Emden方程的Lie对称性与新型守恒量*

顾书龙[1,2]

(1.南京晓庄学院 物理系,南京　211171;2.巢湖学院 科研处,安徽 巢湖　238000)

摘要:研究了Emden动力学方程的Lie对称性与新型守恒量,给出了Emden系统的运动微分方程和Lie对称性、形式不变性的确定方程,并通过系统的Lie对称性通过形式不变性导出了Emden方程的新型守恒量.

关键词:Emden动力学方程;Mei对称性;Lie对称性;新型守恒量

中图分类号:O320　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1006-0707(2009)10-0004-02

动力学系统的对称性与守恒量研究具有重要的数学和物理意义.近代利用对称性寻找系统守恒量的方法主要有:Noether对称性、Lie对称性和Mei的形式不变性[1-4].寻找到的守恒量主要有Noether守恒量、Hojman守恒量和新型守恒量.Noether对称性是Hamilton作用量在无限小连续变换群作用下具有的一种不变性;Lie对称性是运动微分方程在无限小连续群变换下的一种不变性,或将微分方程的解曲线集合映射为自身的一种对称性映射;Mei的形式不变性是力学系统的动力学函数,比如Lagrange函数、非势广义力、广义约束反力和约束方程等在无限小连续变换群作用下具有的一种不变性.利用Mei的形式不变性可以直接构造一个新形式的守恒量[5].为此,本文中研究Emden方程,研究如何利用Lie对称性通过Mie的形式不变性间接导出新型守恒量.

1　系统的运动微分方程

Emden约束方程表示为

$$\ddot{q}+\frac{2}{t}\dot{q}+q^{5}=0 \tag{1}$$

满足方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=Q \tag{2}$$

式中:$L(t,q,\dot{q})=T(t,q,\dot{q})-V(q)$为系统的Lagrange函数;$T$为动能;$V$为势能;$Q$为非势广义力.引入Euler算子

$$E=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial}{\partial q} \tag{3}$$

故式(2)可写成

$$E(L)=Q \tag{4}$$

2　无限小变换与确定方程

引入时间,广义坐标的无限小变换.

$$t^{*}=t+\Delta t,\quad q^{*}(t^{*})=q(t)+\Delta q \tag{5}$$

其展开式为:

$$t^{*}=t+\varepsilon\xi_{0}(t,q),\quad q^{*}(t^{*})=q(t)+\varepsilon\xi(t,q) \tag{6}$$

式中:ε为无限小参数;ξ_0,ξ为无限小变换的生成元.

引入无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_{0}\frac{\partial}{\partial t}+\xi\frac{\partial}{\partial q} \tag{7}$$

它的一次扩展为

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\xi}-\dot{q}\dot{\xi}_{0})\frac{\partial}{\partial\dot{q}} \tag{8}$$

定义　如果方程(4)在无限小变换式(6)下形式保持不变,即

$$E(L^{*})=Q^{*} \tag{9}$$

成立,则称这种不变性为Emden方程的Mei对称性.

Mei对称性理论指出,对于给定的Emden方程(2),如果无限小变换式(6)的生成元ξ_0、ξ满足

$$E[X^{(1)}(L)]-X^{(1)}(Q)=0 \tag{10}$$

则系统(2)是Mei对称的.方程(10)称为Emden方程的Mei对称性确定方程.

由方程(2)可求出Emden系统的广义加速度

$$\ddot{q}=\alpha(t,q,\dot{q}) \tag{11}$$

Lie对称性理论指出,对于给定的Emden方程(2),如果无限小变换式(6)的生成元ξ_0、ξ满足如下Lie对称性确定

* **收稿日期**:2009-07-16

作者简介:顾书龙(1958—),男,江苏南京人,教授,主要从事分析力学研究.

