

文章编号: 1000-6893(2006)01-0050-05

# 蜂窝夹芯旋转壳的屈曲分析

李 军, 薛明德

(清华大学 航天航空学院 工程力学系, 北京 100084)

## Buckling Analysis of Rotationally Periodic Sandwich Laminated Shells

LI Jun, XU E Ming-de

(Department of Engineering Mechanics, School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**摘 要:** 蜂窝夹芯复合材料旋转壳是航天器中的重要部件, 且常常与其它部件互相联结, 联结区局部高应力往往诱发复杂的局部屈曲模态, 为此发展了一套有限元求解方案。针对蜂窝夹芯层合壳体构造了一种基于相对自由度技术的 32 节点三层壳元, 这种单元避免了传统壳元的转动自由度, 易与三维实体单元连接, 使变厚度、带有补强的复合材料层合壳体等复杂结构得以正确建模。同时运用旋转周期结构有限元技术对大规模的空间蜂窝夹芯层合结构成功实施了屈曲分析。数值算例表明了计算策略的有效性和优越性。

**关键词:** 屈曲分析; 复合材料; 夹芯层合壳; 有限单元法

中图分类号: V414.1 文献标识码: A

**Abstract:** Sandwich laminated rotational shells are important parts of spacecraft, which are often connected with other components. The complicated local buckling modes are frequently caused by the local stress concentration at the joint areas. A finite element computational strategy of analyzing such structures is presented in this paper. A kind of 32-node and 3-layer shell element with relative Degrees Of Freedom (DOF) is developed for modeling sandwich laminated shells, which avoids resorting to the customary shell rotation DOFs and therefore can be easily connected with other solid type elements. All of these features enable its promising application in the simulation of modern sandwich structures, even if with varying thickness or complicated joint parts. For the buckling analysis of large scale rotationally periodic aerospace sandwich structures, a computational strategy that combines the rotationally periodic FE method and this new shell element is adopted in this paper. The numerical results show the efficiency and advantages of this computational strategy.

**Key words:** buckling analysis; composite material; sandwich laminated shell; finite element method

蜂窝夹芯复合材料层合壳体广泛用作航天器部件, 并与法兰、补强件等互相联结, 不同部件的联结区常因应力集中引起局部屈曲。准确预测此类结构的临界载荷和破坏模式, 具有重要的工程意义。许多学者致力于此问题的研究<sup>[1-3]</sup>, 其中有限元分析大多采用二维板壳元如逐层理论<sup>[4]</sup>、各种单层理论(经典壳元, 一阶或高阶剪切变形板壳元等)。这些单元在预测简单结构的整体响应时可以获得比较满意的结果, 但在预测带有联接件或变厚度的实际复合材料层合壳的局部响应时会遇到困难。若采用三维实体元, 又因壳尺寸与其厚度差异过大, 导致计算规模过大而无法实施分析。本文在实体单元基础上, 发展了一种相对自由度 32 节点三层壳元, 同时运用旋转周期结构有限元技术, 对在航天器中常见的带金属法兰的蜂窝夹芯层合圆柱壳成功实施了屈曲分析, 计算

结果显示在外压作用下它发生整体屈曲破坏, 而在轴压作用下则表现为局部屈曲破坏。

### 1 3 层 32 节点相对自由度层合壳元

传统壳单元以壳体中面节点的位移(3 个)与转角(2 个)作为节点自由度, 通常要求一个单元内为一种材料且等厚度, 故不易与三维实体单元连接。Wilson 等将非协调实体元<sup>[5]</sup>用于计算板壳结构时引入相对自由度的概念<sup>[5]</sup>, 从而克服了将三维实体元用于壳体分析时的数值困难。本文以此为基础, 发展了易于模拟变厚度层合壳并易与三维实体单元连接的相对自由度层合壳元, 其构造思路如下:

