

文章编号: 1000-6893(2006)01-0038-06

失谐周期压电复合材料结构中的波动局部化研究

李凤明, 汪越胜

(北京交通大学 土建学院工程力学研究所, 北京 100044)

Study on Wave Localization in Disordered Periodic Piezoelectric Composite Structures

LI Feng-ming, WANG Yue-sheng

(Institute of Engineering Mechanics, School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

摘 要: 考虑力电耦合效应的影响, 研究了层状失谐周期压电复合材料结构中的波动局部化问题。根据界面上力电连续条件, 推导了结构中相邻单胞间的传递矩阵。以力场和电场变量为状态向量, 给出了结构中局部化因子的表达式。作为算例, 计算了结构中的波动局部化因子。计算结果表明, 压电陶瓷的压电效应对周期压电复合材料的波动局部化特性有显著影响, 压电常数越大局部化因子值越大, 结构的局部化程度越强; 结构的失谐度越大, 频率通带区间内的局部化因子值越大, 局部化程度越强。分析结果对于周期压电复合材料结构的优化设计和振动控制具有理论参考价值。

关键词: 压电复合材料; 失谐周期结构; 力电耦合; 波动局部化; 传递矩阵

中图分类号: O326; V214.8 **文献标识码:** A

Abstract: By considering mechanical and electrical coupling characteristics of piezoelectric composite materials, the wave localization in disordered periodic layered piezoelectric composite structures is studied. According to the mechanical and electrical continuity conditions, the transfer matrix between two consecutive unit cells is obtained. The expression for calculating the localization factors in disordered periodic structures is presented by means of the variables in mechanical and electrical fields. As an example, numerical results of localization factors are presented. It can be seen from the results that the piezo effect of the piezoelectric ceramics has significant effects on the characteristics of wave localization in periodic piezoelectric composites. The larger the piezoelectric constant of the piezoelectric ceramics and the degree of disorder of the structure are, the larger the localization factor or the stronger the wave localization is. The conclusions have theoretical significance for optimization design and vibration control in periodic piezoelectric composite structures.

Key words: piezoelectric composite; disordered periodic structure; mechanical electrical coupling; wave localization; transfer matrix

智能材料和结构在使用过程中能够感知外界环境的变化, 并能针对这种变化做出适当的反应。因为其具有自感觉和主动控制的能力, 所以被广泛应用各种工程领域。在各种智能材料中, 压电材料得到了越来越广泛的应用, 尤其是航空航天领域^[1,2]。压电复合材料是将压电聚合物和压电陶瓷按一定的组成比例、空间几何分布及连通方式复合在一起, 其兼具压电陶瓷和压电聚合物的优点, 并能成倍地提高材料的压电性能, 因此使其成为未来智能材料结构发展的重要方向^[3]。目前, 各种周期压电复合材料在智能材料和结构中

得到了广泛应用^[4,5]。实际工程中动态载荷是经常遇到的受载情况, 因此研究周期压电复合材料结构中的波动传播和局部化问题很有必要。周期结构不同于一般结构, 其具有通频和禁频等特殊力学的性质, 失谐周期结构还会表现出波与振动的局部化特性^[6-8]。由于周期和失谐周期结构的这些特殊力学性质, 使其在动态载荷的滤波器研制等方面得到了关注。Thorpe 等^[6]针对周期压电贴片杆结构中的振动主动控制和波动局部化等问题进行了研究, 得到了很多有意义的结论。笔者曾针对失谐弹性周期结构中的波动局部化问题进行了一些研究工作, 为此种结构的优化设计和振动控制提供了理论方法和参考数据^[7,8]。

本文针对弹性波垂直于界面以及沿界面方向

传播的两种情况, 研究了层状周期压电复合材料结构中的波动局部化问题。推导了相邻单胞间的传递矩阵。以力场和电场分量为状态向量, 给出了结构中局部化因子的表达式。通过引入失谐, 分析了其中的波动局部化特性。

1 结构波动方程及其求解

将压电陶瓷和聚合物周期地铺成层状结构, 便得到 2-2 型周期压电复合材料, 其结构简图如图 1 所示。设压电聚合物及压电陶瓷的铺层厚度分别为 a_1 和 a_2 , 坐标系选取如图 1 所示, 其中 z 轴与 $x y$ 平面垂直。

