第19卷 第4期 航 空 学 报 Vol. 19 No. 4
1998年 7月 ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA July 1998

结构的模态转换

顾松年 姜节胜
(西北工业大学264信箱, 西安, 710072)
姚起杭
(飞机强度研究所, 西安, 710065)

MODAL TRANSFORMATION OF A STRUCTURE

Gu Songnian, Jiang Jiesheng
(Box 264, Northwestern Polytechnical University, Xi′an, 710072)
Yao Qihang
(Aircraft Strength Research Institute, Xi′an, 710065)

摘 要 提出一种基于全等变换的模态转换方法, 可将振动台模态试验获得的模态, 转换成结构处在自由状况下的模态。对方法的合理性做了论述, 并佐以例证。

关键词 模态转换 模态 全等变换

中图分类号 O327, TB123

Abstract An approach, based on congruent transformation, for modal transform of the structure under different boundary conditions is proposed. The main purpose is to use this approach to transform the elastic mode got from the modal test of a specimen fixed on vibrostand to the mode in free-free state of the same specimen. Two kinds of specimen constraints are considered: statically determinate and statically indeterminate. In the first case, modal matrix is constituted of elastic mode and rigid-body mode of the specimen. In the second case, released inertia force-attachment mode should be added to form the matrix mentioned above. Reasonableness of the approach is expounded and two examples are carried out to demonstrate the feasibility and effectiveness of the approach as well.

key words modal transform, mode, congruent transformation

模态试验一般是模拟结构处于自由状态, 实际实施时是支承在固频低于试验结构最低固频1/ 3的软支承上, 因而得到精度可资工程应用的模态, 但非绝对精确。在响应计算时, 如借助实测传递函数来建模, 则精度更难保证[1]。因而, 有限元建模与模态试验并行使用, 成为工程上常用的方法。振动台上的模态试验, 不可能模拟结构的自由状态, 而是通过夹具固定在台面上, 所得模态常需转换。称这种不同边界条件下的结构模态间的转化为模态转换。

振动台提供基础激励, 模态参数识别时, 需有有限元模型的配合。因为当前的技术条件, 尚难以实测出振动台传递给试件的力, 利用测量传递函数这类识别方法是行不通的。

以位移为未知数的常规有限元, 自由结构受到约束后, 相当于在质量阵、刚度阵中划去与约束相对应的列和行。循着这一思路, 若已知结构处于自由状态下的有限元模型, 其他约束情况下的模态容易求得。本文讨论的是受约束结构转换成自由结构的模态转换问题。

1998-04-17收到, 1998-05-14收到修改稿
国防科技预研基金资助课题

1 转换理论

(1) 静定约束 试件可视为自由结构,无阻尼时的运动方程为

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \tag{1}$$

式中: M 与 K 均为 n 阶实对称阵; x 为 n 维实向量。由式(1)的特征问题方程可求得自由状态下的实模态。

若约束的数目刚使试件失去刚体运动,称约束为静定约束。此时结构位移为

$$x = x_r + x_e \tag{2}$$

角标 r 和 e 分别表示刚体与弹性。x_r 为 n 维向量,x_e 是约束后试件的弹性位移与零元素构成的 n 维向量。

设刚体模态数为 p,弹性模态的阶数为 q。将这 p 个约束逐一放松,并使之发生单位位移,则有 $K\Phi_R = 0$,即

$$\begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pq} \\ K_{qp} & K_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p \\ \Phi_{qp} \end{bmatrix} = [0] \tag{3}$$

由式(3)可得 $\Phi_{qp} = -K_{qq}^{-1}K_{qp}$,而 I_p 为 p 阶单位阵。于是

$$\Phi_R = \begin{bmatrix} I_p \\ -K_{qq}^{-1}K_{qp} \end{bmatrix} \tag{4}$$

其实,刚体模态 Φ_R 常可直接写出。

自由结构受到静定约束后,即具有弹性模态。当将与 p 个约束相对应的元素放置在质量、刚度阵的左列上行时,弹性模态由下列特征方程求得

$$(KM' - K')\Phi'_e = 0 \tag{5}$$

M' 和 K' 是 M 与 K 划去左 p 列上 p 行得到的 $(n-p)$ 阶方阵。Φ'_e 为 $(n-p)\times q$ 阶阵。为讨论方便,设 $p+q=n$。对于原自由结构,其"弹性"模态