(1) 一个单元由图 1 所示 3 层 16 节点相对自由度壳元(图中 I、II、III 为 3 个单层壳)按上、中、下依次固结构成, 共计  $16 \times 3$  个节点,  $48 \times 3$  个自由度。每层相对自由度壳元的坐标 $\bar{x}_i$ 和位移 $\bar{u}_i$ 由对三维实体元的坐标和位移做以下线性变换得到<sup>[6]</sup>

$$\left. \begin{aligned} {}^k \bar{x}_i &= {}^k x_i - {}^k x_{i+4} \\ {}^k \bar{x}_{i+4} &= {}^k x_{i+4} \\ {}^k \bar{u}_i &= {}^k u_i - {}^k u_{i+4} \\ {}^k \bar{u}_{i+4} &= {}^k u_{i+4} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

( $i = 16(k - 1) + j; j = 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12; k = 1, 2, 3$ )

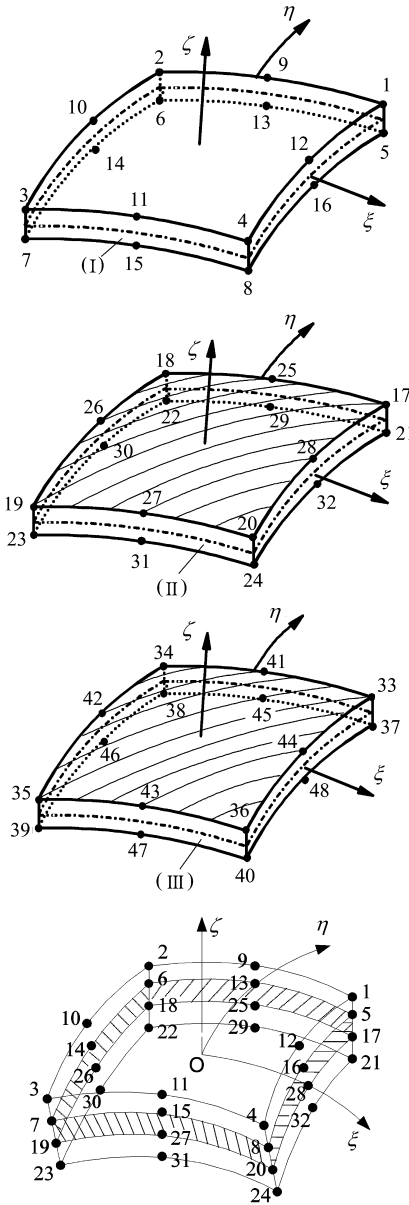


图 1 3 层 16 节点相对自由度壳元与 32 节点相对自由度三层壳元  
Fig. 1 3 layers of 16 nodes relative freedom shell elements and 32 nodes and 3 layers relative freedom shell element

式中: 左上标  $k$  为层号。可见  ${}^k \bar{x}_{i+4}$ 、 ${}^k \bar{u}_{i+4}$  仍保持原三维等参实体元下表面节点的绝对坐标和位移不变, 而  ${}^k \bar{x}_i$ 、 ${}^k \bar{u}_i$  则是原实体元上表面节点相对于底面节点的距离和相对位移。应用文献[6]所构造的这种不同于文献[5, 7]的单层相对自由度壳元构造多层单元十分方便, 文献[6]证明了用这种单层相对自由度壳元分析板壳时的数值优势。

(2) 第 I 层底面节点与第 II 层上表面节点位移连续

$${}^1 \bar{u}_i = {}^2 \bar{u}_j + {}^2 \bar{u}_{j+4}$$

( $i = 5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16; j = i + 12$ )

(2a)

第 II 层底面节点与第 III 层上表面节点位移连续

$${}^2 \bar{u}_i = {}^3 \bar{u}_j + {}^3 \bar{u}_{j+4}$$

( $i = 21, 22, 23, 24, 29, 30, 31, 32; j = i + 12$ )

(2b)

(2a)、(2b) 式中: 位移  ${}^k \bar{u}_i$  ( $k = 1, 2, 3$ ) 等均用上标“-”表示相对自由度; 下标表示节点编号。上述  $48 \times 3$  个节点自由度可分为两组

$$\bar{u}^T = (\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}) \quad (3)$$

