

# 八结点等参奇异元断裂分析方法 及其在机身壁板中的应用

## A FRACTURE ANALYSIS USING EIGHT-NODE-ISOPARAMETRIC SINGULAR ELEMENTS AND ITS APPLICATION IN FUSELAGE PANELS

飞机结构强度研究所 安俊平  
陕西飞机制造公司 宋庆国

*Aircraft Structural Strength Research Institute*  
*Shanxi Aircraft Manufacture Company*

An Junping  
Song Qingguo

**摘要** 为了发展一种结构断裂分析的有效工程方法,本文推导并利用八结点等参奇异元结点位移表示的应力强度因子解。对机身加劲壁板进行了断裂分析,结果表明它能较好满足工程要求。

**关键词** 等参奇异元,加劲壁板,应力强度因子。

**Abstract** In order to develop an effective engineering method for fracture analysis of structures, a stress intensity factor solution represented only by the node displacements of a eight-node-isoparametric singular element has been derived and employed in this paper. A fracture analysis of stiffened fuselage panels, a kind of typical aircraft structures, has been carried out. The results show that the engineering purpose can be satisfactorily fulfilled.

**Key words** isoparametric singular element, stiffened panels, stress intensity factor.

### 一、引言

飞机机身壁板是飞机结构中的一个重要部件。其几何形状及受载情况都是比较复杂的。为了克服常规有限元不能反映裂尖奇异性带来的许多困难,能够得到较高精度的解与较好的经济效益。我们采用八结点等参奇异元法来求解机身壁板的应力强度因子,并用 $K_R$ 判据求解加劲壁板的裂纹容限、起裂应力和剩余强度。为此,本文首先介绍了八结点奇异元的基本特征和力学特性,再通过具体实例来说明八结点等参奇异元法在工程结构中的断裂分析方法。

### 二、八结点等参奇异元

现在发展起来的奇异元有四边形、三角形(退化四边形)等。从几何形状上看它们和

1988年11月16日收到

常规元并无区别，但在结点布置上较为特殊，即将边中结点移至四分之一处，致使其在邻边角结点处的应力场在单元内具有 $1/\sqrt{r}$ 的奇异性。

下面以任意直边四边形奇异元为例来导出其应力奇异性及结点位移表达式。为了简化数学运算，这里只考虑 $ABC(\theta=\pi)$ 的情况，并当作一维问题来分析，如图1所示。

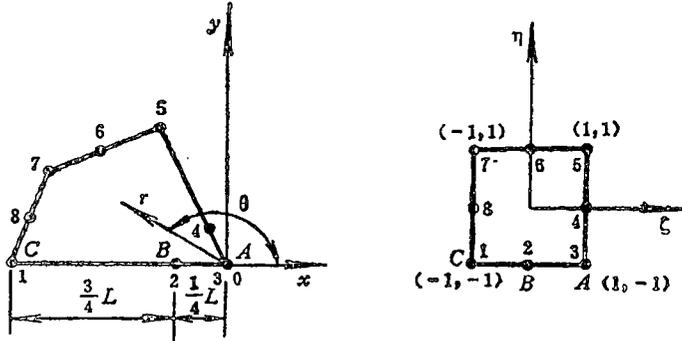


图 1 等参奇异元与母单元

从图1可知结点A、B、C的坐标分别为： $r_3=0, r_2=L/4, r_1=L$ 。在局部坐标系 $(\zeta, \eta)$ 下ABC边对应直线 $\eta=-1$ 。取形函数如下

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}(\zeta-1)\zeta, N_2 = 1-\zeta^2, N_3 = \frac{1}{2}(1+\zeta)\zeta \\ N_4 &= N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

经过单元坐标变换可得

$$r = \sum_{i=1}^{\infty} N_i r_i = N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3 = \frac{L}{4}(1-\zeta)^2 \quad (2)$$

从(2)式中解出 $\zeta$ 并根据 $|\zeta| \leq 1$ 可得

$$\zeta = 1 - 2\sqrt{r/L} \quad (3)$$

从而得到单元位移函数

$$\begin{aligned} w &= N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 \\ &= w_3 + (-3w_3 + 4w_2 - w_1) \sqrt{\frac{r}{L}} + (2w_1 - 4w_2 + 2w_3) \frac{r}{L} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \\ &= v_3 + (-3v_3 + 4v_2 - v_1) \sqrt{\frac{r}{L}} + (2v_1 - 4v_2 + 2v_3) \frac{r}{L} \end{aligned} \quad (5)$$

