

文章编号: 100026893(2006)022027205

# 随机结构响应量置信区间的一种求解方法

王燕萍, 吕震宙

(西北工业大学 航空学院, 陕西, 西安 710072)

Confidence Interval Analysis for Response Variable of Random Structure

WANG Yan2ping, LU Zhen2zhou

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**摘要:** 基于经典的可靠性分析方法和非正态变量向正态变量的等价变换, 提出了随机结构响应量置信区间估计的一种迭代方法, 该方法可用于复杂响应量函数或隐式响应量函数的置信区间分析。在采用有精确解的算例验证了所提方法的有效性后, 将所提方法用于 2 个工程实例, 对 10 杆结构中的位移函数和某型飞机翼身连接接头模型中的响应面函数进行了置信区间估计, 所提方法的计算结果与数值模拟方法计算结果的对照表明: 所提方法计算工作量小且计算精度高。

**关键词:** 可靠性; 置信度; 置信区间; 随机结构; 响应量

**中图分类号:** TB114.3, O212.1 **文献标识码:** A

**Abstract:** Based on the classic reliability analysis method and the equivalent transformation from non-normal random variable to normal random variable, an iterative method is presented for confidence interval analysis of random structure response variable, which is the complicated or implicit function of the basic random variables in general cases. Three examples with accurate solutions illustrate the precision and the validity of the presented method. Then the presented method is applied to analyze two engineering examples, i. e., the displacement function of ten-bar truss structure and the response function of the wing-fuselage joint structure of an aircraft. Compared with the numerical simulation method, the presented method shows virtue of less computation effort and higher precision.

**Key words:** reliability; confidence; confidence interval; random structure; response variable

随机结构中响应量的置信区间及其累积分布函数关系到结构的可靠与安全程度, 因为给出了响应量与一定置信度相对应的置信区间, 我们就可以以置信度的概率相信响应量落在求得的置信区间上, 因而十分有必要对求解响应量的置信区间的分析方法进行研究。随机结构的响应量一般为基本随机变量的复杂函数或隐式函数, 对于这种情况要想通过概率论的方法精确推导响应量的分布是十分困难的<sup>[1,2]</sup>。虽然可以采用数字模拟的方法, 由数理统计的基本原理来求得响应量的近似分布和相应的置信区间, 并且这种近似分布和近似置信区间是依据概率收敛于真实的分布和真实的置信区间, 但这种方法的计算工作量非常大, 尤其是在模拟响应量的尾分布时, 其要求的计算工作量是工程上不能接受的<sup>[3~5]</sup>。20 世纪 90 年代初有学者提出采用改进均值法来求解复杂响应量的累积分布函数<sup>[6,7]</sup>, 但这种方法对于物理

意义相同而数学表达式不同的响应量求得的累积分布是不同的, 因而也具有很大的局限性<sup>[8]</sup>。

本文针对复杂结构, 提出一种基于经典可靠性分析的响应量置信区间分析方法, 该方法不仅可以解决基本随机变量服从正态分布时, 复杂或隐式响应量的置信区间分析, 而且可以解决基本变量服从非正态分布时的响应量的置信区间分析。对于置信区间分析中的 2 个关键问题: 快速性与准确性, 本文所提方法均可很好解决。

## 1 置信区间的分析方法

设结构响应量函数  $Y$  与基本变量  $X$  的关系为  $Y = g(X)$  (其中基本随机变量  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ), 自变量  $X$  的分布已知。当  $g$  函数形式较复杂, 或者  $g$  函数为隐式情况下, 函数  $Y$  的分布是未知的, 现要求复杂  $g$  函数或者隐式  $g$  函数情况下响应随机变量  $Y$  的置信度为  $1 - A$  的置信区间  $(y, y)$  (其中  $y$  为置信下限,  $y$  为置信上限)。

由置信区间的概念知, 对于给定置信度  $1 - A$  有下列关系成立

$$P\{y \leq Y \leq y\} = 1 - A \quad (1)$$

收稿日期: 200421216; 修订日期: 200505227

基金项目: 国家自然科学基金(10572117)、航天基金(2003CH0502)和陕西省自然科学基金(2003CS0501)资助项目

通常取

$$P\{Y \leq y\} = A/2 \quad (2)$$

$$P\{Y > y\} = A/2 \quad (3)$$

式(2)和式(3)可以转化为如下式(4)和式(5)的等价形式

$$P\{Y - y \leq 0\} = A/2 \quad (4)$$

$$P\{y - Y \leq 0\} = A/2 \quad (5)$$

与经典可靠性分析方法<sup>[7,9]</sup>对比可知,上述式(4)和式(5)分别对应于功能函数  $g_1 = Y - y$  和  $g_2 = y - Y$  的失效概率都是  $A/2$ 。至此,求解  $Y$  的置信度为  $1 - A$  的置信区间问题就转化为求解  $y$  和  $y$ ,使得功能函数  $g_1 \leq 0$  和  $g_2 \leq 0$  的失效概率均为  $A/2$ 。以下是利用经典可靠性分析方法建立的复杂或隐式响应随机变量置信区间分析的基本步骤。