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi'_e \end{bmatrix} \tag{6}$$

原自由结构的位移

$$x = x_r + x_e = \Phi_R q_R + \Phi_e q_e \equiv \Phi q \tag{7}$$

用 Φ 对式(1)做全等变换,得

$$\bar{M}\ddot{q} + \bar{K}q = 0 \tag{8}$$

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \Phi_R^T \\ \Phi_e^T \end{pmatrix} M(\Phi_R \quad \Phi_e) = \begin{bmatrix} \Phi_R^T M \Phi_R & \Phi_R^T M \Phi_e \\ \Phi_e^T M \Phi_R & \Phi_e^T M \Phi_e \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\bar{K} = \Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi_e^T K \Phi_e \end{bmatrix} \tag{10}$$

式(8)求得的特征根即原自由结构的特征根,特征向量则应做式(7)的变换。

以上讨论说明:式(7)的 Φ 与式(1)的模态等价,即由振动台得到的在静定约束下的模态,只要与刚体模态相组合,即可作为原自由结构的模态基向量。

(2) 超静定约束 若试件在台面上的约束个数大于刚体模态数,则形成超静定约束,因而上面的方法不再适用。换言之,式(7)中的 Φ 还应包含其他的模态基向量。研究指出:模态加速度法求解动响应,等价于采用剩余惯性释放模态;对于自由结构,只要在保留模态中计

及刚体模态, 惯性释放附着模态同样可用来求解响应[2～4]。这就启发人们; 在 5 中加入惯性释放附着模态是可行的。

关于惯性释放附着模态的定义及其求法, 参见文献[3]。此时自由结构的物理坐标集分为3个子集, 即 $N = R + A + W$, 记其对应元素个数分别为 p, s, q 其中: R 为附加约束坐标集, 它提供静定约束; C 为界面坐标集; $A = C - R$。相应地, 刚度阵分块为

$$\begin{bmatrix} k_{pp} & k_{ps} & k_{pq} \\ k_{sp} & k_{ss} & k_{sq} \\ k_{qp} & k_{qs} & k_{qq} \end{bmatrix} \quad (\text{设 } n = p + s + q,\ p + s = c,\ w = q) \tag{11}$$

惯性释放附着模态

$$5_s = \begin{bmatrix} 5_{ps} \\ 5_{ss} \\ 5_{qs} \end{bmatrix} = R^T \tilde{G} R F \tag{12}$$

式中: $R = I - M 5_R 5_R^T$; M 为自由结构 n 阶质量阵; 5_R 为归一化刚体模态($5_R^T M 5_R = I$);

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{ss} & g_{sq} \\ 0 & g_{qs} & g_{qq} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} g_{ss} & g_{sq} \\ g_{qs} & g_{qq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ss} & k_{sq} \\ k_{qs} & k_{qq} \end{bmatrix}^{-1}; \quad F = \begin{bmatrix} 0_{ps} \\ I_{ss} \\ 0_{qs} \end{bmatrix}$$

0_{ps} 与 0_{qs} 皆为零矩阵; I_{ss} 为 s 阶单位阵。

刚体模态仍可由式(4) 求得, 或直接写出

$$5_R = \begin{bmatrix} I_p \\ 5_{Rs} \\ 5_{Rq} \end{bmatrix} \tag{13}$$

弹性模态为

$$5_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5'_e \end{bmatrix} \tag{14}$$