方程

$$\tilde{X}^{(2)}[E(L)]=\tilde{X}^{(1)}(Q) \tag{12}$$

或者式(12)的等价形式

$$\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi-\dot{q}\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0-2\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\alpha=$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial\alpha}{\partial q}\xi+\frac{\partial\alpha}{\partial\dot{q}}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi-\dot{q}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right) \tag{13}$$

则相应的对称性为 Emden 方程的 Lie 对称性. 这里:

$$\frac{\bar{d}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s} \tag{14}$$

$$\tilde{X}^{(2)}=\tilde{X}^{(1)}+\left[\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi-\dot{q}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right)-\ddot{q}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right]\frac{\partial}{\partial\ddot{q}} \tag{15}$$

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi\frac{\partial}{\partial q}+\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi-\dot{q}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}} \tag{16}$$

命题 1 如果 Emden 方程形式不变性的生成元 ξ_0, ξ 和规范函数 $G_F=G_F(t,q,\dot{q})$ 满足如下结构方程

$$\tilde{X}^{(1)}(L)\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0+\tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(1)}(L)]+$$

$$\tilde{X}^{(1)}(Q)(\xi-\dot{q}\xi_0)+\frac{\bar{d}}{dt}G_F=0 \tag{17}$$

则形式不变性导致新型守恒量

$$I_F=\tilde{X}^{(1)}(L)\xi_0+\frac{\partial\tilde{X}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}}(\xi-\dot{q}\xi_0)+G_F \tag{18}$$

命题 2 如果 Emden 方程的 Lie 对称性生成元 ξ_0, ξ 满足方程(12),且存在规范函数 $G_F=G_F(t,q,\dot{q})$ 满足结构方程(17),则 Lie 对称性导致新型守恒量(18).

3 Emden 方程的新型守恒量

对系统受 Emden 约束

$$\ddot{q}+\frac{2}{t}\dot{q}+q^5=0 \tag{19}$$

若取:

$$L=\frac{1}{2}t^2\dot{q}^2 \tag{20}$$

$$Q=-t^2q^5 \tag{21}$$

则由式(19)可得

$$\alpha(t,q,\dot{q})=-\frac{2}{t}\dot{q}-q^5 \tag{22}$$

代入 Lie 对称性确定方程(12)解得:

$$\xi_0=t,\quad\xi=-\frac{1}{2}q \tag{23}$$

取规范函数

$$G_F=\frac{1}{6}t^3q^6 \tag{24}$$

显然式(23)、(24)满足结构方程(17),由命题 2,Lie 对称性导致新型守恒量

$$I_F=\frac{1}{2}\dot{q}^2t^3+\frac{1}{2}q\dot{q}t^2+\frac{1}{6}q^6t^3=\mathrm{const} \tag{25}$$

若取

$$L=t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{6}q^6\right) \tag{28}$$

代入 Lie 对称性确定方程(12)解得:

$$\xi_0=-t,\quad\xi=\frac{1}{2}q \tag{23}$$

取规范函数

$$G_F=0 \tag{29}$$

则式(17)成立,命题 2 给出新型守恒量(25).

若取:

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{6}q^6 \tag{26}$$

$$Q=-\frac{2}{t}\dot{q} \tag{27}$$

代入 Lie 对称性确定方程(12)可解得式(23)同样的 Lie 对称性生成元,但找不到满足式(17)的规范函数 G_F,此时 Lie 对称性不导致新型守恒量.

4 结论

Lie 对称性不依赖于同一微分方程的不同表达形式,而形式不变性则依赖于同一微分方程的不同表达形式,因此,由 Lie 对称性导致的新型守恒量依赖于不同的表达形式.

参考文献:

[1] 梅凤翔. 关于 Noether 对称性、Lie 对称性和形式不变性[J]. 北京理工大学学报,2001,21(4):535-536.

[2] Noether A E. Invariant Variations probleme[J]. Nachr akad Wiss Cottingen Math Phys., 1918(2):235-257.

[3] Lutzky M. Dynamical Symmetries and Conserved Quantities[J]. J. Phys. A: Math. Gen. 1979,12(7):973-981.

[4] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京:北京理工大学出版社,2004:299-313.

[5] 梅凤翔. 完整力学系统的三类对称性与三类守恒量[J]. 动力学与控制学报,2004,2(1):28-31.