广义鞍点问题基于 PSS 的约 预条 子[*1)]

曹 阳[1,2] 牛 强[3] 蒋美 [1]

(1. 苏州大学数学科学学院, 江苏苏州 215006)

(2. 南通大学交通学院, 江苏南通 226019)

(3. 西交利物浦大学数理中心, 江苏苏州 215123

摘 要

对于 (1,1) 块为非 Hermitia 阵的广义鞍点问题, 本文给出了一种基于正定和反对称分裂 (Positive defi n ite a n d skew-Hermitia n splitti 的约束预条件子. 该预条件子的 (1,1) 块由 解非 Hermitia 正定线性方程组时的 PSS 迭代法所构造得到. 文中分析了 PSS 约束预条件子的一些性质并证明了预处理迭代法的收敛性. 最后用数值算例验证了该预条件子的有效性.

关 : 广义鞍点问题; 正定反对称分裂; 迭代法; 约束预条件子

MR (2000) 主题 类: 65F10

1. 引言

考虑如下大型稀疏广义鞍点 题

$$\mathcal{A} \equiv \begin{bmatrix} A & B^* \\ -B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \equiv b,$$

其中 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为非 正定阵 $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 为 正定阵 , $\in \mathbb{R}^n$, $\in \mathbb{R}^m$ 且 $\leq$ - 进一步假设 N B^* $\bigcap N$ C $\{.\}$ 则广义鞍点矩阵 $\mathcal{A}$ 和 补矩阵 S C $BA^{-1}B^*$ 均非奇异- 这 * 和 N 分别表示相应矩阵的共轭转 和零空间- 形如 的方程组广泛来源于许多实际 题 如二次优化 题 最小二乘 题 椭圆型偏微分方程的混合有限元离散 计算流体力学 径向基 数插值 无网格方法等等 详细的讨论可参考 - 在大多 题中 A, B, C 为大型稀疏阵且广义鞍点矩阵 $\mathcal{A}$ 的条件数很大 因而用预处理迭代法求解 较为实际 这也成为当前求解广义鞍点 题的主要方法之一-

所周知 预处理方法是一种求解大型线性方程组非常有效的方法 构造一个好的预条件子既能加快迭代速度又能减少每一步迭代的工作量- 经过多年的 展 针对鞍点 题已提出很多种预处理方法 如块对角预条件子 [21] 块三角预条件子 [5, 11, 17, 18] 约束预处理方法 [6, 10, 12–14, 16, 22] 预处理方法 [3, 8, 19] 限定的预处理共轭梯度法 [4, 7] 等等 可参考综述性文献 - 这些预处理方法中的预条件子可通过代数的方法直接构造得到 也可针对具体 题构造得到- 本文主要考察约束预处理方法并用代数的方法构造了一类基于 的约束预条件子 它将 中给出的一种基于正定和反对称分裂 迭代法和 中给出的基于 的约束预条件子做了进一步推广和应用-

* 2011 年 9 月 5 日收到.

1) 基金项目: 苏州大学国家自然科学基金预研基金 (SDY2011B01), 江苏省普通高校研究生创新项目 (CX10B_029Z), 苏州大学优秀博士学位论文选题立项 (23320957), 西交利物浦大学科研发展基金 RDF.

2. 基于 PSS 约

本节主要讨论了由 和 所定义的基于 约束预条件子 $\mathcal{G}$ 的可逆性. 由于约束预条件子与广义鞍点矩阵 $\mathcal{A}$ 有类似的 为且

3. 基于 PSS 约

本节分析了基于 约束预处理迭代法的收敛性. 首先将迭代格式 的迭代矩阵改写为

$$\mathcal{G}^{-1}(\mathcal{G}-\mathcal{A}) \qquad \begin{bmatrix} X(G-A) & . \\ Y(G-A) & . \end{bmatrix}.$$

其中

$$X \quad G^{-1}-G^{-1}B^*(BG^{-1}B^* \quad C)^{-1}BG^{-1}\in\mathbb{C}^{n\times n},$$
$$Y \quad (BG^{-1}B^* \quad C)^{-1}BG^{-1}\in\mathbb{C}^{m\times n}.$$