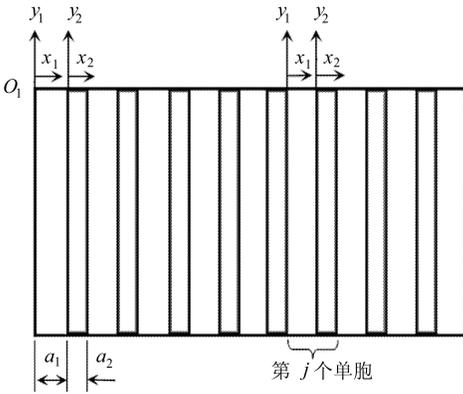


图 1 周期压电复合材料结构简图

Fig 1 Periodic piezoelectric composite structure

当反平面剪切波沿 x 轴或 y 轴正方向传播时, 压电聚合物和压电陶瓷中的二维波动方程分别表示为^[5]

$$\begin{aligned}
 c_{44}^{(1)} \nabla^2 w_1 - \rho_1 \partial^2 w_1 / \partial t^2 &= 0, \quad \epsilon_1^{(1)} \nabla^2 \Phi_1 = 0 \quad (1) \\
 c_{44}^{(2)} \nabla^2 w_2 + e_{15}^{(2)} \nabla^2 \Phi_2 - \rho_2 \partial^2 w_2 / \partial t^2 &= 0 \\
 e_{15}^{(2)} \nabla^2 w_2 - \epsilon_1^{(2)} \nabla^2 \Phi_2 &= 0 \quad (2)
 \end{aligned}$$

式中: $w_1(x_1, y_1, t)$ 和 $w_2(x_2, y_2, t)$ 分别为聚合物及陶瓷沿 z 方向的位移函数; ∇^2 为 Laplace 算子, 在两种材料中分别表示为 $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial y_1^2$ 和 $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_2^2 + \partial^2 / \partial y_2^2$; $\Phi_1(x_1, y_1, t)$ 和 $\Phi_2(x_2, y_2, t)$ 分别为聚合物及压电陶瓷的电势函数; ρ_1 和 ρ_2 分别为聚合物及陶瓷的密度; $c_{44}^{(1)}$ 和 $c_{44}^{(2)}$ 分别为聚合物及陶瓷的弹性常数; $\epsilon_1^{(1)}$ 和 $\epsilon_1^{(2)}$ 分别为聚合物及压电陶瓷的介电常数; $e_{15}^{(2)}$ 为压电陶瓷的压电常数; t 为时间。

在反平面剪切波作用下, 聚合物及压电陶瓷中的剪应力和电位移分别表示为^[5]

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz1} &= c_{44}^{(1)} \partial w_1 / \partial x_1, \quad D_{x1} = -\epsilon_1^{(1)} \partial \Phi_1 / \partial x_1 \quad (3) \\
 \tau_{xz2} &= c_{44}^{(2)} \partial w_2 / \partial x_2 + e_{15}^{(2)} \partial \Phi_2 / \partial x_2 \\
 D_{x2} &= e_{15}^{(2)} \partial w_2 / \partial x_2 - \epsilon_1^{(2)} \partial \Phi_2 / \partial x_2 \quad (4)
 \end{aligned}$$

下面分别针对反平面剪切波沿 x 轴和 y 轴正方向传播时, 给出波动方程式 (1) 和 (2) 的解。

1.1 反平面剪切波沿 x 轴正方向传播的情况

当 SH 波沿 x 轴正方向传播时, 结构中的位移和电势函数简化为关于 x 的一维表达式, 即

$$w_i = w_i(x_i, t), \quad \Phi_i = \Phi_i(x_i, t) \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

因此, 可将式 (1) 和式 (2) 中的位移和电势函数表示为如下形式

$$\begin{aligned}
 w_i(x_i, t) &= W_i(x_i) \exp(-i\omega t) \\
 \Phi_i(x_i, t) &= \Phi(x_i) \exp(-i\omega t) \quad (i = 1, 2) \quad (6)
 \end{aligned}$$

式中: ω 为圆频率; W_i 和 Φ 为幅值。

将式 (6) 分别代入式 (1) 和式 (2), 经过整理, 得到如下方程

$$d^2 W_1 / dx_1^2 + k_1^2 W_1 = 0, \quad d^2 \Phi / dx_1^2 = 0 \quad (7)$$

$$d^2 W_2 / dx_2^2 + k_2^2 W_2 = 0$$

$$d^2 \Phi / dx_2^2 = p d^2 W_2 / dx_2^2 \quad (8)$$

式中: $p = e_{15}^{(2)} / \epsilon_1^{(2)}$ 为压电陶瓷中压电常数与介电常数的比值; $k_1 = \omega / c_1$, $k_2 = \omega / c_2$ 为波数; $c_1 = \sqrt{c_{44}^{(1)} / \rho_1}$, $c_2 = \sqrt{\{c_{44}^{(2)} \epsilon_1^{(2)} + [e_{15}^{(2)}]^2\} / (\rho_2 \epsilon_1^{(2)})}$ 为波速。

将式 (7) 和式 (8) 无量纲化, 得如下无量纲方程:

$$d^2 W_1 / d\xi_1^2 + \alpha^2 W_1 = 0$$

$$d^2 \Phi / d\xi_1^2 = 0 \quad (0 \leq \xi_1 \leq \xi_1) \quad (9)$$

$$d^2 W_2 / d\xi_2^2 + \alpha^2 W_2 = 0,$$

$$d^2 \Phi / d\xi_2^2 = p d^2 W_2 / d\xi_2^2 \quad (0 \leq \xi_2 \leq \xi_2) \quad (10)$$

