geq -E\{|y_p(t)y_q^*(t)|\} \geq \\ &-E\{|y_p(t)| |y_q(t)|\} \geq -1 \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

由式(A1)~式(A3)可得:

$$-1 \leq \text{Re}\{\Omega_{pq}\} \leq 1 \quad (\text{A4})$$

同理可证:

$$-1 \leq \text{Im}\{\Omega_{pq}\} \leq 1 \quad (\text{A5})$$

因此, Ω 有界。

(编辑:鲍亚平,张利平)