由迭代法的收敛性理论可知, 迭代格式 收敛的充要条件是迭代矩阵 的谱半径 $\rho(\quad) < $.
由 易知

$$\rho(\quad) \quad \rho(X(G-A)) \quad \rho(XG(I-G^{-1}A)).$$

为进一步估计迭代矩阵 或 $XG(I-G^{-1}A)$ 的谱半径的上界, 引进一个向量范数

$$\| \ \|_* \quad \|(\alpha I \quad S) \ \|_2, \quad \forall \ \in\mathbb{C}^n,$$

及其诱导的矩阵范数

$$\|D\|_* \quad \|(\alpha I \quad S)D(\alpha I \quad S)^{-1}\|_2,$$

其中 $D\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 则由 得

$$\rho(\quad) \quad \rho(XG(I-G^{-1}A)) \le \|XG(I-G^{-1}A)\|_* \le \|XG\|_*\cdot\|I-G^{-1}A\|_*.$$

根据 G 的定义, 易知

$$\|I-G^{-1}A\|_* \qquad \|(\alpha I \quad S)^{-1}(\alpha I-P)(\alpha I \quad P)^{-1}(\alpha I-S)\|_*$$
$$\qquad \|(\alpha I-P)(\alpha I \quad P)^{-1}(\alpha I-S)(\alpha I \quad S)^{-1}\|_2$$

当 C 为 正定阵- 由 公式 可得

$$X \quad G^{-1} - G^{-1}B^* BG^{-1}B^* \quad C^{-1}BG^{-1}$$
$$G \quad B^*C^{-1}B^{-1}.$$

从而有

$$\|XG\|_* \quad \frac{}{\alpha}\| \alpha I \quad S\ G \quad B^*C^{-1}B^{-1} \alpha I \quad P\|_2$$
$$\frac{}{\alpha}\| \alpha I \quad S \quad \alpha \ \alpha I \quad P \ \alpha I \quad S \quad \alpha B^*C^{-1}B^{-1} \alpha I \quad P\|_2$$
$$\| I \quad M_1^{-1}\|_2,$$

其中 $M_1 \quad \alpha\ \alpha I \quad P^{-1}B^*C^{-1}B\ \alpha I \quad S^{-1}$- 在这种情形下 即 C 为 正定阵 要确保基于 约束预处理迭代法收敛的 只需 $\| I \quad M_1^{-1}\|_2 \leq$ 进而只需考虑 $Re\ \lambda\ M_1 \ \geq$ 即可 其中 $Re\ \lambda\ M_1$ 表示 M_1 特征值的实部- 设 λ 为 M_1 的任一特征值 $_1 \in \mathbb{C}^n$ 为其对应的特征向量 记 $E \quad B^*C^{-1}B, \quad \alpha I \quad S^{-1}\ _1$ 则有

$$\alpha E \quad \lambda\ \alpha^2 I \quad \alpha P \quad \alpha S \quad PS ,$$

对 - 等式两边同时乘以 $\frac{v^*}{v^*v}$ 并令

$$\frac{^*E}{^*} \quad a_1\ a_1 \geq , \frac{^*P}{^*} \quad b_1 \quad b_2\ b_1 > , \frac{^*S}{^*} \quad c_1, \frac{^*PS}{^*} \quad d_1 \quad d_2,$$

其中 为虚数单位- 则可得

$$\lambda \quad \frac{\alpha a_1}{\alpha^2 \quad \alpha\ b_1 \quad b_2 \quad \alpha\ c_1 \quad d_1 \quad d_2}$$
$$\frac{\alpha a_1\ \alpha^2 \quad \alpha b_1 \quad d_1 - \ \alpha b_2 \quad \alpha c_1 \quad d_2}{\alpha^2 \quad \alpha b_1 \quad d_1{}^2 \quad \alpha b_2 \quad \alpha c_1 \quad d_2{}^2}.$$

