

# CST 气动外形参数化方法研究

关晓辉, 李占科\*, 宋笔锋

西北工业大学 航空学院, 陕西 西安 710072

**摘要:** 类别形状函数变换(CST)方法是通过类别函数和形状函数来表示几何外形的新型气动外形参数化方法。通过考察参数化过程线性系统的条件数以及对翼型的表示误差,研究了 Bernstein 多项式阶数(BPO)对 CST 方法单值性和精度的影响,并将 CST 方法与 B 样条法、Hicks-Henne 法和参数化翼型(PARSEC)法的参数数量和表示精度进行了对比。使用基于 CST 参数化方法的远场组元(FCE)激波阻力优化方法对超声速机翼进行外形优化,优化后的机翼其激波阻力降低达 61%。研究结果表明:CST 方法具有参数少,精度高的优点;为保证表示精度,同时避免病态参数化过程,应使用 4 阶以上、10 阶以下的 Bernstein 多项式定义形状函数。

**关键词:** 类别形状函数变换; 线性系统; 参数化; 多项式; 减阻; 外形优化

**中图分类号:** V221+.92; V224 **文献标识码:** A

在飞行器及其部件的气动优化设计过程中,气动外形参数化方法的性质对计算时间、设计空间的本质特性与范围有着十分深刻的影响<sup>[1-3]</sup>。搜索设计空间的计算量随着设计参数的增加而呈指数倍增长,优化设计所选用的参数化方法在保证最优解包含在设计空间中的同时,必须能够使用尽量少的参数和足够高的精度来定义几何外形,以降低设计过程中的计算量。

Kulfan 等提出使用一个类别函数(Class Function)和一个形状函数(Shape Function)来表示几何外形的类别形状函数变换(Class-Shape-Transformation, CST),并通过大量翼型的最小二乘拟合计算,得到了表示形状函数的 Bernstein 多项式阶数(Bernstein Polynomial Order, BPO)的经验取值范围<sup>[4-6]</sup>。CST 方法中,类别函数用来定义几何外形的种类,从而形成基本的几何外形,所有同类型几何外形都由这个基本外形派生出来。形状函数的作用是对类别函数所形成

的基本外形进行修正,从而生成设计过程所需要的几何外形。使用 Bernstein 多项式作为形状函数的基函数时,CST 参数化的定义式与 Bezier 曲线的数学表达式相似。Lane 等指出,与 Bezier 曲线相比,CST 参数化方法可以使用更少的参数来表示翼型,这主要是因为通过合理的选择类别函数,CST 曲线在没有进行参数调整的时候就与翼型曲线十分相似<sup>[7]</sup>。

Ceze 等对 36 阶 Bernstein 多项式定义的 CST 参数化过程的研究发现,其最小二乘拟合过程是严重病态的<sup>[8]</sup>。事实上,合理并且必要的 Bernstein 多项式阶数取值要小得多。本文从数学性态和表示精度方面对 CST 参数化方法的 Bernstein 多项式阶数合理取值范围进行研究,并在该范围内将 CST 方法和其他参数化方法进行对比,最后在超声速机翼的外形优化算例中对其进行应用。论文的研究对全面认识 CST 参数化方法及其在外形优化设计中的应用有一定的指导

收稿日期: 2011-06-27; 退修日期: 2011-08-29; 录用日期: 2011-09-23; 网络出版时间: 2011-10-11 14:11

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20111011.1411.005.html

DOI: CNKI:11-1929/V.20111011.1411.005

\* 通讯作者. Tel.: 029-88495914 E-mail: lzk@nwpu.edu.cn

引用格式: Guan X H, Li Z K, Song B F. A study on CST aerodynamic shape parameterization method. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2012, 33(4): 625-633. 关晓辉, 李占科, 宋笔锋. CST 气动外形参数化方法研究. 航空学报, 2012, 33(4): 625-633.

© 航空学报编辑部 http://hkxb.buaa.edu.cn

和参考价值。

## 1 基本原理

CST 参数化表示方法使用一个类别函数  $C_{N_2}^{N_1}(\psi)$  和一个形状函数  $S(\psi)$  来表示一个后缘封闭的翼型:

$$\zeta(\psi) = C_{N_2}^{N_1}(\psi)S(\psi) \quad (1)$$

式中:  $\zeta = z/c$ ;  $\psi = x/c$ 。其中:  $c$  为翼型弦长,  $x$  为翼型  $x$  轴坐标,  $z$  为翼型  $z$  轴坐标。  $N_1$  和  $N_2$  定义了所表示的几何外形的类别。

若翼型后缘不封闭, 则在式(1)的基础上添加一个后缘厚度项, 得到后缘不封闭的翼型公式:

$$\zeta(\psi) = C_{N_2}^{N_1}(\psi)S(\psi) + \psi\Delta\zeta_{te} \quad (2)$$

式中:  $\Delta\zeta_{te}$  为翼型后缘相对  $z$  轴坐标。类别函数定义为

$$C_{N_2}^{N_1}(\psi) = \psi^{N_1}(1-\psi)^{N_2} \quad (3)$$

美国国家航空咨询委员会(NACA)系列圆头尖尾翼型类别函数取  $N_1=0.5, N_2=1.0$ ; 双圆弧翼型, 则  $N_1=1.0, N_2=1.0$ ;  $N_1=0.75, N_2=0.75$  时, 类别函数曲线就定义了一个 Sears-Haack 旋成体, 如图 1 所示。