式中: $\alpha = k_1 \bar{a}_1$ 为无量纲波数; $\xi_1 = x_1 / \bar{a}_1$ 为无量纲坐标; $\xi_2 = a_i / \bar{a}_1$ 为无量纲厚度; \bar{a}_1 为压电聚合物铺层厚度的均值。

式 (9) 和式 (10) 的解可表示为如下形式

$$\begin{aligned}
 W_1(\xi_1) &= A_1 \sin(\alpha \xi_1) + B_1 \cos(\alpha \xi_1) \\
 \Phi(\xi_1) &= C_1 + D_1 \xi_1 \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_2(\xi_2) &= A_2 \sin(\alpha \xi_2) + B_2 \cos(\alpha \xi_2) \\
 \Phi(\xi_2) &= C_2 + D_2 \xi_2 + p [A_2 \sin(\alpha \xi_2) + B_2 \cos(\alpha \xi_2)] \quad (12)
 \end{aligned}$$

式中: A_i, B_i, C_i 和 $D_i (i = 1, 2)$ 为未知系数。

1.2 反平面剪切波沿 y 轴正方向传播的情况

当 SH 波沿 y 轴正方向传播时, 结构中的位移函数和电势函数为 x 和 y 的二维表达式, 即

$$\left. \begin{aligned}
 w_i &= w_i(x_i, y_i, t) \\
 \Phi_i &= \Phi_i(x_i, y_i, t) \quad (i = 1, 2)
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

此时, 可将式 (1) 和式 (2) 中的位移和电势函数表示为如下形式

$$\begin{aligned}
 w_i(x_i, y_i, t) &= W_i(x_i) \exp[i\omega(t - y_i/c)] \\
 \Phi_i(x_i, y_i, t) &= \Phi(x_i) \exp[i\omega(t - y_i/c)] \quad (14)
 \end{aligned}$$

其中: ω 和 c 分别为圆频率及波速; W_i 和 Φ 为幅值。

将式(14)代入式(1)和式(2), 并进行无量纲化, 求解无量纲方程, 可将无量纲位移和电势函数幅值表示为

$$\begin{aligned} W_1(\xi_1) &= A_1 \exp(r_1 \xi_1) + B_1 \exp(-r_1 \xi_1) \\ \Phi_1(\xi_1) &= C_1 \exp(\alpha \xi_1) + D_1 \exp(-\alpha \xi_1) \quad (15) \\ W_2(\xi_2) &= A_2 \exp(r_2 \xi_2) + B_2 \exp(-r_2 \xi_2) \\ \Phi_2(\xi_2) &= C_2 \exp(\alpha \xi_2) + D_2 \exp(-\alpha \xi_2) + \\ & p[A_2 \exp(r_2 \xi_2) + B_2 \exp(-r_2 \xi_2)] \quad (16) \end{aligned}$$

式中: A_i, B_i, C_i 和 $D_i (i = 1, 2)$ 为未知系数; 无量纲量 r_i 表示为 $r_i = \alpha \sqrt{1 - c^2/c_i^2} (i = 1, 2)$; $\alpha = k\bar{a}_1$ 为无量纲波数; $k = \omega/c$ 为波数; ξ, p, \bar{a}_1, c_1 和 c_2 的意义参见式(7)~式(10)中的说明。

2 传递矩阵

设图 1 所示的周期压电复合材料结构共含有 n 个单胞, 第 j 个单胞模型如图 1 所示。每个单胞中含有两个子层, 即压电聚合物和压电陶瓷薄层, 分别称作子层 1 和子层 2。第 j 个单胞中两个子层的左右端位移、力、电势函数和电位移的边界条件表示为

$$\left. \begin{aligned} w_{1L}^{(j)} &= w_1^{(j)}(0), w_{1R}^{(j)} = w_1^{(j)}(\xi_1) \\ \tau_{x21L}^{(j)} &= c_{44}^{(1)} \frac{\partial w_1^{(j)}}{\partial \xi_1}(0), \tau_{x21R}^{(j)} = c_{44}^{(1)} \frac{\partial w_1^{(j)}}{\partial \xi_1}(\xi_1) \\ \phi_{1L}^{(j)} &= \phi_1^{(j)}(0), \phi_{1R}^{(j)} = \phi_1^{(j)}(\xi_1) \\ D_{x1L}^{(j)} &= -\epsilon_1^{(1)} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1}(0), D_{x1R}^{(j)} = -\epsilon_1^{(1)} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1}(\xi_1) \\ w_{2L}^{(j)} &= w_2^{(j)}(0), w_{2R}^{(j)} = w_2^{(j)}(\xi_2) \\ \tau_{x22L}^{(j)} &= c_{44}^{(2)} \frac{\partial w_2^{(j)}}{\partial \xi_2}(0) + e_{15}^{(2)} \frac{\partial \phi_2^{(j)}}{\partial \xi_2}(0) \\ \tau_{x22R}^{(j)} &= c_{44}^{(2)} \frac{\partial w_2^{(j)}}{\partial \xi_2}(\xi_2) + e_{15}^{(2)} \frac{\partial \phi_2^{(j)}}{\partial \xi_2}(\xi_2) \end{aligned} \right\} (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{2L}^{(j)} &= \phi_2^{(j)}(0), \phi_{2R}^{(j)} = \phi_2^{(j)}(\xi_2) \\ D_{x2L}^{(j)} &= e_{15}^{(2)} \frac{\partial w_2}{\partial \xi_2}(0) - \epsilon_1^{(2)} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2}(0) \\ D_{x2R}^{(j)} &= e_{15}^{(2)} \frac{\partial w_2}{\partial \xi_2}(\xi_2) - \epsilon_1^{(2)} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2}(\xi_2) \end{aligned} \right\} (18)$$