设相对于裂尖(见图1)的各结点位移为

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}_A &= w_3 - w_3 = 0, \vec{w}_B = w_2 - w_3, \vec{w}_C = w_1 - w_3 \\ \vec{v}_A &= v_3 - v_3 = 0, \vec{v}_B = v_2 - v_3, \vec{v}_C = v_1 - v_3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这样整理(4)式和(5)式可变为

$$w = (4\vec{w}_B - \vec{w}_C) \sqrt{\frac{r}{L}} + (2\vec{w}_C - 4\vec{w}_B) \frac{r}{L} \quad (7)$$

$$v = (4\bar{v}_B - \bar{v}_C) \sqrt{\frac{r}{L}} + (2\bar{v}_C - 4\bar{v}_B) \frac{r}{L} \quad (8)$$

对于一维单元, 其应变

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} = u_1 \frac{dN_1}{dr} + u_2 \frac{dN_2}{dr} + u_3 \frac{dN_3}{dr}$$

由(7)式得

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{2\bar{v}_C - 4\bar{v}_B}{L} + \frac{4\bar{v}_B - \bar{v}_C}{\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (9)$$

由(9)式可知, 当  $r \rightarrow 0$  时单元应变具有  $1/\sqrt{r}$  的奇异性。当二次等参元从边中点位置移至  $1/4$  边长处时, 在裂尖附近的应力将正比于  $1/\sqrt{r}$ , 从而可很好地反映裂尖应力场的奇异性。对于退化四边形等参奇异元(即三角形奇异元)同理可证它也具有  $1/\sqrt{r}$  的应力奇异性, 而且结点位移也由(7)式和(8)式给出。

### 三、等参奇异元断裂分析工程方法

#### 1. 奇异元结点位移与应力强度因子

对于张开型裂纹问题, 在裂尖附近的位移场为

$$u(r, \theta) = \frac{1+\nu}{2E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3}{2}\theta \right] + O(r) \quad (10)$$

$$v(r, \theta) = \frac{1+\nu}{2E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2k+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3}{2}\theta \right] + O(r) \quad (11)$$

其中,  $k = (3-\nu)/(1+\nu)$  (平面应变问题);  $k = 3-4\nu$  (平面应力问题);  $E$  为材料弹性模量;  $\nu$  为材料波松比。

为了得到靠近裂尖 ( $r \rightarrow 0$ ) 处的应力强度因子, 并避免使用位移或应力外插的方法, 利用如上所述等参奇异元来模拟裂尖区域的张开面与 William 本征函数的延伸相配合, 得到了仅与奇异元结点位移有关的  $K_I$  表达式。

将(7)式同(10)式 ( $\theta=0$ ) 比较可得

$$K_I = \frac{2G\sqrt{2\pi}}{k-1} \left( \frac{-3u_3 - 4u_2 - u_1}{\sqrt{L}} \right) \quad (12)$$

同理比较(8)式, (11)式可得

$$K_I = \frac{2G\sqrt{2\pi}}{k+1} \left( \frac{-3v_3 + 4v_2 - v_1}{\sqrt{L}} \right) \quad (13)$$

(12)式, (13)式揭示了应力强度因子与奇异元结点位移间内在的必然联系。

#### 2. 等参奇异元法与外插法

在忽略了高阶无穷小量, 并令  $\theta = \pi$  情况下由(11)式可得

$$K_B = \frac{2G\sqrt{2\pi}}{k+1} \left( \frac{v_B - v_A}{\sqrt{L/4}} \right) \quad (14)$$

$$K_C = \frac{2G\sqrt{2\pi}}{k+1} \left( \frac{v_C - v_A}{\sqrt{L}} \right) \quad (15)$$

而由(13)式则有

$$K_A = K_I = \frac{2G\sqrt{2\pi}}{k+1} \left( \frac{-3v_3 + 4v_2 - v_1}{\sqrt{L}} \right) \\ = 2 \frac{2G\sqrt{2\pi}}{k+1} \left( \frac{v_B - v_A}{\sqrt{L/4}} \right) - \frac{2G\sqrt{2\pi}}{k+1} \left( \frac{v_C - v_A}{\sqrt{L}} \right)$$