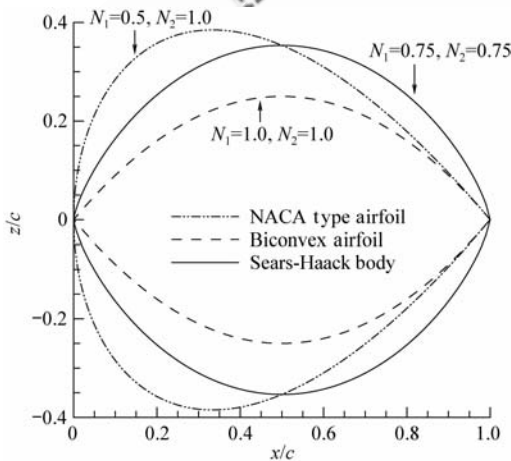


图 1 不同类别函数代表的几何外形

Fig. 1 Geometries represented by different class functions

CST 参数化方法的形状函数  $S(\psi)$  可以使用多种方法进行定义<sup>[9-11]</sup>。通常用  $n$  阶 Bernstein 多项式的加权和作为  $S(\psi)$  的表达式, 即

$$\begin{cases} S(\psi) = \sum_{i=0}^n b_i B_n^i(\psi) = \sum_{i=0}^n b_i [K_n^i \psi^i (1-\psi)^{n-i}] \\ K_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $B_n^i$  为 Bernstein 多项式,  $i$  为多项式中的指数,  $n$  为多项式阶数;  $K_n^i$  为组合数;  $b_i (i=0, 1, \dots, n)$  为引进的权重因子, 组成几何外形的  $n+1$  阶参数向量  $\mathbf{b}$ , 当  $\mathbf{b}=\mathbf{1}$  时, 由 Bernstein 多项式的性质可以得到  $S(\psi)=1$ , 称为单位形状函数, 相应的翼型为单位翼型(Unit Airfoil), 即类别函数表示的基本翼型。

另一种形状函数定义形式是使用 B 样条基函数加权和作为  $S(\psi)$  的表达式, 即

$$S(\psi) = \sum_{i=0}^n b_i N_i^k(\psi) \quad (5)$$

式中:  $k$  次 B 样条基函数  $N_i^k(\psi)$  是定义在节点向量  $\mathbf{T}=[t_0 \ t_1 \ \dots \ t_{n+k+1}]$  上的分段多项式, 其值可使用 de Boor-Cox 递推定义公式进行确定<sup>[12-13]</sup>, 即

$$\begin{cases} N_0^i(\psi) = \begin{cases} 1 & t_i \leq \psi \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \\ N_k^i(\psi) = \frac{\psi - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{k-1}^i(\psi) + \frac{t_{i+k+1} - \psi}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{k-1}^{i+1}(\psi) \\ \frac{0}{0} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

由 B 样条基函数的规范性可知,  $\mathbf{b}=\mathbf{1}$  时, 也可以得到单位形状函数  $S(\psi)=1$  和相应的单位翼型。如图 2 所示, 当  $n=6, k=3$  时, 一组系数向量  $\mathbf{b}=[1.0 \ 1.3 \ 0.8 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.8 \ 1.3 \ 1.0]$  通过以上两种形状函数定义所确定的两种翼型形状。

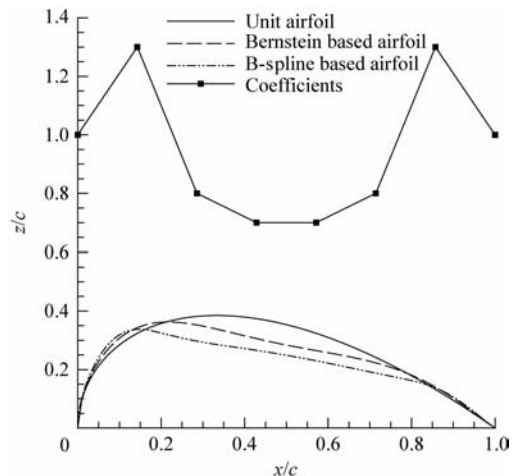


图 2 两种形状函数生成的翼型对比

Fig. 2 Airfoils generated by two different shape functions

从图 2 中可以看出, 当所选择的系数向量振荡很剧烈, 明显偏离常规翼型的基本形状时, Bernstein 多项式定义的形状函数仍然能够生成外形相对光滑, 较为合理的翼型曲线, 即基于 Bernstein 多项式的 CST 参数化方法对设计参数的突变振荡具有较高的过滤能力。而 B 样条基函数定义的形状函数则生成了有明显凹陷的翼型曲线。这样的结果与 Bernstein 多项式基函数的整体性和 B 样条基函数的局部支撑性有关。

## 2 单值性

气动外形优化设计中, 对给定几何外形添加一个微弱扰动, 其对应的参数向量的变化也应是微弱的。反过来说, 对一组设计参数向量添加一个在给定精度范围内的扰动, 得到的几何外形扰动也应该控制在一定范围内。为了分析 CST 参数化方法的单值性, 考虑线性方程组:

$$\begin{bmatrix} \zeta_0(\psi_0) & \zeta_1(\psi_0) & \cdots & \zeta_n(\psi_0) \\ \zeta_0(\psi_1) & \zeta_1(\psi_1) & \cdots & \zeta_n(\psi_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \zeta_0(\psi_n) & \zeta_1(\psi_n) & \cdots & \zeta_n(\psi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta(\psi_0) \\ \zeta(\psi_1) \\ \vdots \\ \zeta(\psi_n) \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中:

$$\begin{cases} \zeta_i(\psi) = C_{N_1}^{N_2}(\psi) K_i \psi^i (1-\psi)^{n-i} \\ \psi_i \in (0, 1) \quad (i = 0, 1, \dots, n) \end{cases}$$