其中:  $\bar{u}^{(1)}$  为独立的自由度, 有  $32 \times 3$  个分量

$$\bar{u}^{(1)} = ({}^1 \bar{u}_1, {}^1 \bar{u}_2 \dots {}^1 \bar{u}_{16}; \dots; {}^k \bar{u}_{m+5} \dots {}^k \bar{u}_{m+8}, {}^k \bar{u}_{m+13} \dots {}^k \bar{u}_{m+16}; \dots) \quad (4a)$$

$$\bar{u}^{(2)} = (\dots; {}^k \bar{u}_{m+1} \dots {}^k \bar{u}_{m+4}, {}^k \bar{u}_{m+9} \dots {}^k \bar{u}_{m+12}; \dots) \quad (4b)$$

( $m = 16(k - 1); k = 2, 3$ )

将(2a)、(2b)式的  $16 \times 3$  个位移协调条件用矩阵表示

$$c_{11} \bar{u}^{(1)} + c_{12} \bar{u}^{(2)} = \mathbf{0} \quad (5)$$

(3) 用拉格朗日乘子向量  $\Lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_8)^T$  将式(5)的约束条件引入到单元势能泛函  $W$  中去, 可得

$$\Pi = W + \Lambda^T [c_{11} \bar{u}^{(1)} + c_{12} \bar{u}^{(2)}] \quad (6)$$

由最小势能原理可得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{c}_{11}^T \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{c}_{12}^T \\ \mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}^{(1)} \\ \bar{u}^{(2)} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{(1)} \\ \mathbf{P}_{(2)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{K}_j$  是 3 层相对自由度单层壳元的刚度矩阵;  $\mathbf{P}_{(i)}$  为  $\bar{u}^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) 对应的节点力矢量。从式(7)中消去拉格朗日乘子  $\Lambda$  与界面自由度  $\bar{u}^{(2)}$  得到

$$[\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} + \mathbf{A}^T (\mathbf{c}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{c}_{12}^T)^{-1} \mathbf{A}] \bar{u}^{(1)} = \mathbf{P}_{(1)} - (\mathbf{K}_{12} + \mathbf{A}^T \mathbf{c}_{12}) \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{P}_{(2)} \quad (8)$$

式中:

$$\mathbf{A} = \mathbf{c}_{11} - \mathbf{c}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \quad (9)$$

最终可得 3 层 32 节点相对自由度层合壳元的节点位移向量

$$(\mathbf{a}^e)^T = (\bar{u}_1 \bar{u}_2 \dots \bar{u}_i \dots \bar{u}_{32}) = \bar{u}^{(1)} \quad (10)$$

层合壳元的绝对位移  $\bar{u}$  可由单元的相对位移矢量  $\mathbf{a}^e$  得到, 并进而求得单元内各层应变与应力。

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i = \bar{u}_i + \bar{u}_{i+4} & (i = 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12) \\ \mathbf{u}_i = \bar{u}_i & (i = 5, 6, 7, 8, 13 \leq i \leq 32) \end{cases} \quad (11)$$

## 2 旋转周期结构的屈曲有限元分析

本文研究线性屈曲问题, 基于如下基本假设:

①载荷是保守的,不依赖于物体的位形变化而变化;②屈曲前结构处于小变形状态,忽略初位移刚度矩阵中的非线性项;③每一增量步内应力增量和位移增量成线性关系。问题化为求屈曲模态  $U$  满足的齐次方程的特征值与特征矢量<sup>[6]</sup>

$$(K_e + K_G)U = 0 \quad (12)$$

其中:  $K_e$  为线弹性刚度阵;  $K_G = [{}^t K_u + {}^t K_\sigma]$  为几何刚度阵, 其中  ${}^t K_u$  与  ${}^t K_\sigma$  分别为初位移与初应力刚度阵, 取决于屈曲前的位移与应力。

