2012 年 5 月　　计 算 数 学　　第 34 卷第 2 期
May, 2012　　MATHEMATICA NUMERICA SINICA　　Vol.34, No.2

Legendre 小波求解超奇异积分*1)

陈一鸣　仪明旭　魏金侠　陈
(燕山大学理学院, 河北秦皇岛 066004)

摘　要

超奇异积分的数值算法　直是近些年来研究的重要课题. 基于超奇异积分的 H　　有限部分积分定义, 本文给出性和有效性

关键词: 超奇异积分; L　　小波; H　　有限部分积分; 近似值
MR (2000) 主题　类: 41A55

1. 引　　言

许多科学和工程计算问题往往归化为积分方程. 这些积分方程一般是奇异的, 有些甚至是超奇异的, 特别是自然边界归化无一例外都归结为奇异积分方程 [1−3]. 由于通常的数值积分方法对计算超奇异积分都是无效的, 故长期以来边界元研究总是回避超奇异积分方程. 但近年来超奇异积分计算又引起了许多学者的广泛兴趣, 发展超奇异积分的数值计算方法已成为当前积分方程以及边界元研究领域中的一个极为重要的课题 [4−6].

奇异积分根据定义的不同, 有不同的数值方法. 主要包括牛顿 - 科茨公式 [7]、高斯公式 [8]、外推法 [9] 等, 这些方法的使用　围不同. 本文将超奇异积分定义为 Hadamard 有限部分积分 [3], 它是经典 Riemann 积分的推广. 近年来若干计算此类奇异积分的数值方法相继被提出, 余德浩教授在文献 [3,10,11] 讨论了自然边界归化中奇异积分的近似解法; 文献 [12] 给出了区间上的一类奇异积分的梯形公式及 Simpson 公式; 文献 [13] 应用了广义外推法来近似计算超奇异积分, 大大提高了计算精度. 小波分析是近些年来发展起来的新兴学科, 它是 Fourier 分析的进一步发展. 其主要研究: 在特定函数空间内, 利用某种方法构造一种　为小波的基函数, 对给定的函数进行逼近. 本文利用 Legendre 小波来研究超奇异积分的近似计算, 根据 Legendre 小波的特性, 将奇异点在积分区间内转换为积分区间端点处. 然后利用有限部分积分在积分区间端点处的定义, 来计算超奇异积分. 该算法操作　单, 减少了计算超奇异积分运行时间, 并且计算精度较高, 实用性较强.

2. 有限部分积分

对于 Riemann 积分, 已有很多有效的数值计算方法, 其中最基本的一类方法是利用 Newton-Cotes 型求积公式, 这些公式是通过对被积函数 $f(t)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上作分段多项式函

* 2011 年 11 月 16 日收到.
1) 基　项目: 河北　自然科学基　(E2009000365) 资助项目.

数插值逼近得到的, 最常用的是通过分段线性多项式逼近得到的梯形公式以及通过分段三次多项式逼近得到的 Simpson 公式. 这一逼近方法同样可用于求解有限部分积分 [3]

$$I(a,b,s) = f.p.\int_a^b \frac{f(t)}{(t-s)^2}dt. \tag{2.1}$$

其中 $a < s < b$. 本文用 Legendre 小波来逼近 $f(t)$, 由于 Legendre 小波函数是正交函数, 进而能够有效的近似表示 $f(t)$.

2.1. 超奇异积分定义 [3]

定义超奇异积分如下

$$I_p(a,b,s) = f.p.\int_a^b \frac{f(t)}{(t-s)^{p+1}}dt, \quad p \geq 1, \quad p \in N^+. \tag{2.2}$$

其中, $s \in (a,b)$ 为奇异点, $f(t)$ 为密度函数. $I_p(a,b,s)$ 为 " $p+1$ 阶 Hadamard 有限部分积分" 或 " $p+1$ 阶超奇异积分". 当 $p = 1$ 时, (2.2) 式即为 (2.1) 式.