已知几何外形的控制点  $(\psi_i, \zeta(\psi_i))$ , 根据定义, 方程式(7)表示了 CST 参数化方法对一个二维几何外形的描述过程。

方程式(7)的系数矩阵记为  $\mathbf{M}$ , 其特征值和条件数直接影响方程组的性态。取  $\psi_i$  在  $[0.05, 0.95]$  上平均分布, 令  $N_1 = 0.5, N_2 = 1.0$ , 从图 3 可以看出, 随着所使用的 Bernstein 多项式阶数的增大, 参数化矩阵的谱条件数迅速增大。图 4 为参数化矩阵的特征值的模值分布情况, 从图上可以看出, 随着设计参数的增加, 虽然最大特征值一直变化不大, 最小特征值却迅速向 0 逼近, 从而导致在参数个数较多时, 参数化矩阵几乎是奇异的。矩阵条件数越大, 矩阵越趋于病态。参数化矩阵与右端列向量很小的波动, 也会引起解向量  $\mathbf{b}$  很大的变化, 反之亦然。优化计算中, 会出现两组截然不同的参数向量  $\mathbf{b}$  却生成两个十分接近的几何外形, 二者的差异可能小于一个网格单元

的尺度。对其他  $\psi_i$  分布情况的计算也能得到相同的结论。

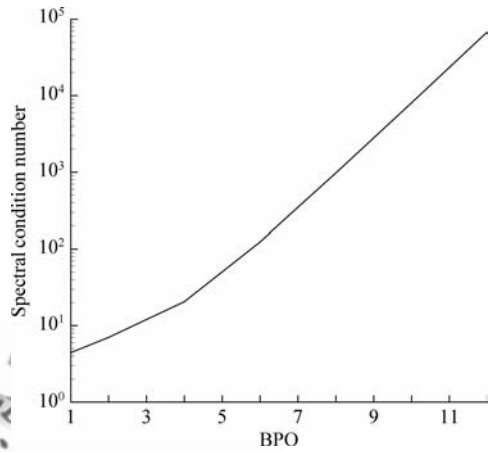


图 3 参数化矩阵的谱条件数

Fig. 3 Spectral condition number of parameterization matrix

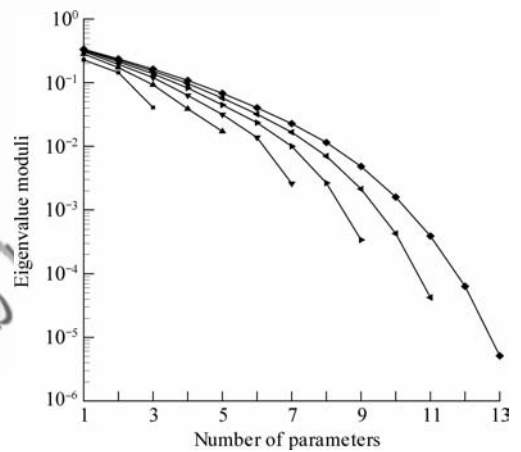


图 4 参数化矩阵的特征值的模

Fig. 4 Eigenvalue moduli of parameterization matrix

已知单位翼型的参数向量  $\mathbf{b} = \mathbf{1}$ , 在 Bernstein 多项式阶数 BPO=6 和 BPO=12 的情况下, 使用最小二乘法对  $C_{1.5}$  所表示的单位翼型进行逼近, 计算得到的参数向量与单位参数向量的对比如图 5 所示。从图 5 可以看出, 使用 12 阶 Bernstein 多项式逼近单位翼型时, 得到的参数向量与单位参数向量差别很大, 但是两组参数所得到的几何外形却十分相似。逼近得到的翼型与标准单位翼型之间的均方根误差只有  $6.66 \times 10^{-5}$ 。另一方面, 使用 6 阶 Bernstein 多项式逼近单位翼型时, 得到参数向量与单位参数向量十分接近, 且逼近得到的

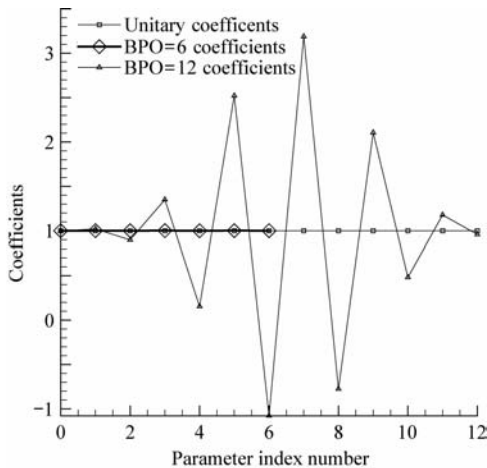


图5 单位翼型的3组参数向量

Fig. 5 Three sets of parameters of unit airfoil

翼型与标准单位翼型之间均方根误差为  $1.67 \times 10^{-6}$ , 也比12阶多项式的逼近精度高。由此可见, 过高阶的 Bernstein 多项式不仅造成参数化过程的病态, 还会造成对几何外形的表示精度的降低。

由以上结果可以看出: 表示形状函数时, 如果使用过高阶的 Bernstein 多项式的阶数, 会导致参数化过程的病态化, 使 CST 方法对几何外形表示的单值性变差。在这种情况下, 任何基于梯度的优化算法的性能都将大大降低。所以在使用 CST 参数化方法进行几何外形的参数化时, 应该合理地选择多项式的阶数, 既要保证表示精度, 又要保证参数化过程数学性态良好。