若 a_1 则由上式知 λ 从而有 $\| I \quad M_1^{-1}\|_2$ 再结合 知 $\rho \ <$ - 以下讨论 $a_1 >$ 的情形 为此要保证 $Re\ \lambda \ \geq$, 只需

$$\alpha^2 \quad \alpha b_1 \quad d_1 \geq$$

即可- 下面分三种情况讨论

若 b_1, d_1 满足

$$b_1^2 - \quad d_1 \leq ,$$

则对 $\forall \alpha >$ 成立-

若 b_1, d_1 满足

$$b_1^2 - \quad d_1 > , d_1 \geq ,$$

或

$$b_1 > \quad \sqrt{d_1}, d_1 \geq ,$$

则对 $\forall \alpha >$ 成立-

若 b_1, d_1 满足

$$b_1^2 - \ d_1 > . , d_1 < . ,$$

或

$$d_1 < . ,$$

则当 $\alpha \geq \alpha$

若 b_3, d_3 满足

$$b_3^2 - \quad d_3 \leq ,$$

则对 $\forall\alpha >$ 成立-

若 b_3, d_3 满足

$$b_3 > \sqrt{d_3}, d_3 \geq ,$$

则对 $\forall\alpha >$ 成立-

若 b_3, d_3 满足

$$d_3 < ,$$

则当 $\alpha \geq \alpha_2 \quad \frac{-b + \sqrt{b^2-4d}}{2}$ 时 成立-

结合 a_2 及 $a_2 >$ 时上述三种情形 均可得到 $Re \lambda M_2 \geq$ 的条件 从而在这些条件下有 $\| I \quad M_2 ^{-1}\| \leq$ - 则

$$\|XG\|_* \quad _{\epsilon\to 0}\|X_\epsilon G\|_* \leq .$$

从而由 - 和 得 $\rho \quad <$ 即基于 约束预处理迭代法是收敛的-

综上可得基于 约束预处理迭代法收敛的充分条件 我们将以上结果归纳成如下定理-

3.1. 设 为由 所定义的基于 约束预处理迭代法的迭代矩阵 其中 G 由 - 所定义- 则下述条件之一满足时 基于 约束预处理迭代法是收敛的-

当 C 为 正定阵时-

对 $\forall\alpha >$ 或 成立-

式成立 且 α 满足

$$\alpha \| \quad \otimes \quad \otimes \quad \forall \quad \in \quad \{\otimes\forall/ \quad \otimes \quad \otimes \quad \otimes \quad \otimes$$

$\mathbb{R}^{n+m}$ 使得其 确解 $*, *$ $, ,\cdots,$ $^T \in \mathbb{R}^{n+m}$- 初始迭代向量取为零向量 即 ^{0} $, , ,\cdots,$ $^T \in \mathbb{R}^{n+m}$- 如果迭代次数超过 次或相对误差满足

$$\frac{\|b-\mathcal{A}\ ^k\|}{\|b-\mathcal{A}\ ^0\|} \leq \ ^{-7},$$

则迭代终止- 所有算例均在 中运行-

在广义鞍点 题 中 系数矩阵 $\mathcal{A}$ 的子块定义如下 [1, 22]

$$A \quad d\ a\ A_1, D_2, D_3 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \quad \left[\ \ B \quad -I \quad I\ \right] \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

其中 A 为块对角阵 B 为行满秩阵 且

$$A_1 \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I & A_1 \\ A_2 & D_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2q\times 2q},$$

其中 $A_{1\ ij} \quad e^{-2((i/3)^2+(j/3)^2)} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ $A_{2\ ij} \quad e^{-3((i/3)^2+(j/3)^2)} \in \mathbb{R}^{q\times q}$- $D_1 \quad I \in \mathbb{R}^{q\times q}$ 为单位阵 $D_i \quad d\ a\ d_j^{(i)} \in \mathbb{R}^{2l\times 2l}$, 均为对角阵 定义如下

$$d_j^{(2)} \quad \begin{cases} , & \leq \ \leq , \\ \ ^{-5} \ - \ ^2, & \leq \ \leq , \end{cases} \qquad d_j^{(3)} \quad \ ^{-5} \quad ^2, \quad \leq \ \leq \ .$$

B 取为如下块结构矩阵

$$B \quad \begin{bmatrix} B\otimes I_{p\times p} \\ I_{p\times p}\otimes B \end{bmatrix},$$