下面分两种情况给出结构中的传递矩阵。

2.1 反平面剪切波沿 x 轴正方向传播的情况

将式(11)、式(12)代入式(17)和式(18)中, 经过推导, 可得如下矩阵方程

$$\mathbf{v}_R^{(j)} = \mathbf{T}_i \mathbf{v}_L^{(j)} \quad (i = 1, 2) \quad (19)$$

式中: $\mathbf{v}_R^{(j)} = (w_R^{(j)} \quad \tau_{x2iR}^{(j)} \quad \phi_R^{(j)} \quad D_{xik}^{(j)})^T$, $\mathbf{v}_L^{(j)} = (w_L^{(j)}$

$\tau_{x2iL}^{(j)} \quad \phi_L^{(j)} \quad D_{xik}^{(j)})^T$ 为以力场和电场变量为元素的两个子层左右两端的状态向量; \mathbf{T}_i 为两个子层的传递矩阵, 其中的元素分别表示为

$$\left. \begin{aligned} T_1'(1, 1) &= \cos(\alpha_1 \xi_1) \\ T_1'(1, 2) &= \sin(\alpha_1 \xi_1)/c_{44}^{(1)} \alpha_1 \\ T_1'(2, 1) &= -c_{44}^{(1)} \alpha_1 \sin(\alpha_1 \xi_1) \\ T_1'(2, 2) &= \cos(\alpha_1 \xi_1) \\ T_1'(3, 3) &= 1 \\ T_1'(3, 4) &= -\xi_1/\epsilon_1^{(1)} \\ T_1'(4, 4) &= 1 \end{aligned} \right\} (20)$$

\mathbf{T}_1 中其余元素为零。

$$\left. \begin{aligned} T_2'(1, 1) &= \cos(\alpha_2 \xi_2) \\ T_2'(1, 2) &= \frac{\sin(\alpha_2 \xi_2)}{[c_{44}^{(2)} + p e_{15}^{(2)}] \alpha_2} \\ T_2'(1, 4) &= \frac{p \sin(\alpha_2 \xi_2)}{[c_{44}^{(2)} + p e_{15}^{(2)}] \alpha_2} \\ T_2'(2, 2) &= \cos(\alpha_2 \xi_2) \\ T_2'(2, 1) &= -[c_{44}^{(2)} + p e_{15}^{(2)}] \alpha_2 \sin(\alpha_2 \xi_2) \\ T_2'(2, 4) &= p[\cos(\alpha_2 \xi_2) - 1] \\ T_2'(3, 1) &= p[\cos(\alpha_2 \xi_2) - 1] \\ T_2'(3, 3) &= 1 \\ T_2'(3, 2) &= \frac{p \sin(\alpha_2 \xi_2)}{[c_{44}^{(2)} + p e_{15}^{(2)}] \alpha_2} \\ T_2'(4, 4) &= 1 \\ T_2'(3, 4) &= \frac{p^2 \sin(\alpha_2 \xi_2)}{[c_{44}^{(2)} + p e_{15}^{(2)}] \alpha_2} - \frac{\xi_2}{\epsilon_1^{(2)}} \end{aligned} \right\} (21)$$

\mathbf{T}_2 中其余元素为零。

两子层界面处满足 $\mathbf{v}_{iR}^{(j)} = \mathbf{v}_{iL}^{(j)}$, 故由式(19)得第 j 个单胞左右两端状态向量间的关系式为

$$\mathbf{v}_{2R}^{(j)} = \mathbf{T}_j \mathbf{v}_{1L}^{(j)} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