### 3 表示精度

#### 3.1 对称翼型的 CST 参数化表示精度

对称翼型由于上下表面的形状完全相同, 所以只需要对上表面进行参数化表示, 就可以得到整个翼型形状。本文通过使用 CST 参数化方法对 NACA0012 翼型进行参数化表示, 研究 Bernstein 多项式的阶数与 CST 参数化表示精度的关系。

取  $C_{1,5}$  作为类别函数, 图6为分别使用 Bernstein 多项式 BPO=2, 4, 6, 8 时的 CST 方法对 NACA0012 翼型进行参数化表示的残差。从图6可以看出, 对 NACA0012 翼型进行参数化表示时, 使用 BPO=2 就可以达到很高的精度, 满足一般风洞模型的精度要求。这样的结果可能是因为 NA-

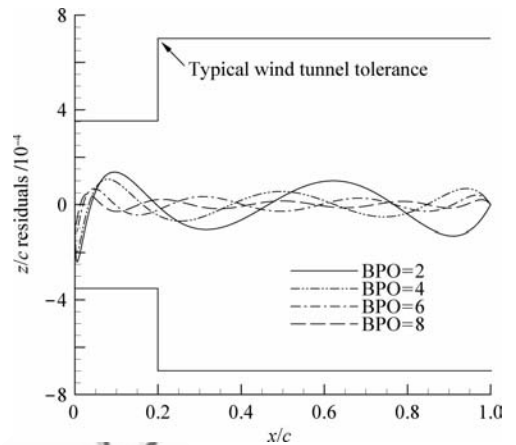


图6 NACA0012 翼型的 CST 参数化残差

Fig. 6 CST parameterization residuals of NACA0012 airfoil

CA0012 翼型曲线本来就是使用多项式进行定义的, 所以使用多项式对其进行参数化时, 即使较低阶的 Bernstein 多项式也可以达到很好的效果。图7给出了 BPO=2 时的 CST 参数化翼型与 NACA0012 翼型对比, 由图7可看出两种翼型基本重合。

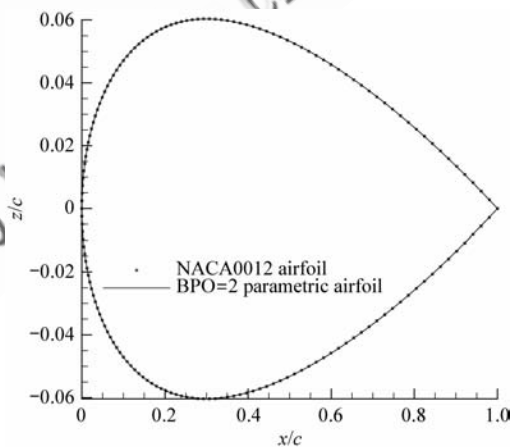


图7 CST 参数化翼型与 NACA0012 翼型对比

Fig. 7 Comparison between CST parametric airfoil and NACA0012 airfoil

#### 3.2 有弯度翼型的 CST 参数化表示精度

有弯度翼型上下表面的形状不同, 上表面和下表面曲线必须分别表示。在对有弯度翼型的参数化精度研究中, 本文使用英国皇家航空研究中心 (Royal Aeronautical Establishment, RAE) 的 RAE2822 翼型为目标进行参数化逼近, 研究 Bernstein 多项式的阶数与参数化精度的关系。



同样选取  $C_{1,0}^{0.5}$  作为类别函数, 图 8 为分别使用 Bernstein 多项式 BPO=4, 6, 8, 10 时对上下表面各有 65 个离散控制点的 RAE2822 翼型进行参数化表示的残差。从图 8 中可以看出, 需要使用 BPO>4 的 Bernstein 多项式对 RAE2822 翼型进行参数化, 才能使残差控制在风洞模型的精度范围内。同时可以看出, 使用更高阶的多项式可以提高表示精度, 但是随着阶数的增加, 精度的提高幅度在逐渐降低。上下表面使用相同阶的多项式进行参数化时, 翼型下表面的残差要大于上表面, 这可能是因为翼型的下表面曲线形状比上表面更为复杂引起的。