采用文献[7]所给方法, 将图 2(a) 所示旋转周期结构沿周向分为  $N$  个相同子结构。结构的总体坐标系为  $XYZ$ ,  $Z$  为旋转轴, 各个子结构建立局部坐标  $x_j y_j z_j (j = 1, 2, \dots, N, z_j$  与  $Z$  重合) 并用相同的网格划分,  $x_1 y_1 z_1$  与  $XYZ$  重合。与  $j$  子结构相关的自由度分为 3 类: 属于  $j$  子结构并与其它子结构无关的自由度称为  $j$  子结构的内部自由度  $X_1$ , 属于  $j$  子结构并与其它子结构相关的自由度称为主边界自由度  $X_2$ , 属于其它子结构并与  $j$  子结构相关的自由度称为从边界自由度  $X_3$ , 见图 2(b)。用界面主从自由度技术<sup>[7]</sup>, 整个结构分析可减缩为对一个子结构进行, 有限元求解方程为

$$\left( \sum_{j=1}^N K_{jj}^{(1)} + \sum_{j=2}^N (\Phi^{-1})^T K_{jj}^{(j)} \Phi^{-1} + \sum_{j=2}^N (\Phi^{-1}) K_{j1}^{(j)} (\Phi^{-1})^T \right) u_1 = P_1 \quad (13)$$

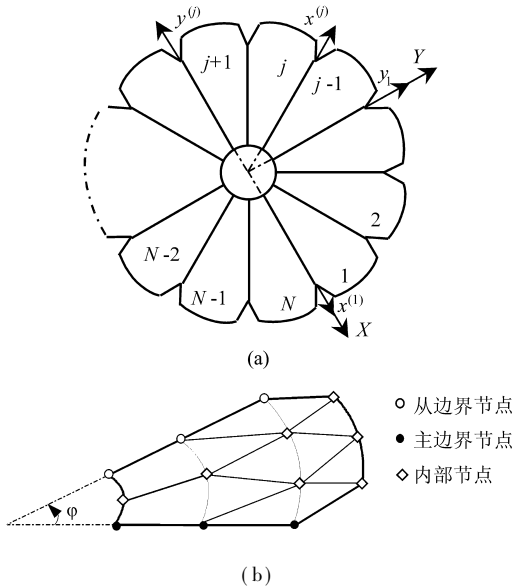


图2 旋转周期结构和典型子结构节点分类示意图

Fig. 2 A rotationally periodic structure and node classification of one substructure

其中:  $u_1$  和  $P_1$  分别为第 1 个子结构的节点位移和节点力向量; 下标 1 表示第 1 个子结构的刚度矩阵元素,  $\Phi^{-1}$  则表示第  $j$  个子结构位移矢量从

局部坐标系到整体坐标系的变换矩阵。

因旋转周期结构的屈曲模态仍保持周期性, 即结构旋转一个子结构的张角  $2\pi/N$  时, 其屈曲模态旋转了某个相位角  $\theta$ , 故可引入相邻子结构间屈曲模态的复约束关系<sup>[6]</sup>, 整个结构求解方程 (12) 化为

$$(T^H K_e T + \Lambda T^H K_G T) X = 0 \quad (14)$$

式中: 只包含了第 1 个子结构的自由度,  $T^H$  是  $T$  的共轭转置矩阵;  $T$  由复约束方法得到

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & \Lambda e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = TX \quad (15)$$

$\Lambda$  为从总体坐标系到子结构局部坐标系的转换阵。

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1^{-1} & & & \\ & \Lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_n^{-1} \end{bmatrix} = \text{diag}(\Lambda_i^{-1})$$

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

( $\varphi = 2\pi/N$ ;  $i = 1, 2, \dots, J$ ) (16)

由于结构各阶屈曲模态的周向波数事先并不知道, 所以在计算过程中应当逐一取

$$\theta = 0, 2\pi/N, \dots, 2\pi(N/2 - 1)/N, \pi \quad (N \text{ 为偶数})$$

$$\theta = 0, 2\pi/N, \dots, 2\pi(N-1)/2N \quad (N \text{ 为奇数})$$

(17)