式中: $\mathbf{T}_j = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$ 为第 j 个单胞中的传递矩阵。又因为第 $j-1$ 个单胞右端和第 j 个单胞左端界面处满足 $\mathbf{v}_{1L}^{(j)} = \mathbf{v}_{2R}^{(j-1)}$, 代入式(22)得第 $j-1$ 个单胞和第 j 个单胞状态向量间的关系式为

$$\mathbf{v}_{2R}^{(j)} = \mathbf{T}_j \mathbf{v}_{2R}^{(j-1)} \quad (23)$$

由上式可见 \mathbf{T}_j 即为两相邻单胞间的传递矩阵。

2.2 反平面剪切波沿 y 轴正方向传播的情况

将式(15)和式(16)代入式(17)和式(18)中, 经过与 2.1 节中相同的推导过程, 得到与式(23)相同的矩阵方程, 两相邻单胞间的传递矩阵 $\mathbf{T}_j = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$, 其中 \mathbf{T}_i 为两个子层的传递矩阵, 其中的元素分别表示为

$$\left. \begin{aligned}
 T_1'(1, 1) &= [\exp(r_1 \zeta_1) + \exp(-r_1 \zeta_1)]/2 \\
 T_1'(1, 2) &= [\exp(r_1 \zeta_1) - \exp(-r_1 \zeta_1)]/[2c_{44}^{(1)} r_1] \\
 T_1'(2, 1) &= [\exp(r_1 \zeta_1) - \exp(-r_1 \zeta_1)]c_{44}^{(1)} r_1/2 \\
 T_1'(2, 2) &= [\exp(r_1 \zeta_1) + \exp(-r_1 \zeta_1)]/2 \\
 T_1'(3, 3) &= [\exp(\alpha \zeta_1) + \exp(-\alpha \zeta_1)]/2 \\
 T_1'(3, 4) &= -[\exp(\alpha \zeta_1) - \exp(-\alpha \zeta_1)]/[2\delta_1^{(1)} \alpha] \\
 T_1'(4, 3) &= -[\exp(\alpha \zeta_1) - \exp(-\alpha \zeta_1)]\delta_1^{(1)} \alpha/2 \\
 T_1'(4, 4) &= [\exp(\alpha \zeta_1) + \exp(-\alpha \zeta_1)]/2
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

T_1' 中其余元素为零。

$$\left. \begin{aligned}
 T_2'(1, 1) &= [\exp(r_2 \zeta_2) + \exp(-r_2 \zeta_2)]/2 \\
 T_2'(1, 2) &= \frac{\exp(r_2 \zeta_2) - \exp(-r_2 \zeta_2)}{2r_2[pe_{15}^{(2)} + c_{44}^{(2)}]}, T_2'(1, 3) = 0 \\
 T_2'(1, 4) &= \frac{p[\exp(r_2 \zeta_2) - \exp(-r_2 \zeta_2)]}{2r_2[pe_{15}^{(2)} + c_{44}^{(2)}]} \\
 T_2'(2, 1) &= \{c_{44}^{(2)} r_2 [\exp(r_2 \zeta_2) - \exp(-r_2 \zeta_2)] + pe_{15}^{(2)} [r_2 \exp(r_2 \zeta_2) - r_2 \exp(-r_2 \zeta_2)] - \alpha \exp(\alpha \zeta_2) + \alpha \exp(-\alpha \zeta_2)\}/2 \\
 T_2'(2, 2) &= [\exp(r_2 \zeta_2) + \exp(-r_2 \zeta_2)]/2 \\
 T_2'(2, 3) &= \alpha e_{15}^{(2)} [\exp(\alpha \zeta_2) - \exp(-\alpha \zeta_2)]/2 \\
 T_2'(2, 4) &= p[\exp(r_2 \zeta_2) + \exp(-r_2 \zeta_2) - \exp(\alpha \zeta_2) - \exp(-\alpha \zeta_2)]/2 \\
 T_2'(3, 1) &= p[\exp(r_2 \zeta_2) + \exp(-r_2 \zeta_2) - \exp(\alpha \zeta_2) - \exp(-\alpha \zeta_2)]/2 \\
 T_2'(3, 2) &= \frac{p[\exp(r_2 \zeta_2) - \exp(-r_2 \zeta_2)]}{2r_2[pe_{15}^{(2)} + c_{44}^{(2)}]} \\
 T_2'(3, 3) &= [\exp(\alpha \zeta_2) + \exp(-\alpha \zeta_2)]/2 \\
 T_2'(3, 4) &= \{r_2 [c_{44}^{(2)}/\delta_1^{(2)} + p^2][\exp(-\alpha \zeta_2) - \exp(\alpha \zeta_2)] + \alpha p^2 [\exp(r_2 \zeta_2) - \exp(-r_2 \zeta_2)]\}/\{2r_2 \alpha [pe_{15}^{(2)} + c_{44}^{(2)}]\} \\
 T_2'(4, 1) &= \alpha e_{15}^{(2)} [\exp(\alpha \zeta_2) - \exp(-\alpha \zeta_2)]/2 \\
 T_2'(4, 2) &= 0 \\
 T_2'(4, 3) &= -\alpha \delta_1^{(2)} [\exp(\alpha \zeta_2) - \exp(-\alpha \zeta_2)]/2 \\
 T_2'(4, 4) &= [\exp(\alpha \zeta_2) + \exp(-\alpha \zeta_2)]/2
 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