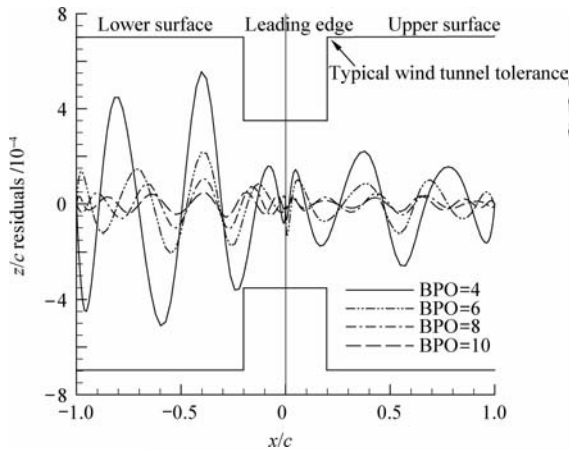


图 8 RAE2822 翼型的 CST 参数化残差

Fig. 8 CST parameterization residuals of RAE2822 airfoil

Bernstein 多项式 BPO=4 的 CST 参数化翼型与 RAE2822 翼型的对比如图 9 所示。

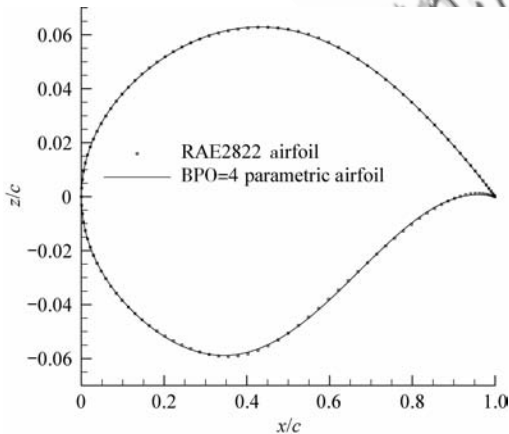


图 9 CST 参数化翼型与 RAE2822 翼型对比

Fig. 9 Comparison between CST parametric airfoil and RAE2822 airfoil

由以上结果可知, 使用 CST 参数化方法表示翼型时, 一般应采用 4 阶以上的 Bernstein 多项式进行参数化, 就能够达到比较满意的精度。随着多项式阶数的增加, 相应的设计参数数量也在增加, 精度的改善情况却越发不明显。所以, 对于一般的几何外形表示和优化, BPO=4~6 就可以达到满意的精度要求, 对于对精度要求较高的应用, 可以使用 BPO=6~9 定义形状函数, 但是 Bernstein 多项式一般应控制在 10 阶以内, 在保证对几何外形的表示精度的同时, 避免病态问题的出现和限制设计参数数量。

### 3.3 CST 方法与其他参数化方法的表示精度对比

在对不同的参数化方法的精度进行比较的过程中, 本文仍然以 RAE2822 翼型为例, 将 CST 方法与 B 样条曲线法<sup>[14]</sup>、Hicks-Henne 法<sup>[15]</sup>和参数化翼型 (PARSEC) 方法<sup>[16]</sup>的表示精度进行对比, 突出 CST 方法的参数少且精度高的优点。

对 RAE2822 翼型进行参数化表示的过程中, 各种方法尽可能使用相同数量的设计参数。对于 CST 参数化方法, 翼型的上下表面分别使用 BPO=5 进行表示, 即每个表面有 6 个参数, 共 12 个参数。

使用 B 样条方法对翼型进行参数化表示时, 上下表面的翼型曲线都采用 8 个控制点 (Control Points, CPs) 的样条曲线, 其中第一个点和最后一个点固定在 RAE2822 翼型的前缘点和后缘点的位置上。这样上下表面一共需要 12 个待求的控制点作为参数。使用 B 样条函数对翼型进行最小二乘逼近时, 计算得到的误差定义为同一参数坐标下原翼型点与样条曲线上点的直线距离, 故图 10 所示的对 RAE2822 翼型的 B 样条曲线参数化表示误差为非负值。

使用 Hicks-Henne 基函数方法时, 原翼型采用  $C_{1,0}^{0.5}$  表示的基本翼型, 设定其相对厚度与 RAE2822 翼型的相对厚度相同, 上下表面都使用 6 个扰动基函数。如式 (8) 所示:

$$f_h(\psi) = \begin{cases} \psi^{0.5}(1-\psi)e^{-15\psi} & h = 1 \\ \sin^3(\pi\psi^{\ln 0.5/\ln \psi_h}) & h = 2, 3, \dots, 6 \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $\psi_h$  为预先选择的基函数极值点。这样上下表面共需要 12 个扰动基函数系数作为参数化变量。

使用 PARSEC 方法对翼型进行参数化表示

时,用到了翼型上下表面曲线的 11 个参数,即翼型前缘半径  $R_{le}$ ,翼型上表面最高点坐标  $(X_u, Z_u)$  及其曲率  $Z_{xx,u}$ ,下表面最低点坐标  $(X_l, Z_l)$  及其曲率  $Z_{xx,l}$ ,后缘厚度  $\Delta Z_{te}$ ,后缘纵坐标  $Z_{te}$ ,后缘楔角  $\beta_{te}$  和后缘方向  $\alpha_{te}$ 。

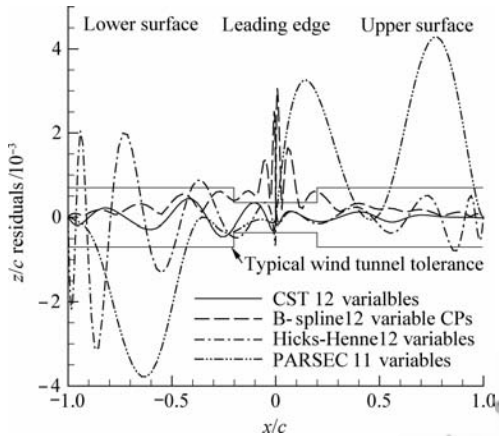


图 10 不同参数化方法对 RAE2822 翼型的表示残差  
Fig. 10 Residuals of RAE2822 airfoil using different parameterization methods

从图 10 可以看出,在保证参数数量基本相同的情况下,使用以上各种参数化方法对 RAE2822 翼型进行参数化表示,只有 CST 方法在翼型各个区域的表示精度都能够满足风洞模型的精度要求。B 样条方法未能精确表示翼型的前缘形状;Hicks-Henne 方法对翼型下表面曲线后缘的表示精度较差;而 PARSEC 方法对翼型前后缘、上表面最高点和下表面最低点附近的表示精度较高,却不能精确的表示 RAE2822 其他区域的曲线形状特征。