从而求得每一个对应的周向波数下的屈曲载荷和屈曲模态。

### 3 算例分析

(1) 复合材料层合圆柱壳受轴压失稳 两端简支的环氧树脂基碳纤维复合材料层合圆柱壳受轴压失稳<sup>[8]</sup>, 壳半径  $R = 190.5 \text{ mm}$ , 长度  $l = 190.5 \text{ mm}$ , 厚度  $t = 3.175 \text{ mm}$ 。层合壳共 8 层, 采用两种铺层方案  $[0_2/90_2]_s$  和  $[90_2/0_2]_s$ , 材料参数见文<sup>[8]</sup>。用 3 层 32 节点相对自由度壳元进行计算, 并与文献[8]中的解析解进行了比较。为证明计算的收敛性, 采用两种疏密不同的网格。

表 1 与图 3 显示本文解均与文献[8]吻合得很好, 说明本文所发展的相对自由度层合壳元具有较高的计算效率与精度。本文临界载荷比文<sup>[8]</sup>解析解略小是因为文献[8]假设壳的横向剪切应变为常数, 加大了结构刚度, 而本文并未做此假设。

表 1  $[0_2/90_2]_s$  和  $[90_2/0_2]_s$  铺层的计算结果

Table 1 The results of  $[0_2/90_2]_s$  and  $[90_2/0_2]_s$  stacks

$[0_2/90_2]_s$ 铺层	方案 1	方案 2	解析解 <sup>[8]</sup>
环向子结构数	50	100	
每个子结构自由度数	1515	2475	
总自由度数	57,000	186,000	
临界屈曲载荷/( $kN \cdot m^{-1}$ )	766.76	766.45	783.5
环向屈曲波数	6	6	6
$[90_2/0_2]_s$ 铺层	方案 1	方案 2	解析解 <sup>[8]</sup>
环向子结构数	60	100	
每个子结构自由度数	1515	2475	
总自由度数	68,400	186,000	
临界屈曲载荷/( $kN \cdot m^{-1}$ )	708.82	703.42	718.2
环向屈曲波数	6	6	6

表 2 复合材料层合圆柱壳的材料参数

Table 2 Material properties of the sandwich laminated cylindrical shell

	铝	碳纤维	蜂窝	
			(加填充剂)	蜂窝
$E_{11}/(10^9 Pa)$	60.0	23.98	0.75	$2.5 \times 10^{-4}$
$E_{22}/(10^9 Pa)$	60.0	23.98	0.75	$2.5 \times 10^{-4}$
$E_{33}/(10^9 Pa)$	60.0	3.72	0.75	0.12
$G_{12}/(10^9 Pa)$	23.08	9.37	0.28	$9.0 \times 10^{-5}$
$G_{23}/(10^9 Pa)$	23.08	3.57	0.28	0.129
$G_{31}/(10^9 Pa)$	23.08	3.57	0.28	0.129
$\nu_{12}$	0.3	0.28	0.36	0.35
$\nu_{23}$	0.3	0.03403	0.36	0.3
$\nu_{31}$	0.3	0.3	0.36	$6.25 \times 10^{-4}$

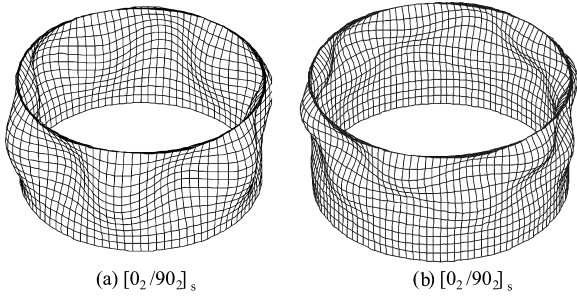


图 3 层合圆柱壳屈曲模式图

Fig 3 Buckling modes of the laminated cylindrical shell

用本文方法分别计算该结构受均匀外压和在上法兰面受轴压两种工况下的屈曲载荷与模式,并与现行航天结构工程计算方法<sup>[9]</sup>进行了比较。

整个结构被分为 100 个子结构,采用了 3 层 32 节点相对自由度壳元、16 节点 Wilson 非协调实体元和两者之间的过渡单元建模,共 511200 自由度,每个子结构则有 6102 自由度。采用旋转周期屈曲分析方法,实际上只需对一个子结构建模,不但大大降低了计算规模,而且提高了计算临界屈曲载荷的准确度。外压工况前 2 阶屈曲载荷和屈曲模式的计算结果分别见表 3 和图 5。轴压工况前 2 阶屈曲载荷和屈曲模式的计算结果分别见表 3 和图 5。应用文献[9]的工程计算方法时,略去法兰,设壳体在与法兰连接处两端简支。