即

$$K_A = K_I = 2K_B - K_C \quad (16)$$

(16) 式说明了奇异元法同应力强度因子外插法的实质关系。为了进一步验证式(13)的合理性, 以较大有限宽板进行了计算与比较。结果表明同解析解(或手册值)相比其最大相对误差可控制在5%以内<sup>[1]</sup>。(13)式之所以有较高计算精度, 是因为在裂纹表面上的单元对裂纹张开位移较为敏感, 而在裂纹前缘的单元则对应力较为敏感。 $K$ 值精度也随裂纹长度的增大以及裂纹尖端单元划分大小有微小变化。但计算经验表明对于同样的网格划分由(13)式计算的结果比其它常规有限元计算所得结果要精确。这充分体现了等参奇异元法之优点。

### 3. 裂纹扩展的有限元模拟方案

计算裂纹扩展力曲线需要实现裂纹多次扩展, 本文采用使结点沿裂纹扩展路径逐个放松, 从而使裂纹传播一个或几个单元宽度。由于奇异元结点布置特殊, 而且也只有裂纹尖端才布置它。所以在每执行后一次裂纹扩展计算时不仅要放松前次扩展单元的部分结点, 同时还要回复前次扩展奇异元为正常等参元, 并形成当前奇异元。这些均由程序实现。

### 4. $K_R$ 断裂判据与求解结构剩余强度

所谓 $K_R$ 判据就是以结构裂纹扩展力曲线和材料阻力曲线相切时, 恰好对应结构裂纹失稳扩展点来作为整个结构破坏的判别依据。由此可以确定初始损伤(如初始裂纹 $a_0$ )下结构的剩余强度和裂纹起始应力。其判别准则为

$$\left. \begin{aligned} (K_R)_{a=a_c} &= (K_R^0)_{a=a_c} \\ \left( \frac{\partial K_R}{\partial a_r} \right)_{a=a_c} &= \left( \frac{\partial K_R^0}{\partial a_r} \right)_{a=a_c} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中 $K_R^0$ 为材料阻力曲线函数;  $K_R$ 为结构裂纹扩展力曲线函数。

在实际计算中一般将(17)式改为

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{K_R - K_R^0}{K_R^0} \right|_{a=a_c} &\leq \epsilon_1 \\ \left| \left( \frac{\partial K_R}{\partial a_r} - \frac{dK_R^0}{da_r} \right) / \frac{dK_R^0}{da_r} \right|_{a=a_c} &\leq \epsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中 $\epsilon_1$ 和 $\epsilon_2$ 为要求精度。

奇异元法基本求解过程是: 首先, 从某一裂纹长度开始, 在某一外载

$$(S_r)_i = [(K_R^0)_i / \sqrt{\pi(a_r)_i}] f((a_n)_i / w) \quad (19)$$

下, 按前述方法求解裂纹扩展力值 $(K_R)_i$ , 然后执行裂纹扩展, 同时计算各裂纹长度下的 $K_R$ , 再用三次样条插值函数来拟合 $(K_R)_i - (a_r)_i$ 曲线。最后判断阻力曲线是否与所求扩展力曲线相切, 即检验它们是否满足(18)式。若满足, 则 $a_r$ 和 $S_r$ 为所求结构的裂纹容限和剩余强度。否则根据两条曲线有多交点或无交点来改变外载值

$$(S_r)_j = (S_r)_{j-1} \pm (\Delta S_r)_j$$

其中,  $(\Delta S_r)_j$  为给定外载增量; 而  $j$  为外载迭代次数。重新计算裂纹扩展力曲线, 再次使用  $K_R$  判据, 如此继续迭代下去, 直到满足 (18) 式为止。