各个参数化方法对 RAE2822 翼型的表示结果如图 11 所示。

从各种参数化方法对 RAE2822 翼型的表示残差可以看出,B 样条方法虽然在翼型前缘附近的精度较差,在翼型的其他区域却可以达到很高的表示精度。本文将 CST 方法和 B 样条方法进行单独比较,以两种方法对 RAE2822 翼型的表示残差满足风洞模型的要求,并达到相似的精度为标准,对它们所需要的参数个数进行对比。两种参数化方法残差对比结果如图 12 所示,其中:CST 方法使用  $BPO=7$  定义形状函数;B 样条曲线使用 4 阶 B 样条基函数进行定义。从图 12 可以看出,为使 B 样条方法对翼型前缘的表示精度达到风洞模型要求的精度,上下表面各需要 12 个

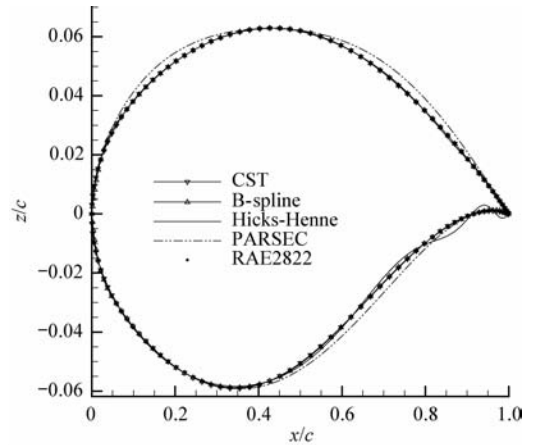


图 11 不同参数化方法对 RAE2822 翼型的表示结果  
Fig. 11 Representations of RAE2822 airfoil using different parameterization methods

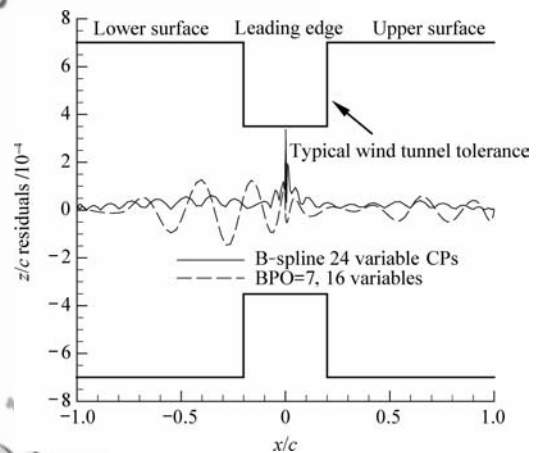


图 12 CST 法和 B 样条法对 RAE2822 翼型的表示残差  
Fig. 12 Residuals of RAE2822 airfoil using CST and B-Spline parameterization methods

可变控制点,一共 24 个控制点,其最大残差为  $3.37 \times 10^{-4}$ ,均方根误差为  $5.9 \times 10^{-5}$ 。在翼型前缘满足精度要求的情况下,B 样条方法对翼型其他区域可以进行相当精确的表示。CST 方法要对翼型进行相似精度的拟合表示,上下表面各只需 8 个参数,一共 16 个参数,其最大残差为  $1.27 \times 10^{-4}$ ,均方根误差为  $4.9 \times 10^{-5}$ ,都小于 B 样条方法的相应值。由此可见,CST 参数化方法具有所需参数少,表示精度高的特点。

## 4 在超声速机翼优化中的应用

### 4.1 三维机翼的 CST 参数化解

任意后缘闭合的对称翼型的上表面的形状函

数可以用式(4)进行参数化表示。三维机翼可以看成是一系列翼型展向分布的组合。通过在不同的展向位置上应用 Bernstein 多项式加权和的形状函数描述不同的翼型,就可以确定一个解析形状函数,从而确定整个机翼。把式(4)中的设计参数  $b_i$  沿着展向使用  $m$  阶 Bernstein 多项式加权和进行表示:

$$b_i = \sum_{j=0}^m b_{i,j} B_m^j(\eta) \quad (9)$$

式中: $\eta=2y/b_w$ ,  $y$  为机翼  $y$  轴坐标,  $b_w$  为机翼翼展;  $B_m^j(\eta) = K_m^j \eta^j (1-\eta)^{m-j}$ ,  $K_m^j = \frac{m!}{j!(m-j)!}$ , 其中: $j=0,1,2,\dots,m$ 。

这样,对称机翼的机翼表面可以表示为

$$\zeta(\psi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{i,j} C_{N_1}^{N_1}(\psi) B_n^i(\psi) B_m^j(\eta) \quad (10)$$

令  $\zeta_{i,j}(\psi, \eta) = C_{N_1}^{N_1}(\psi) B_n^i(\psi) B_m^j(\eta)$  表示由弦向第  $i$  个和展向第  $j$  个 Bernstein 多项式所确定的分机翼表面,  $b_{i,j}$  为各个分机翼的权重值。所以整块对称机翼可以使用  $n_i = (n+1)(m+1)$  个分机翼的加权和表示出来。如图 13 所示,弦向和展向都使用 3 阶 Bernstein 多项式对机翼进行 CST 参数化分解。

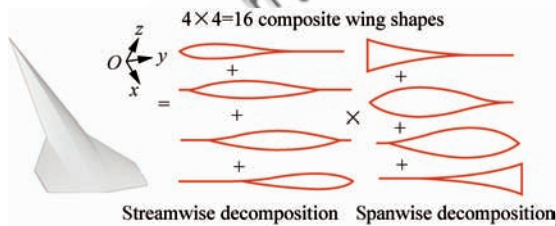


图 13 机翼的 CST 参数化分解

Fig. 13 Parametric decomposition of wing with CST method

#### 4.2 超声速机翼厚度分布优化

超声速机翼厚度分布对激波阻力系数的影响十分显著。使用 CST 参数化方法对超声速机翼进行参数化,并以激波阻力最小为目标进行超声速机翼厚度分布优化。在优化过程中,用基于超声速线性化理论的超声速面积率对机翼的激波阻力进行计算<sup>[17-19]</sup>。优化方法则采用基于 CST 参数化方法的远场组元(Far-field Composite-Element, FCE)激波阻力优化方法<sup>[20]</sup>。