2.2. Hadamard 有限部分定义

有限部分定义最早由 Hadamard 提出, 该定义的提出使得超奇异积分的直接计算成为可能, 其定义为

$$\begin{aligned} & f.p.\int_a^b \frac{f(t)}{(t-s)^{p+1}}dt \\ = & \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\left[\int_a^{s-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^b\right]\frac{f(t)}{(t-s)^{p+1}}dt - \sum_{j=0}^{p-1}\frac{(-1)^j f^{(j)}(s)}{j!}\frac{1-(-1)^{p-j}}{(p-j)\varepsilon^{p-j}}\right\}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $s \in (a,b)$ 为奇异点, $p \geq 1$, $p \in N^+$. 当 $p = 1$ 时, (2.3) 式即为

$$f.p.\int_a^b \frac{f(t)}{(t-s)^2}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_a^{s-\varepsilon}\frac{f(t)}{(t-s)^2}dt + \int_{s+\varepsilon}^b \frac{f(t)}{(t-s)^2}dt - 2\frac{f(s)}{\varepsilon}\right\}, \tag{2.4}$$

令 $f(t) = 1$, 有

$$\begin{aligned} f.p.\int_a^b \frac{1}{(t-s)^{p+1}}dt &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_a^{s-\varepsilon}\frac{1}{(t-s)^{p+1}}dt + \int_{s+\varepsilon}^b \frac{1}{(t-s)^{p+1}}dt - \frac{1-(-1)^p}{p\varepsilon^p}\right\} \\ &= \frac{1}{p(a-s)^p} - \frac{1}{p(b-s)^p}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

4.2. 函数逼近

定义在区间 $[0,1)$ 上的函数 $f(t)$ 可以展开为

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_{nm}\psi_{nm}^{(k)}(t), \tag{4.2}$$

其中 $c_{nm}=\left\langle f(t),\psi_{nm}^{(k)}(t)\right\rangle$. 如果我们将 (4.2) 式截断为有限项, 有

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\mu^k}\sum_{m=0}^{M-1}c_{nm}\psi_{nm}^{(k)}(t)=C^T\Psi(t), \tag{4.3}$$

其中 C 和 $\Psi(t)$ 为 $\mu^kM\times 1$ 阶矩阵, 其元素为

$C=[c_{10},c_{11},\cdots,c_{1(M-1)},c_{20},\cdots,c_{2(M-1)},\cdots,c_{\mu^k0},\cdots,c_{\mu^k(M-1)}]^T$,

$\Psi(t)=[\psi_{10}^{(k)}(t),\cdots,\psi_{1(M-1)}^{(k)}(t),\psi_{20}^{(k)}(t),\cdots,\psi_{2(M-1)}^{(k)}(t),\cdots,\psi_{\mu^k0}^{(k)}(t),\cdots,\psi_{\mu^k(M-1)}^{(k)}(t)]^T$.

两个 Legendre 小波函数乘积的积分为

$$I=\int_0^1\Psi(t)\Psi(t)^Tdt. \tag{4.4}$$

其中 I 为单位矩阵.

5. Legendre 小波求超奇异积分

对于 (2.2) 式, 令 $x=\frac{t-a}{b-a}$, 则 $dx=\frac{dt}{b-a}$,

$$I_p(a,b,s)=f.p.\int_a^b\frac{f(t)}{(t-s)^{p+1}}dt=f.p.\frac{1}{(b-a)^p}\int_0^1\frac{f((b-a)x+a)}{(x-\frac{s-a}{b-a})^{p+1}}dx. \tag{5.1}$$

由 (4.3) 式得

$$f((b-a)x+a)=\sum_{n=1}^{\mu^k}\sum_{m=0}^{M-1}c_{nm}\psi_{nm}^{(k)}(x)=C^T\Psi(x))$$

令 $2\mu^k x - 2n + 1 = y$, 则 $dx = \frac{1}{2\mu^k}dy$, 故 (5.3) 式可化为

$$I_p(a,b,s) = f.p.\left(\frac{2}{b-a}\right)^p \sum_{n=1}^{\mu^k}\sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}\sqrt{2m+1}\,\mu^{\frac{(2p+1)k}{2}}\int_{-1}^{1}\frac{P_m(y)}{\left[y-\left(\frac{(s-a)2\mu^k}{b-a}+1-2n\right)\right]^{p+1}}dy. \tag{5.4}$$

适当选择 μ, k, 总可以使

$$\frac{(s-a)2\mu^k}{b-a}+1-2n = 1, \tag{5.5}$$

或

$$\frac{(s-a)2\mu^k}{b-a}+1-2n = -1. \tag{5.6}$$

此时 n 分别等于

$$\frac{s-a}{b-a}\mu^k,\ \frac{s-a}{b-a}\mu^k+1 \in \{1,2,\cdots,\mu^k\}. \tag{5.7}$$

例如, 当 $a=0, b=2, s=1$ 时, 取 $\mu=2, k\in N^+$; 当 $a=3, b=6, s=4$ 时, 取 $\mu=3, k\in N^+$.