(1) 计算  $y^* = g(x_L)$ , 其中  $x_L$  是基本随机向量的均值向量, 即  $x_L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ ,  $L_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为基本随机变量  $x_i$  的均值。

(2) 令  $k = 1$ , 选定第 1 次计算的  $Y$  的置信度为  $1 - A$  的置信区间  $y^{(1)}$  和  $y^{(1)}$  (其中上标(1)表示第 1 次迭代), 由于  $g_1 \leq 0$  和  $g_2 \leq 0$  的概率分别是  $y$  和  $y$  的单调函数, 因此第 1 次迭代的  $y^{(1)}$  和  $y^{(1)}$  的选取对计算工作量的影响不是很大, 一般选  $y^{(1)}$  比  $y^*$  稍小,  $y^{(1)}$  比  $y^*$  稍大即可, 文中算例也充分表明  $y^{(1)}$  和  $y^{(1)}$  的选取只对前 2 步迭代有影响, 并且不同的初值均可以得到收敛的结果。

(3) 建立第  $k$  次迭代运算的功能函数  $g_1^{(k)}$  和  $g_2^{(k)}$  如下

$$g_1^{(k)} = Y - y^{(k)} \quad (6)$$

$$g_2^{(k)} = y^{(k)} - Y \quad (7)$$

若  $k = 1$ , 则还需建立如下两个极限状态方程

$$g_1^{(0)} = Y - y^* \quad (8)$$

$$g_2^{(0)} = y^* - Y \quad (9)$$

(4) 若  $k = 1$ , 则利用经典的可靠性分析方法计算功能函数式(6)~式(9)的失效概率, 计算的过程中  $y^{(k)}, y^{(k)}, y^*$  均为常数, 若  $X$  中含有非正态变量, 则根据 Rackwitz-Fiessler 法<sup>[9]</sup>建立的等价

正态变化的条件将非正态变量等价正态化, 并同时采用改进的一次二阶矩法迭代求得收敛的可靠性指标  $B^{(k)}, B^{(k)}$  和相应的失效概率  $P^{(k)} = P\{g_1^{(k)} \leq 0\} = \Phi(-B^{(k)}), P^{(k)} = P\{g_2^{(k)} \leq 0\} = \Phi(-B^{(k)})$ 。

若  $k > 1$ , 则利用经典的可靠性分析方法计算功能函数式(6)~式(7)的失效概率。

$$(5) \text{ 判别 } \left| \frac{P\{g_1^{(k)} \leq 0\} - \frac{A}{2}}{\frac{A}{2}} \right| \leq E \text{ 是否满足}$$

( $E$ 为给定的精度要求), 若满足, 则结束对置信下限  $y$  的迭代计算; 若不满足, 则利用  $(y^{(k-1)}, P\{g_1^{(k-1)} \leq 0\})$  和  $(y^{(k)}, P\{g_1^{(k)} \leq 0\})$  插值得到  $k+1$  次迭代计算的置信下限  $y^{(k+1)}$ 。

$$(6) \text{ 判别 } \left| \frac{P\{g_2^{(k)} \leq 0\} - \frac{A}{2}}{\frac{A}{2}} \right| \leq E \text{ 是否满足,}$$

若满足, 则结束对置信区间上限  $y$  的迭代计算; 若不满足, 则利用  $(y^{(k-1)}, P\{g_2^{(k-1)} \leq 0\})$  和  $(y^{(k)}, P\{g_2^{(k)} \leq 0\})$  插值得到  $k+1$  次迭代计算的置信上限  $y^{(k+1)}$ 。

(7) 令  $k = k + 1$ , 转入第(3)步。

所提方法不仅可以求得响应量与置信度对应的置信区间, 而且给定多个置信度, 还可以迭代求得响应量的累积分布函数曲线。上述算法中对于非正态变量采用 Rackwitz-Fiessler 提出的等价转换原则, 该方法要求在设计点处原非正态分布的密度函数与分布函数和等价正态分布的密度函数与分布函数分别相等, 由于设计点对失效概率的贡献最大, 因而这种等价变换是合理的, 当基本变量的变异系数不是很大时(大部分工程问题满足该条件), 这种等价变换具有很高的精度。