优化中初始机翼的翼型采用类别函数  $C_{1:0}^1 = \psi^{1.0}(1-\psi)^{1.0}$  所表示的双圆弧对称翼型,相对厚

度设定为 5%。取优化后机翼与初始机翼的容积比约束为  $V_R=1.0$ ;机翼外翼部分  $\eta=0.8$  处施加相对厚度不低于 2%的约束;翼尖  $\eta=0.95$  处施加相对厚度不低于 1%的约束。机翼模型平面形状采用双后掠机翼,这是目前认为超声速客机比较可能采用的机翼平面构型,如图 14 所示。

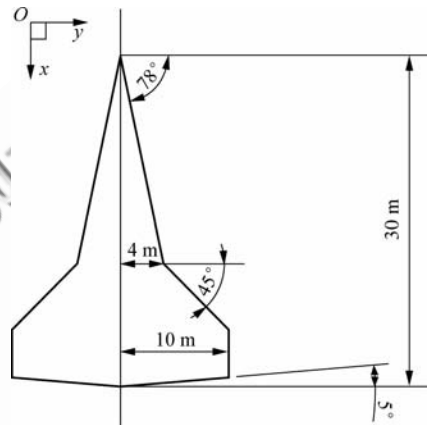


图 14 机翼模型平面形状

Fig. 14 Wing model planform

优化过程中,超声速机翼沿弦向和展向都使用 5 阶 Bernstein 多项式进行参数化分解。在马赫数  $Ma=2.0$  的条件下,初始机翼的激波阻力系数为 0.004 74,优化机翼的激波阻力系数  $C_{Dw} = 0.001 83$ ,激波阻力降低达 61%。初始机翼与优化机翼在不同子午角  $\theta$  下的激波阻力系数分布如图 15 所示。

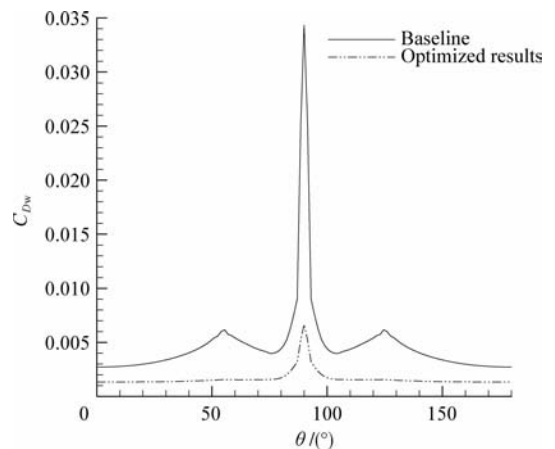


图 15 机翼激波阻力优化结果

Fig. 15 Results of wing wave drag optimization



优化机翼和初始机翼在几个不同展向位置上的翼型剖面对比如图 16 所示。从图中可以看出,内翼( $0 < \eta < 0.4$ )部分后掠角为  $78^\circ$ ,  $Ma = 2.0$  的情况下是亚声速前缘。优化后的翼型与原翼型相比,翼型的厚度增加,最大厚度位置提前,翼型靠近后缘位置的厚度也加厚,以补偿外翼变薄后机翼减少的容积。机翼的外翼( $0.4 < \eta < 1.0$ )后掠角为  $45^\circ$ ,属于超声速前缘,将产生比较大的超声速激波阻力。优化后的外翼翼型比原机翼翼型更薄,并且越靠近机翼外侧,翼型越薄。这是因为在超声速条件下,薄翼型可以产生较小的激波阻力。由于优化过程中在外翼部分添加了局部厚度约束,所以优化后的机翼厚度不会为负值。

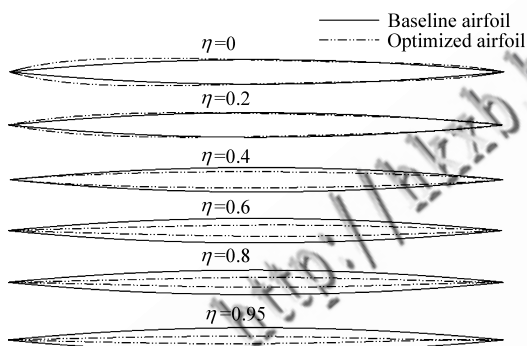


图 16 优化机翼与初始机翼的翼型对比

Fig. 16 Comparison of optimized airfoils and baseline airfoils

## 5 结论

1) CST 参数化方法在使用基于 Bernstein 多项式定义的形状函数时,对设计参数的突变振荡将具有一定的过滤能力。

2) 在一定范围内,使用高阶的 Bernstein 多项式定义形状函数可以有效地提高 CST 参数化方法对几何外形的表示精度,但是过高阶的多项式的阶数将使参数化过程病态化。一般应使用 4 阶以上,10 阶以内的 Bernstein 多项式定义形状函数,在保证对几何外形的表示精度的同时,避免病态问题的出现和限制设计参数数量。