其中 B 取两种情况来讨论

$$B \quad \begin{bmatrix} & - & & & \\ & & - & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & - \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times(p+1)}. \qquad (-)$$

和

$$B \quad \begin{bmatrix} & - & & & \\ - & & - & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & - & & - \\ & & & - & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times p}. \qquad (-)$$

在这类鞍点 题中 ^{2} 当 B 取为 时 当 B 取为 时 ^{2}- 根据以上定义有 , -

在计算中 我们采用重启的广义极小残向量方法和重启的预处理广义极小残向量方法 [20] 来求解广义鞍点 题 其中重启数取为 预条件子 $\mathcal{G}$ 中的 块分别取为 G_{PSS} G_{HSS} 和 G_{skew}- 而 $\mathcal{G}_{PSS}$ $\mathcal{G}_{HSS}$ 和 $\mathcal{G}_{Skew}$ 分别表示约束预条件子 $\mathcal{G}$ 中的 块分别取

G_{PSS}. G_{HSS} 和 G_{Skew}- 对[redacted]点矩阵 $\mathcal{A}$ 约[redacted]
块的取法是唯一确定的. 而与[redacted]一样. 约[redacted]有
多种取法- 为了计算方便. 本[redacted]的 P 和 S 取为[1]

P [redacted] S $\quad L_H^* - L_H \quad S$,

其中 D [redacted]


10

5.

本文基于求解非 正定线性方程组的 迭代法 [1] 和基于求解广义鞍点 题的 约束预处理方法 [22] 针对广义鞍点 题构造了一种新的基于 的约束预条件子- 文中分析了 约束预条件子的一些性质并证明了预处理迭代法的收敛性- 数值结果表明 基于 的约束预条件子是一个较好的预条件子, 特别是选取了合适的参数值之后 可以大大提高预处理迭代法的收敛速度- 但是 与基于 的约束预条件子和其他带参数的迭代法一样 最优参数的 束难 以学严阳 优许 重注引注原意再心最正圆学预许学转终 预许预有引样只 注 右样只最于元学用

[17] 蒋美群, 曹阳. 广义鞍点问题的块三角预条件子 [J]. 计算数学, 2010, 32 (1): 47-58.

[18] Jiang M Q, Cao Y, Yao L Q. On parameterized block triangular preconditioners for generalized saddle point problems[J]. Appl. Math. Comput., 2010, 216: 1777-1789.

[19] Pan J Y, Ng M K, Bai Z Z. New preconditioners for saddle point problems[J]. Appl. Math. Comput., 2006, 172(2): 762-771.

[20] Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems(2nd edn). SIAM: Philadelphia, 2003.

[21] Sturler E D, Liesen J. Block-diagonal and constraint preconditioners for nonsymmetric indefi linear systems[J]. SIAM J. Sci. Comput., 2005, 26(5): 1598-1619.

[22] Zhang G F, Ren Z R, Zhou Y Y. On HSS-based constriant preconditioners for generalized saddle-point problems[J]. Numer. Algor., 2011, 57: 273-287.

ON PSS-BASED CONSTRAINT PRECONDITIONERS FOR GENERALIZED SADDLE POINT PROBLEMS

Cao Yang[1,2] Niu Qiang[3] Jiang Meiqun[1]

(1. *School of Mathematics Sciences, Soochow University, Suzhou 215006, Jiangsu, China*)

(2. *School of Transportation, Nantong University, Nantong 226019, Jiangsu, China*)

(3. *Mathematics and Physics Center, Xi'an Jiaotong-Liverpool University, Suzhou 215123, China*)

Abstract

In this paper, a PSS-based constraint preconditioner, in which the (1,1) block of the preconditioner is constructed by the PSS iterative method for solving the non-Hermitian positive definite linear systems, is presented for the generalized saddle point problems with non-Hermitian (1,1) blocks. The invertibility of the PSS-based constraint preconditioner is analyzed and the convergence of the preconditioned iteration method is proved. Numerical experiments are illustrated to show the efficiency of the preconditioner as well as the corresponding preconditioned iterative method.

Keywords: generalized saddle point problem; PSS; iterative method; constraint preconditioner

2000 Mathematics Subject Classification: 65F10