## 2 置信区间分析方法的精度验证

为验证本文所提置信区间估计方法的精度, 采用了表 1 中所列出的 3 个具有精确解的算例, 表 1 列出了置信度为 90% 时, 3 个算例用本文方

表 1 3 个具有精确解算例的计算结果

Table 1 Results of three examples with accurate solutions

算例	基本变量分布	置信度为 $1 - A = 90\%$ 时的置信区间		置信度的相对误差 $E$
		本文方法	精确解	$E = \frac{  \text{本文方法置信度} - \text{精确解置信度}  }{\text{精确解置信度}}$
$Z = X + Y$	$X \sim N(1, 9), Y \sim N(1, 16)$	(- 6 224, 10 224)	(- 6 224, 10 224)	0
$Z = \frac{X/4}{Y/5}$	$X \sim V^2(4), Y \sim V^2(5)$	(0 1577, 51 2585)	(0 1598, 51 1922)	$2.56 \times 10^{-3}$
$Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$	$X_1 \sim \#(2, 1), X_2 \sim \#(3, 1)$	(0 0966, 0 7532)	(0 0976, 0 7514)	$2.22 \times 10^{-3}$

法计算结果与精确解的比较。

图 1~ 图 3 则分别给出了 3 个算例用本文方法算得的响应量的累积分布函数与精确累积分布函数曲线的比较。

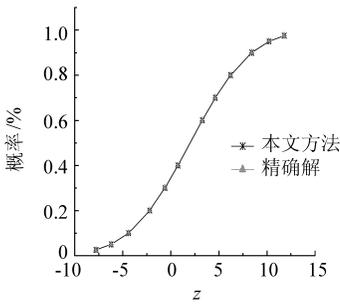


图 1 算例 1 的累积分布函数曲线

Fig 1 Cumulative distribution function curve of Example 1

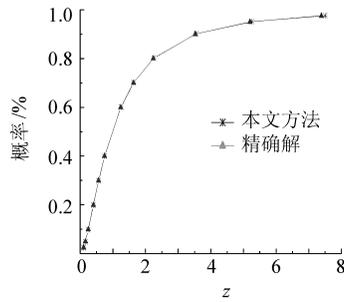


图 2 算例 2 的累积分布函数曲线

Fig 2 Cumulative distribution function Curve of Example 2

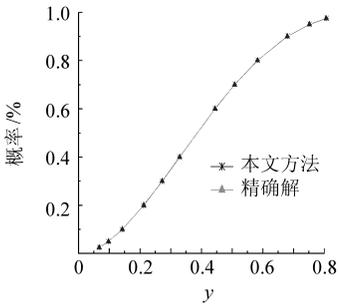


图 3 算例 3 的累积分布函数曲线

Fig 3 Cumulative distribution function curve of Example 3

图 4~ 图 6 则分别给出了相应于图 1~ 图 3 的本文方法在计算累积分布函数时与精确累积分布函数的相对误差曲线。

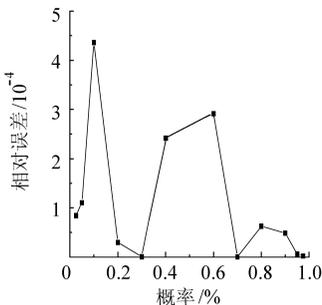


图 4 算例 1 的相对误差曲线

Fig 4 Relative error curve of Example 1

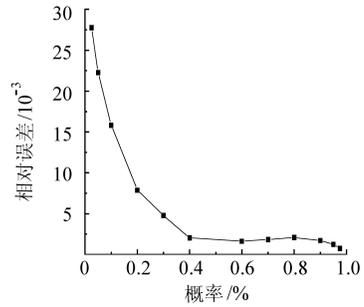


图 5 算例 2 的相对误差曲线

Fig 5 Relative error curve of Example 2

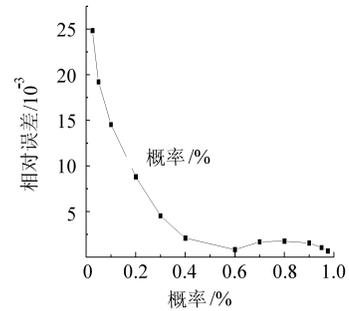


图 6 算例 3 的相对误差曲线

Fig 6 Relative error curve of Example 3

从表 1 和图 1~ 图 6 可以得出下列结论:

(1) 从表 1 中可以看到, 第 1 个算例的自变量是服从正态分布的, 用本文方法计算得到的置信度为 90% 的置信区间, 与用精确分布计算得到的置信区间是一样的, 误差为 0。

(2) 第 2 个和第 3 个算例的 1 个共同点是自变量都不服从正态分布, 用本文方法计算的置信区间与精确解相比, 误差很小。

(3) 用本文方法求得的响应量的累积分布函数曲线与精确的累积分布函数曲线吻合较好。

(4) 这些具有精确解的算例说明了本文方法在求解响应量的置信区间时精度是非常高的, 并且在具体的求解过程中还发现所提方法有较好的收敛性, 对初值的选取不敏感。

### 3 工程应用实例

例 1 如图 7 所示为十杆桁架结构, 其基本随机变量分别为: 杆  $i$  的面积  $A_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ ; 弹性模量  $E$ , 作用载荷  $P_1, P_2$  和  $P_3$ , 杆的长度  $L$ 。所有基本随机变量均是服从正态分布的, 它们的均值依次为  $L_{A_i} = 018 (i = 1, 2, \dots, 10)$ ,  $L_E = 10\ 000$ ,  $L_{P_j} = 100 (j = 1, 2, 3)$ ,  $L_L = 360$ , 标准差依次为  $R_{A_i} = 0108 (i = 1, 2, \dots, 10)$ ,  $R_E = 500$ ,  $R_{P_j} = 1010 (j = 1, 2, 3)$ ,  $R_L = 360$ 。

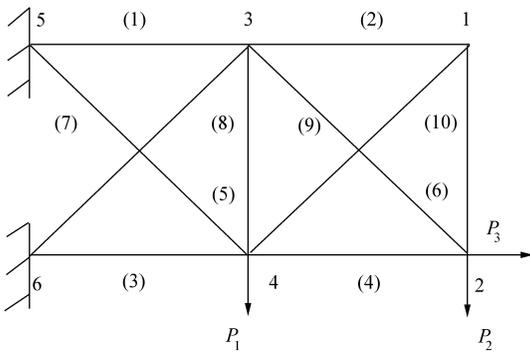


图7 10杆桁架结构

Fig 7 Tenbar truss structure

由单位载荷法可以求得节点 2 处的垂直位移为

$$Y = \left[ \sum_{i=1}^6 \frac{N_i^{(0)} N_i}{A_i} + \sqrt{2} \sum_{i=7}^{10} \frac{N_i^{(0)} N_i}{A_i} \right] \frac{L}{E}$$

其中  $N_i$  表示杆  $i$  的轴向力,  $N_i^{(0)}$  表示在  $P_1 = P_3 = 0$  和  $P_2 = 1$  时杆  $i$  的轴向力。现在要求节点 2 处的垂直位移  $Y$  的置信度为 90% 的置信区间, 结果示于表 2 中, 图 8 给出了本文方法求得的累积分布函数曲线与数字模拟法计算的累积分布函数曲线的对照。

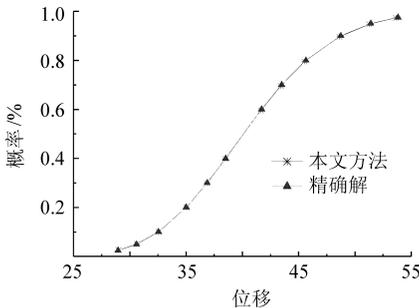


图8 十杆桁架结构的累积分布函数曲线

Fig 8 Cumulative distribution function curve of tenbar truss structure

例 2 在某型飞机翼身连接接头中用响应面法求得模型的一个功能函数表达式为

$$g(F, E, G) = a_0 + b_1 F + b_2 F + b_3 G + c_1 F^2 + c_2 E^2 + c_3 G^2$$

式中:  $a_0 = 71.36 @ 10^3$ ;  $b_1 = -81.07 @ 10^{-1}$ ;  $b_2 = -31.20 @ 10^{-1}$ ;  $b_3 = -21.15$ ;  $c_1 = 41.40 @ 10^{-5}$ ;

$c_2 = 21.30 @ 10^{-5}$ ;  $c_3 = 41.16 @ 10^{-4}$ 。基本变量是外载荷  $F$ , 弹性模量  $E$  和剪切模量  $G$ , 它们均服从正态分布, 均值为  $\{5003, 7065, 2656\}$ , 标准差为  $\{5001.3, 3531.25, 1321.8\}$ 。现在要求  $g$  的置信度为 90% 的置信区间, 结果示于表 2 中, 图 9 给出了本例题采用所提方法与采用数字模拟法计算的累积分布函数曲线的对照。