(2) 带金属法兰的蜂窝夹芯层合圆柱壳受轴压/外压失稳 图 4 示带金属法兰的蜂窝夹芯复合材料层合圆柱壳在航天领域广泛采用,其底部固定,上法兰面径向自由。各部分材料属性见表 2。

表 3 复合材料层合圆柱壳前 2 阶临界屈曲载荷

Table 3 Critical loads of the first two buckling mode

工 况	侧压工况	
	第 1 阶	第 2 阶
屈曲模式		
屈曲载荷/MPa	0.8735	0.8817
文献[9]整体屈曲解/MPa	0.7907	—
工 况	轴压工况	
屈曲模式	第 1 阶	第 2 阶
屈曲载荷/kN	1083.39	1085.84
文献[9]整体屈曲解/kN	1962.94	—

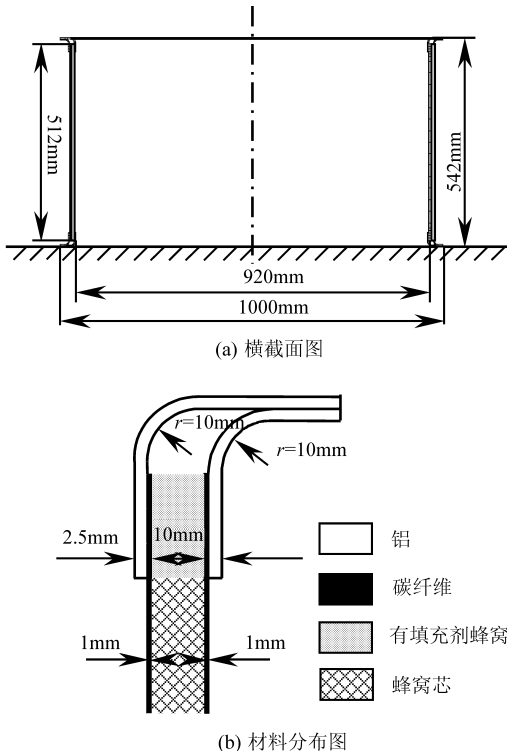


图 4 带金属联结框的蜂窝夹芯层合圆柱壳结构示意图

Fig 4 The sandwich cylindrical shell with metallic frames

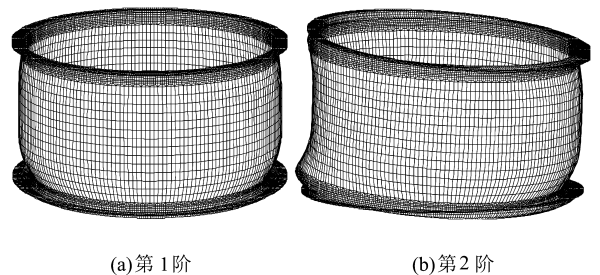


图 5 复合材料层合圆柱壳轴压工况屈曲模式图

Fig 5 The buckling modes of the cylindrical shell under axial compression

表3与图6显示,层合圆柱壳在侧压工况下表现为整体失稳破坏,而工程计算方法保守地假设壳体为两端简支,从而得到安全的设计结果。但在轴压工况下,由于下法兰处的连接部位存在应力集中而表现为局部屈曲破坏,局部屈曲临界载荷远低于整体失稳临界值。对于此类结构如仍采用传统的整体屈曲工程计算方法指导结构设计,将会是非常危险的。而要反映这种局部屈曲现象就必须划分很精细的网格,若采用三维实体单元,为避免单元病态要求网格划分很密,通常导致计算规模过大而难于实施。如果用壳单元去离散蜂窝夹芯壳,而法兰部分用实体单元模拟,传统壳单元和实体单元的连接往往比较复杂而且极易出错。本文提出的这种计算方法则很好地解决了准确模拟结构局部屈曲行为和计算控制规模之间的矛盾。