3 波动局部化

弹性波在失谐周期结构中传播时, 波动幅值将以空间指数形式衰减, 相应的指数衰减常数称为波动局部化因子。因此, 局部化因子描述了弹性波在失谐周期结构中传播时, 波动幅值的平均指数衰减程度, 其可用于刻画局部化现象对结构振动与强度的影响程度。根据周期结构的对称性可以证明, Lyapunov 指数总是以互为相反数的关

系成对出现, 若传递矩阵的阶数为 $2m \times 2m$, 则可将 Lyapunov 指数按从大到小的顺序排列为

$$\lambda \geq \lambda \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0 \geq \lambda_{m+1} (= -\lambda_m) \geq \lambda_{m+2} (= -\lambda_{m-1}) \geq \dots \geq \lambda_{2m} (= -\lambda) \quad (26)$$

根据 Lyapunov 指数的特性, Xie^[9] 给出了多耦合失谐周期结构中局部化因子的定义, 即最小的 Lyapunov 指数定义为局部化因子。这是因为, 它代表了幅值衰减程度最弱的波, 其在结构中传播的距离最远, 沿结构传输的能量也最远, 刻画了结构中弹性波或振动幅值主要的衰减特性。

Xie^[9] 根据 Wolf 等^[10] 提出的连续型动力系统中 Lyapunov 指数的计算方法, 给出了多耦合周期结构中计算第 k 个 Lyapunov 指数的表达式, 即

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \|\hat{v}_{2R,k}^{(j)}\| \quad (27)$$

式中: 向量 $\hat{v}_{2R,k}^{(j)}$ 将在以下内容中给出其意义。

为了计算第 k ($1 \leq k \leq 2m$) 个 Lyapunov 指数, 选择 k 个正交的初始单位状态向量 $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_k^{(0)}$ 这些向量的阶数为 $2m$ 。应用各个单胞状态向量之间的传递关系式(23) 依次迭代, 计算出每次迭代的状态向量, 第 j 次迭代得到

$$v_{2R,l}^{(j)} = T_j u^{(j-1)} \quad (j = 1, 2, \dots; l = 1, 2, \dots, k) \quad (28)$$

其中: 向量 $u^{(j-1)}$ 为正交单位向量。而向量 $v_{2R,l}^{(j)}$ 通常不是正交单位向量。需要采用 Gram-Schmidt 标准正交化方法对其进行标准正交化, 即

$$\begin{aligned}
 \hat{v}_{2R,1}^{(j)} &= v_{2R,1}^{(j)}, u_1^{(j)} = \hat{v}_{2R,1}^{(j)} / \|\hat{v}_{2R,1}^{(j)}\| \\
 \hat{v}_{2R,2}^{(j)} &= v_{2R,2}^{(j)} - (v_{2R,2}^{(j)}, u_1^{(j)}) u_1^{(j)}, \\
 u_2^{(j)} &= \hat{v}_{2R,2}^{(j)} / \|\hat{v}_{2R,2}^{(j)}\|, \dots, \\
 \hat{v}_{2R,k}^{(j)} &= v_{2R,k}^{(j)} - (v_{2R,k}^{(j)}, u_{k-1}^{(j)}) u_{k-1}^{(j)} - \dots - \\
 & \quad (v_{2R,k}^{(j)}, u_1^{(j)}) u_1^{(j)}, u_k^{(j)} = \hat{v}_{2R,k}^{(j)} / \|\hat{v}_{2R,k}^{(j)}\|
 \end{aligned}$$

这样, 由式(27) 即可计算出 m 对互为相反数的 Lyapunov 指数, 其中第 m 个 Lyapunov 指数 λ_m 即为局部化因子。对于本文研究的周期压电复合材料结构, 由于传递矩阵 T_j 的阶数为 4×4 , 因此, 系统的第 2 个 Lyapunov 指数 λ_2 为局部化因子。

4 计算实例及分析讨论

本文针对图 1 所示的 2-2 型周期压电复合材料结构, 研究了不同频率的波动(扰动) 在其中的传播与局部化特性。研究中认为压电聚合物的厚度 a_1 出现失谐, 并假定其服从均值为 \bar{a}_1 , 变异系数为 δ 的均匀分布。进而, a_1 可表示为

$$a_1 = \bar{a}_1 [1 + \sqrt{3} \delta (2z - 1)] \quad (29)$$

式中: $z \in (0, 1)$ 为一服从标准均匀分布的无量纲随机变量。压电陶瓷和压电聚合物的材料常数取值如下^[5]: $c_{44}^{(1)} = 0.128 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $c_{44}^{(2)} = 2.3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\rho_1 = 1.18 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 7.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\epsilon_1^{(1)} = 0.2036 \times 10^{-10} \text{ F/m}$, $\epsilon_1^{(2)} = 277 \times 10^{-10} \text{ F/m}$, $e_{15}^{(2)} = 17.0 \text{ C/m}^2$ 。