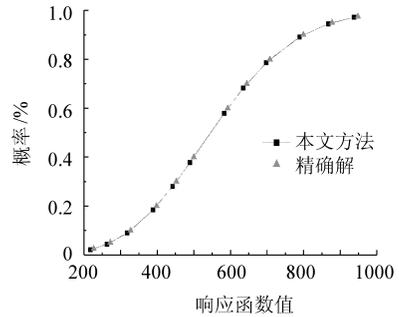


图9 翼身连接接头的累积分布函数曲线

Fig 9 Cumulative distribution function curve of the wing-fuselage joint structure of an aircraft

从表 2 和图 8~ 图 9 的结果可以看出: 用本文方法得到的十杆结构中的位移函数和某型飞机翼身连接接头模型中的响应面函数的置信区间, 与用数值模拟方法得到精确置信区间相比, 误差是十分小的, 而且本文方法的计算工作量也大大小于数字模拟法的工作量。这就进一步说明了本文所提方法在工程应用中的有效性和快捷性。

### 4 结论

(1) 通过对求解置信区间问题的等价变换, 将求解置信上、下限的问题转化为可靠度分析问题, 并提出了合理的迭代步骤, 所提方法可以解决基本变量为任意分布时的置信区间分析问题。

(2) 具有精确解的数值算例充分验证了本文方法在求解复杂响应量置信区间时的有效性。工程应用的算例表明, 与数值模拟方法相比, 本文方法能够快速而又准确地得到响应量的置信区间。在具体算例的求解过程中还发现所提方法有很好的收敛性, 对初值的选取不敏感。

(3) 虽然文中的算例均是给出了响应量与基本变量的显式关系式, 但这并不妨碍本文方法在

表 2 工程应用实例计算结果对比

Table 2 Results contrast of engineering examples

工程应用实例	置信度为 1- $\alpha$ =90% 时的置信区间		置信度的相对误差 E
	本文方法	数值模拟方法	$E = \frac{  \text{本文方法置信度} - \text{精确解置信度}  }{\text{精确解置信度}}$
十杆桁架结构	(301.62, 511.26)	(301.59, 511.41)	$2.89 @ 10^{-3}$
某型飞机翼身连接接头	(263, 867.3)	(2711.6, 877.3)	$11.11 @ 10^{-3}$

求解隐式响应量置信区间方面的应用。因为在所提方法的迭代步骤中均没有要求响应量是显式的, 只是响应量为基本变量的隐式函数时, 在用改进一次二阶矩法求每个迭代步中的可靠度指标时会遇到隐式函数的偏导数问题。

### 参 考 文 献

- [1] 赵选民, 徐伟, 师义民, 等. 数理统计[M]. 北京: 科学出版社, 2002.  
Zhao X M, Xu W, Shi Y M, et al. Mathematical statistics [M]. Beijing: Science Press, 2002. (in Chinese)
- [2] 茆诗松, 王静龙, 濮晓龙. 高等数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.  
Mao S S, Wang J L, Pu X L. Advanced mathematical statistics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2000. (in Chinese)
- [3] Melchers R E. Importance sampling in structural system [J]. Structural Safety, 1989, 6(1): 3- 10.
- [4] Bucher C G. Adaptive sampling an iterative fast Monte Carlo procedure [J]. Structural Safety, 1988, 5(2), 119- 126.
- [5] Hohenbichler M, Rackwitz R. Improvement of second order reliability estimates by importance sampling [J]. J En2

gng Mech, ASCE, 1988, 114(12): 2195- 2199.

- [6] 李良巧. 机械可靠性设计与分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998.  
Li L Q. Mechanism reliability design and analysis [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1998. (in Chinese)
- [7] Wu Y T, Millwater H R, Cruse T A. Advanced probabilistic, analysis method for implicit performance functions [J]. AIAA J, 1990, 28(9): 1663- 1669.
- [8] 何水清, 王善. 结构可靠性分析与设计[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.  
He S Q, Wang S. Mechanism reliability analysis and design [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1993. (in Chinese)

#### 作者简介:



王燕萍(1981- ) 女, 河南濮阳市, 西北工业大学硕士, 主要从事飞行器可靠性工程的研究。E2mail: yp\_wang@126.com。

(责任编辑: 李铁柏)