### 四、飞机机身断裂分析实例

**算例1** 飞机机身模拟壁板试件, 其计算结果和试验结果  $\bar{\sigma}_c, \bar{\sigma}_e$  (平均值) 相对误差为7%左右, 详见文献[2]。

**算例2** 结构参数取自某飞机机身壁板的真实数值。其计算简图如图2所示。在给定初始裂纹长  $a_0 = 65\text{mm}$  条件下, 对加劲板的剩余强度、裂纹容限进行了计算。有限元计算网格如图3所示。

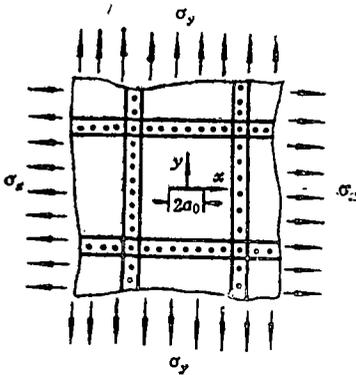


图 2 含裂纹加筋板简图

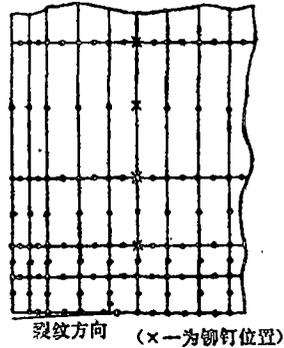


图 3 含等参奇元的有限元网格

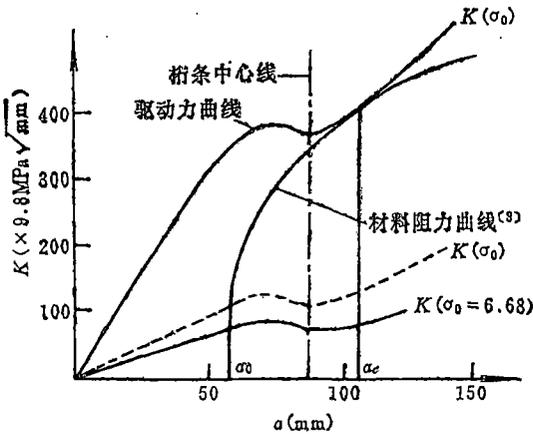


图 4 剩余强度及裂纹容限分析图

算例2计算结果见图4和表1。需指出的是图4中的材料阻力曲线取自文献[3]。因为它同本算例不仅蒙皮材质相同, 而且其应力比  $(\sigma_x/\sigma_y = 1)$  也接近计算情况  $(\sigma_x/\sigma_y = 0.96)$ 。算例2的计算精度有待于用今后的试验研究结果来证实。

表 1

初始裂纹长度 $a_0$ (mm)	裂纹起始应力 $\sigma_0$ ( $\times 9.8\text{MPa}$ )	剩余强度 $\sigma_c$ ( $\times 9.8\text{MPa}$ )	裂纹容限 $a_c$ (mm)	应力比 $\sigma_x/\sigma_y$
65	8.52	25.56	110	0.96

## 五、结 论

通过两个实例计算与分析,表明本文方法——等参奇异元法是工程与理论、有限元与解析解相结合的一种工程结构断裂分析实用方法。它既体现了常规等参元通用性、灵活性,而且也具有解析解高效率、高精度之特点。为飞机典型结构——加劲板损伤容限分析提供了一种可靠、有效的工程分析方法。另外,很容易将本文方法推广到斜裂纹断裂分析中去。这样,再结合工程上的(边裂纹)当量处理(实际上是一种把三维问题转化为二维问题的工程近似处理)就可用于较薄耳片的断裂分析。

## 参 考 文 献

- 1 An Junping(安俊平). Residual Strength Analysis of Stiffened Panels under Biaxial Loading. Proceedings of International Conference on Fracture and Fracture Mechanics(ICFFM), Shanghai April, 1987
- 2 陆富梅, 安俊平. 双轴拉伸载荷下双向加劲板裂纹容限的测定. 第五届全国断裂力学会议论文集, 桂林, 1988
- 3 安俊平. 影响 R 曲线的另一个重要参数——双轴载荷比的试验研究. 第四届全国断裂力学会议论文集, 西安, 1985

学术会议  
征 文

## 飞机维修研讨会征文

中国航空学会与广东省航空学会定于1990年6月在广州联合召开“飞机维修研讨会”。会议征文内容:

1. 飞机、直升机、发动机及各系统维修经验总结;
2. 航空电器、电子设备维修经验总结;
3. 航空维修新技术、新工艺、新设备介绍;
4. 各类故障及事故检查和分析;
5. 航空维修理论研究及探索;
6. 航空维修经验及理论;
7. 航空维修专业人员培训;
8. 其它。

应征论文请于1990年5月初寄至:北京9203信箱学会办公室周肇基同志收。邮政编码100076。有关开会具体日期、地点等另行通知。

(李铁柏)