对于弹性波垂直于界面传播的情况, 研究中取 a_1 的变异系数 $\delta = 0, 0.05, 0.1$ 这3种情况, $\delta = 0$ 对应于谐调周期结构。为了分析压电效应对结构中波传播和局部化特性的影响, 考虑压电常数 $e_{15}^{(2)} = 0, 5, 10, 20 \text{ C/m}^2$ 这4种情况。针对不同的 δ 和 $e_{15}^{(2)}$ 值, 图2给出了结构中的波动局部化因子 λ_2 随无量纲波数 α_1 的变化情况。对于弹性

波沿界面方向传播的情况, 取压电常数 $e_{15}^{(2)} = 17 \text{ C/m}^2$, a_1 的变异系数分别取为 $\delta = 0, 0.02, 0.05, 0.1$, 入射波波速取为 $c = 2100 \text{ m/s}$, 研究了波动局部化因子 λ_2 随无量纲入射波数 α 的变化情况, 如图3所示。

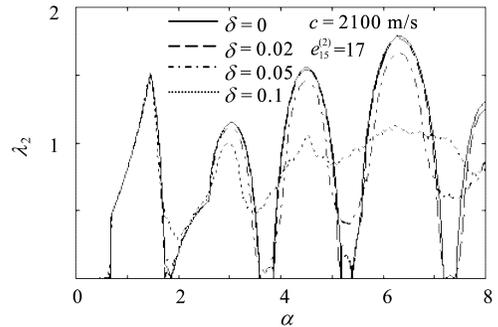


图3 弹性波沿 y 方向入射时, 局部化因子 λ_2 随无量纲波数 α 的变化曲线

Fig. 3 Localization factor vs dimensionless wavenumber α for the case of wave propagating in the y -direction

由图2可见, 由于压电陶瓷中压电效应的影响, 结构中通带和禁带特性变化很大。纯弹性材料的局部化因子幅值最小, 随着压电常数的增加, 局部化因子的幅值将增大, 并且通带也逐渐变狭。可见, 力电耦合效应将使得不能在结构中传播的弹性波频率范围增加。因此, 压电复合材料的压电效应将使结构的波动局部化程度加强。

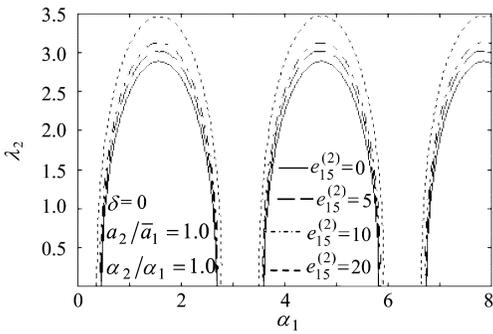
由图3和图4可见, 对于失谐周期结构, 除个别频率点外局部化因子在整个频率区域都为正值, 即结构中出现波动局部化现象。且失谐度越大, 通带内的局部化因子值越大, 局部化程度越强。另外, 对于失谐结构, 压电常数越大局部化程度也有所加强。

由图5可见, 与图2相比, 当弹性波沿 y 方向传播时, 在所研究的频率范围内通带和禁带的数量增加, 但每条通带的频率范围变狭。且随着失谐量的增大, 局部化程度显著增强。因此, 当弹性波沿 y 方向传播时, 若结构存在较大的失谐量, 则相邻子层中的波动幅值将很快衰减。

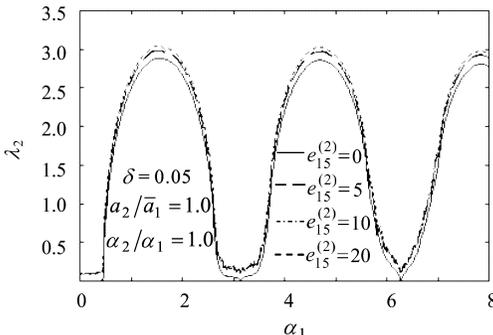
5 结论

针对弹性波垂直于界面层以及沿界面层方向传播两种情况, 研究了层状失谐周期压电复合材料结构中的波动局部化问题。得到如下结论:

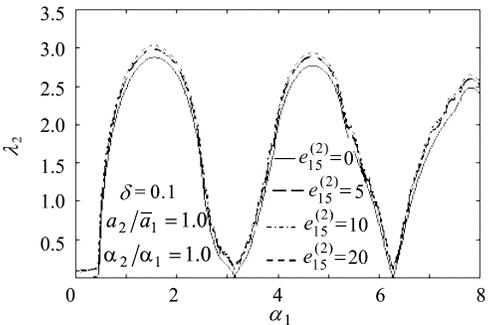
(1) 谐调周期结构中存在频率通带和禁带特性, 失谐周期结构中出现波动局部化现象, 失谐度越大, 频率通带内的局部化因子值越大, 局部化程度越强。