这样对于 (5.4) 式中超奇异积分

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_m(y)}{\left[y-\left(\frac{(s-a)2\mu^k}{b-a}+1-2n\right)\right]^{p+1}}dy, \tag{5.8}$$

当 n 分别取到 (5.7) 式时, (5.8) 式就可转化为

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_m(y)}{(y-1)^{p+1}}dy,\quad \int_{-1}^{1}\frac{P_m(y)}{(y+1)^{p+1}}dy. \tag{5.9}$$

即通过 Legendre 小波可以将奇异点在区间内转化为积分区间端点处积分, 这正是本文的独特之处.

而对于端点处超奇异积分 (5.9) 式, 由于 Legendre 小波为正交小波, 所以当取 $M=2$, μ, k 充分大时, 就能充分的近似 $f(t)$, 此时 $m=0,1$.

故要计算 (5.9) 式, 只需计算如下超奇异积分

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{(y-1)^{p+1}}dy,\quad \int_{-1}^{1}\frac{1}{(y+1)^{p+1}}dy,\quad \int_{-1}^{1}\frac{y}{(y-1)^{p+1}}dy,\quad \int_{-1}^{1}\frac{y}{(y+1)^{p+1}}dy. \tag{5.10}$$

而这些超奇异积分通过第三部分公式 (3.1) ~ (3.4) 计算. 其中

$$\int_{-1}^{1}\frac{y}{(y-1)^{p+1}}dy,\quad \int_{-1}^{1}\frac{y}{(y+1)^{p+1}}dy. \tag{5.11}$$

当 $p=1$ 时, 有

$$\int_{-1}^{1}\frac{y}{(y-1)^2}dy = \int_{-1}^{1}\frac{y-1+1}{(y-1)^2}dy = -\ln 2-\frac{1}{2}, \tag{5.12}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{y}{(y+1)^2} dy = \int_{-1}^{1} \frac{y+1-1}{(y+1)^2} dy$$

增大而减小. 由表 2 可知, 采用该方法求超奇异积分近似值的运行时间较短, 进一步验证该方法的可行性和有效性.

7. 结　　论

本文将 Legendre 小波应用到超奇异积分近似计算中, 利用 Legendre 小波基的特性, 可将原超奇异积分进行转换, 进而便于计算, 同时也降低计算超奇异积分的运行时间. 文中所得近似值的误差尚待理论分析, 这是进一步研究的课题.

参 考 文 献

[1] B I, D H. A ... [J]. F E. A D , 1987, 3: 341-354.
[2] F K, D H. C ... C -F ... F E. M , , B , 1983, 211-252.
[3] 余德 . 自然边界元方法的数学理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1993.
[4] , J M. I ... H ... [J]. IMA. J. N . A ., 2008, 28: 580-597.
[5] , J M. ... [J]. J. C . A . M ., 2009, 223: 598-613.
[6] D K. E ... [J]. I . J. N . M E ., 2001, 51: 1195-1210.
[7] L J ... N -C ... [J]. J. C . A . M ., 2010, 223: 2841-2854.
[8] M G. N ... [J]. J. C . A . M ., 1994, 50: 9-31.
[9] C.B. L , . L , .M. E M [J]. , 1995.
[10] D H. N ... [J]. J. C . M ., 1983, 1: 52-62.
[11] D H. ... BEM [J]. A E , 1993, 18: 103-109.
[12] L . ... [J]. C ,7( )( )04 .-8.9(( )-83333332)

LEGENDRE WAVELET FOR SOLVING SUPERSINGULAR INTEGRAL

[illegible]

(*College of Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, Hebei, China*)

Abstract

[illegible] $p+1(p \in N^{+})$ [illegible]

Keywords: [illegible]

2000 Mathematics Subject Classification: 41A55