$5'_e$ 为 M 与 K 划去左 c 列上 c 行而得的 M' 与 K' 的特征向量组成。

将式(2) 改写成

$$x = 5_R q_R + 5_s q_s + 5_e q_e \text{ C } 5 q \tag{15}$$

5_s 各元素具有柔度量纲, 其对应的广义坐标 q_s 各元素具有力的量纲。此即中外学者指出的: 剩余柔度可看作里兹矢量, 界面力可作为广义坐标的含义所在。

用式(15) 中的 5 对式(1) 做全等变换, 得到形如式(8) 的方程, 但

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 5_R^T M 5_R & 0 & 5_R^T M 5_e \\ 0 & 5_s^T M 5_s & 5_s^T M 5_e \\ 5_e^T M 5_R & 5_e^T M 5_s & 5_e^T M 5_e \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5_s^T K 5_s & 5_s^T K 5_e \\ 0 & 5_e^T K 5_s & 5_e^T K 5_e \end{bmatrix} \tag{17}$$

以下的工作与静定约束时相同, 不赘。故在超静定约束下, 由振动台得到的模态, 要与刚

体模态及惯性释放附着模态相组合, 即可作为原自由结构的模态基向量。

2 算 例

例题1 质量、弹簧系统如图1所示。设质量块只能在纸面内做左右运动, 质量 $m_i = m$, 弹簧刚度 $k_i = k$。现用本文方法转换下列模态: 当系统左右两端固定后, 形成超静定约束, 将求得的模态转换成原自由系统的模态。

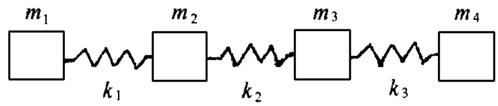

图1 质量弹簧系统

解: 系统的 M 与 K 分别为

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}; \qquad K = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

其固频与振型为

$K_1 = 0, \quad U = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$;

$K_2 = (2-\sqrt{2})k/m, \quad U_2 = [1 \quad -1+\sqrt{2} \quad 1-\sqrt{2} \quad -1]^T$;

$K_3 = 2k/m, \quad U_3 = [1 \quad -1 \quad -1 \quad 1]^T$;

$K_4 = (2+\sqrt{2})k/m, \quad U_4 = [1 \quad -1-\sqrt{2} \quad 1+\sqrt{2} \quad -1]^T$

设 m_1 与 m_4 被约束, 并指定 m_1 的位移 x_1 为 R 集, m_4 的位移 x_4 为 A 集。为求惯性释放模态, 首先将 M 与 K 改写成

$$\tilde{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{array}; \qquad \tilde{K} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & k & 0 & -k \\ -k & 0 & 2 & -k \\ 0 & -k & -k & 2k \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

对应于 $\tilde{M}$ 及 $\tilde{K}$ 的刚体模态为$(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T$, 归一化后为$\dfrac{1}{2\sqrt{m}}(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T$。从而得

$$R = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad RF = R\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} k & 0 & -k \\ 0 & 2k & -k \\ -k & -k & 2k \end{bmatrix} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad 5_s = \frac{1}{8k}\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将 $\tilde{M}$ 及 $\tilde{K}$ 划去左二列上二行得:

$$M' = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \qquad K' = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

其固频与振型为: $K_1 = k/m, U = (1 \quad 1)^T; K_2 = 3k/m, U_2 = (1 \quad -1)^T$。

从而得

$$5_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

进行全等变换后, 得到 $\bar{M}$ 及 $\bar{K}$, 它们组成的系统的特征值及特征向量为

$$K_1 = 0, \quad q_1 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T;$$

$$K_2 = (2- 2\overline{2})k/m, \quad q_2 = (1 \quad -8k \quad -2 \quad 6\overline{2}-8)^T;$$

$$K_3 = 2k/m, \quad q_3 = (1 \quad 0 \quad -2 \quad 0)^T;$$

$$K_4 = (2+\overline{2})k/m, \quad q_4 = (1 \quad -8k \quad -2 \quad -8-6\overline{2})^T$$

原自由结构振型为

$$X = 5Q = \begin{bmatrix} 1 & -5/8k & 0 & 0 \\ 1 & 7/8k & 0 & 0 \\ 1 & -3/8k & 1 & 1 \\ 1 & 1/8k & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8k & 0 & -8k \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ = 0 & -(8-6\overline{2}) & 0 & -(8+6\overline{2}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & -6 & 1 & -6 \\ 1 & -6+6\overline{2} & -1 & -6-6\overline{2} \\ 1 & 6-6\overline{2} & -1 & 6+6\overline{2} \end{bmatrix}$$