3) 与现有的其他参数化方法相比,CST 参数化方法在表示翼型等光滑几何外形时,具有简单直观、参数少和精度高的优点。

4) 通过 CST 方法对飞行器几何外形进行参

数化分解,可以使用较少的参数来定义较大的设计空间,从而方便地进行相关外形的优化设计。

5) CST 参数化方法不具备几何外形的局部修改能力。为克服这一缺点,可以用 B 样条模型对形状函数进行改进,这种改进对 CST 参数化方法的数学性质、表示精度和应用范围的影响,还有待进一步研究。

## 参 考 文 献

- [1] Mousavi A, Castonguay P, Nadarajah S K. Survey of shape parameterization techniques and its effect on three-dimensional aerodynamic shape optimization. AIAA-2007-8887, 2007.
- [2] Samareh J A. Survey of shape parameterization techniques for high-fidelity multidisciplinary shape optimization. AIAA Journal, 2001, 39(5): 877-884.
- [3] Sripavakul V, Padulo M, Guennov M. A comparison of airfoil shape parameterization techniques for early design optimization. AIAA-2010-9050, 2010.
- [4] Kulfan B M, Bussolletti J E. "Fundamental" parametric geometry representations for aircraft component shapes. AIAA-2006-6948, 2006.
- [5] Kulfan B M. Recent extensions and applications of the "CST" universal parametric geometry representation method. AIAA-2007-7709, 2007.
- [6] Kulfan B M. A universal parametric geometry representation method—"CST". AIAA-2007-62, 2007.
- [7] Lane A K, Marshall D D. A surface parameterization method for airfoil optimization and high lift 2D geometries utilizing the CST methodology. AIAA-2009-1461, 2009.
- [8] Ceze M, Hayashi M, Volpe E. A study of the CST parameterization characteristics. AIAA-2009-3767, 2009.
- [9] Straathof M H, van Tooren M J L, Voskuil M, et al. Aerodynamic shape parameterisation and optimisation of novel configurations. Proceedings of the RAeS Aerodynamic Shape Parameterisation and Optimisation of Novel Configurations Conference. London: Royal Aeronautical Soc., 2008: 1-14.
- [10] Straathof M H, van Tooren M J L, Voskuil M, et al. Development and implementation of a novel parametrization technique for multidisciplinary design initialization. AIAA-2010-3004, 2010.
- [11] Straathof M H, van Tooren M J L. Extension to the class-shape-transformation method based on B-splines. AIAA Journal, 2011, 49(4): 780-790.
- [12] Demengel G, Pouget J P. Mathematiques des courbes et des surfaces. Wang X D, translated. Beijing: Commercial Press, 2000, 109-112(in Chinese)



- Demengel G, Pouget J P. 曲线与曲面数学. 王向东, 译. 北京: 商务印书馆, 2000: 109-112.
- [13] Li Y, Zhang K F, Yu J F. Technology and applications of computer aided geometric design. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2007: 30-32. (in Chinese)
- 李原, 张开富, 余剑锋. 计算机辅助几何设计技术及应用. 西安: 西北工业大学出版社, 2007: 30-32.
- [14] Piegel L, Tiller W. The NURBS book. Heidelberg: Springer, 1997: 411-413.
- [15] Hicks R, Henne P. Wing design by numerical optimization. Journal of Aircraft, 1978, 15(7): 407-412.
- [16] Sobieczky H, Parametric airfoils and wings. Notes on Numerical Fluid Mechanics, 1998, 68: 71-88.
- [17] Jones R T. Theory of wing-body drag at supersonic speeds. NACA-RM-A53H18A, 1953.
- [18] Chin W C. Supersonic wave-drag of planar singularity distributions. AIAA Journal, 1978, 16(5): 482-487.
- [19] Nikolic V, Jumper E J. Zero-lift wave drag calculation using supersonic area rule and its modifications. AIAA-2004-217, 2004.
- [20] Kulfan B M. New supersonic wing far-field composite-element wave-drag optimization method, "FCE". AIAA-2008-132, 2008.

#### 作者简介:

关晓辉 男, 博士研究生。主要研究方向: 飞行器总体设计。  
E-mail: gxh87222@163.com

李占科 男, 博士, 副教授。主要研究方向: 飞行器总体设计。  
Tel: 029-88495914  
E-mail: lzkn@nwpu.edu.cn

宋笔锋 男, 博士, 教授, 博士生导师。主要研究方向: 飞行器总体设计, 飞行器可靠性工程。  
Tel: 029-88495914  
E-mail: bfsong@nwpu.edu.cn

## A Study on CST Aerodynamic Shape Parameterization Method

GUAN Xiaohui, LI Zhanke\*, SONG Bifeng

College of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China

**Abstract:** Class-shape-transformation (CST) is a new shape parameterization method which represents the geometries of aircraft shapes with a class function and a shape function. Based on the condition numbers of linear systems and the representation residuals in the parameterization process, a study is performed on the influence of the Bernstein polynomial order (BPO) on the numerical uniqueness and the precision of the CST method. Comparisons of parameter number and representation precision between the CST method and B-spline, Hicks-Henne and parametric section (PARSEC) methods are represented in this paper, as well as a supersonic wing shape optimization case using the far-field composite-element (FCE) wave drag optimization method which yields a 61% reduction of wave drag. It is suggested that the CST parameterization is characterized by high precision and low parameter number. In order to achieve sufficient precision and avoid ill-conditioned parameterization, the shape function should be defined by Bernstein polynomials of at least 4th order, but no more than 10th order.

**Key words:** class-shape-transformation; linear system; parameterization; polynomial; drag reduction; shape optimization