(a) $\delta = 0$



(b) $\delta = 0.05$



(c) $\delta = 0.1$

图2 弹性波沿 x 方向入射时, 局部化因子 λ_2 随无量纲波数 α_1 的变化曲线

Fig. 2 Localization factor vs dimensionless wavenumber α_1

for the case of wave propagating in the x -direction

(2) 由于力电耦合效应的影响, 压电常数越大, 结构的局部化程度越强。从而不能在结构中传播的弹性波的频率范围将变大(与纯弹性周期结构相比较而言)。

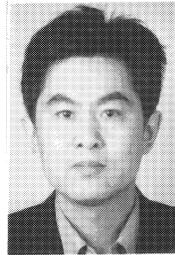
(3) 可以采用不同压电常数的压电材料, 以控制不同频率的波动在结构中传播。

参 考 文 献

- [1] 黄文虎, 王心清, 张景绘, 等. 航天柔性结构振动控制的若干新进展[J]. 力学进展, 1997, 27(1): 5-18.
Huang W H, Wang X Q, Zhang J H, *et al.* Some advances in the vibration control of aerospace flexible structures [J]. *Advances in Mechanics*, 1997, 27(1): 5-18. (in Chinese)
- [2] 吴克恭, 姜节胜, Hartmut J. 基于在线识别与全维状态观测技术的埋入压电片复合梁的振动主动控制研究[J]. 航空学报, 2003, 24(5): 431-434.
Wu K G, Jiang J S, Hartmut J. Active vibration control of composite material beam with piezoceramics embedded using on-line self identification and full state observer technique [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2003, 24(5): 431-434. (in Chinese)
- [3] 杜善义, 冷劲松, 王殿富. 智能材料系统和结构[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
Du S Y, Leng J S, Wang D F. *Intelligent material systems and structures* [M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese)
- [4] Zinchuk L P, Podlipenets A N. Dispersion equations for Rayleigh waves in a piezoelectric periodically layered structure [J]. *Journal of Mathematical Sciences*, 2001, 103(3): 398-403.
- [5] Qian Z H, Jin F, Wang Z K, *et al.* Dispersion relations for SH-wave propagation in periodic piezoelectric composite layered structures [J]. *International Journal of Engi-*

- neering Science, 2004, 42: 673-689.
- [6] Thorp O, Ruzzeno M, Baz A. Attenuation and localization of wave propagation in rods with periodic shunted piezoelectric patches [J]. *Smart Materials and Structures*, 2001; 10: 979-989.
- [7] 李凤明, 胡超, 黄文虎, 等. 失谐周期弹性支撑多跨梁中的波动局部化[J]. 固体力学学报, 2004, 25(1): 83-86.
Li F M, Hu C, Huang W H, *et al.* Wave localization in disordered multi-span beams with elastic supports [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2004, 25(1): 83-86. (in Chinese)
- [8] Li F M, Hu C, Huang W H. One-dimensional localization of elastic waves in rib-stiffened plates [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2002, 15(4): 208-212.
- [9] Xie W C. Buckling mode localization in rib-stiffened plates with randomly misplaced stiffeners [J]. *Computers and Structures*, 1998, 67: 175-189.
- [10] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, *et al.* Determining Lyapunov exponents from a time series [J]. *Physica D*, 1985, 16: 285-317.

作者简介:



李凤明(1969-) 男, 黑龙江安达人, 北京交通大学土建学院工程力学研究所, 博士后, 2003年7月毕业于哈尔滨工业大学航天工程与力学系, 研究方向: 弹性动力学、非线性结构动力学。E-mail: llffcc@tom.com; 联系电话: 010-51686353。

汪越胜(1965-) 男, 北京交通大学力学所所长, 教授, 博士生导师, 研究方向: 弹性波动力学, 断裂力学, 功能材料, 细观力学, 复合材料, 计算力学。E-mail: yswang@center.njtu.edu.cn; 联系电话: 010-51688417。

(责任编辑: 李铁柏)

报道

“中国航空学会航空维修工程专业委员会”学术年会召开

2005年9月26日至28日在沈阳召开了中国航空学会航空维修工程专业委员会第四届学术年会暨第七届专业委员会。来自陆航、海军、空军、中航一集团、中航二集团、民航及《国际航空》杂志社等33个单位的60余名代表参加了会议。开幕式上, 空军装备研究院航空所所长武维新致开幕词, 沈空装备部部长王凤银、空军装备外场部计划处处长袁越讲了话。在学术年会上共有16篇论文进行了大会交流。会上就以可靠性为中心的维修思想, 以及维修方式、维修体制、维修管理、突出装备等进行了研讨。

(薛玲)