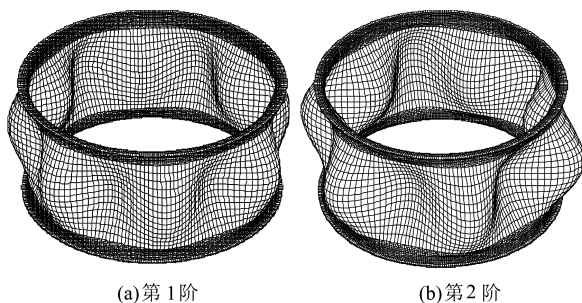


图6 复合材料层合圆柱壳外压工况屈曲模态图  
Fig. 6 The buckling modes of the cylindrical shell under lateral pressure

#### 4 结论

从三维非协调实体元出发构造了一种3层32节点相对自由度壳元,由于引入相对自由度而摒弃了传统壳元的转动自由度,该层合壳元易于模拟变厚度层合壳体,可以方便地与三维实体元联接,从而为蜂窝夹芯层合结构的分析实现了一种基于三维理论的建模方案。同时对于旋转周期复合材料层合结构的屈曲分析,联合运用旋转周期有限元屈曲分析技术,把对整个结构的分析减缩为只需对一个典型子结构进行,在不失准确性的前提下大大降低了计算规模,从而为复杂的旋转周期复合材料层合结构的屈曲分析提供了准确可行的计算方法。典型算例验证了本文计算方法的准确性和有效性,最后对在航天领域大量采用的带有金属法兰联接件的复合材料层合圆柱壳结构成功实施了屈曲分析,发现其在外压作用下表现为整体屈曲破坏,而在轴压作用下表现为局部屈曲破坏。

#### 参考文献

- [1] Noor A K, Burton W S. Assessment of computational models for multilayered composite shells[J]. *Appl Mech Rev*, 1990, 43: 67-97.
- [2] 汪海,陈秀华,郭杏林,等. 复合材料蜂窝夹芯结构修理后强度研究[J]. *航空学报*, 2001, 22(3): 270-273. Wang H, Chen X H, Guo X L, *et al.* Strength investigation of composite honeycomb structures after repair[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2001, 22(3): 270-273. (in Chinese)
- [3] 孙先念,陈浩然,陈绍杰. 含分层损伤复合材料层合板前后屈曲行为研究[J]. *航空学报*, 1999, 20(3): 224-229. Sun X N, Chen H R, Chen S J. Pre-postbuckling analysis of composite laminates with delamination damage[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 1999, 20(3): 224-229. (in Chinese)
- [4] Reddy J N. An evaluation of equivalent single layer and layerwise theories of composite laminates[J]. *Comp Struct* 1993, 25: 21-58.
- [5] Wilson E L *et al.* Incompatible displacement models[A]. In: *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*[C]. New York: Academic Press Inc, 1973.
- [6] Xiang Z H, Xue M D, Liu Y H, *et al.* Finite element buckling analysis of rotationally periodic laminated composite shells[J]. *Int J Numer Meth Eng* 2002, 53: 959-981.
- [7] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社,2003. Wang X C. *Finite element method*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese)
- [8] Han B, Simitses G J. Analysis of anisotropic laminated cylindrical shells subjected to destabilizing loads. Part II: numerical results[J]. *Comp Struct* 1991, 17: 183-205.
- [9] 《导弹结构强度计算手册》编写组. 导弹结构强度计算手册[M]. 北京:国防工业出版社,1978. Editor group for "Manual on computing structural strength of missiles". *Manual on computing structural strength of missiles*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1978. (in Chinese)

作者简介:



李军(1977-)男,山东东营人,清华大学工程力学系博士研究生,lijun00@mails.tsinghua.edu.cn



薛明德(1940-)女,江苏无锡人,清华大学工程力学系教授。xuemd@mail.tsinghua.edu.cn

(责任编辑:李铁柏)