所得结果与 U_1, U_2, U_3, U_4 一致。

例题2　长为 1m 的自由梁, 其质量密度为 7820kg/m^3, 弹性模量为 2.0×10^{11}N/m^4, 截面尺寸为 0.01m × 0.03m。现用本文方法转换下列模态: 当梁左端固定后, 形成静定约束, 将求得的模态转换成原自由梁的模态。

解: 为避开模态截断的影响, 用有限元模型算得的自由梁模态为对比对象。梁等分为8段, 每段长0.125m, 结点编号自左向右, 以垂向位移及转角为未知数形成18×18阶质量、刚度阵, 算得18阶固频及对应的振型。将左端固定, 得到静定约束梁。考虑到实验中不可避免的测量等误差, 人为地改变约束梁各段截面积: 0.29, 0.3, 0.3, 0.29, 0.31, 0.31, 0.29, 0.29(自由梁各段面积均为0.3×10^{-3}m^2); 惯性矩为0.225, 0.225, 0.225, 0.225, 0.225, 0.23, 0.23, 0.235(自由梁均为0.225×10^{-7}m^4), 由此算得16阶固频及对应的弹性模态。用刚体及弹性模态形成 5 , 用它对原自由梁进行全等变换, 得到了与原自由梁一致的模态。限于篇幅, 仅列出部分数据如表1、表2。

表1 原自由梁固频与全等变换后梁的固频

原自由梁	- .2212D- 05	- .1952D- 06	.9800D+ 03	.2703D+ 04	.5306D+ 04
	.8800D+ 04	.1322D+ 05	.1858D+ 05	.2465D+ 05	.3453D+ 05
	.4352D+ 05	.5487D+ 05	.6872D+ 05	.8558D+ 05	.1057D+ 06
	.1276D+ 06	.1672D+ 06	.1684D+ 06		
变换后梁	.4619D- 04	.5964D- 04	.9800D+ 03	.2703D+ 04	.5306D+ 04
	.8800D+ 04	.1322D+ 05	.1858D+ 05	.2465D+ 05	.3453D+ 05
	.4352D+ 05	.5487D+ 05	.6872D+ 05	.8558D+ 05	.1057D+ 06
	.1276D+ 06	.1672D+ 06	.1684D+ 06		

表2 原自由梁振型与全等变换后梁的振型

原自由梁	三阶	.1306D+ 01	.5532D+ 00	- .1295D+ 00	- .6165D+ 00	- .7938D+ 00
	位移	- .6165D+ 00	- .1295D+ 00	.5532D+ 00	.1306D+ 01	
	三阶	- .6069D+ 01	- .5887D+ 01	- .4858D+ 01	- .2774D+ 01	- .1986D- 11
	转角	.2774D+ 01	.4858D+ 01	.5887D+ 01	.6069D+ 01	
变换后梁	三阶	- .1306D+ 01	- .5532D+ 00	.1295D+ 00	.6165D+ 00	.7938D+ 00
	位移	.6165D+ 00	.1295D+ 00	- .5532D+ 00	- .1306D+ 01	
	三阶	.6069D+ 01	.5887D+ 01	.4858D+ 01	.2774D+ 01	.4313D- 13
	转角	- .2774D+ 01	- .4858D+ 01	- .5887D+ 01	- .6069D+ 01	

3 理论依据

两例表明, 用本文方法构成的变换矩阵 5 , 可作为原自由结构的模态基向量。现对此做理论上的证明。

式(1)的特征值问题可表为

$$Kx = KMx$$

以 $x = 5q$ 对上式进行全等变换, 得

$$5^{T}K5q = K5^{T}M5q$$

或表为

$$\bar{K}q = K\bar{M}q$$

比较上两式可知, 经全等变换后, 两系统的特征值不变; 特征向量间有 $x = 5q$ 的关系。

从数学角度而言, 5 的各列必需相互线性独立。而对于振动台试验而言, 5 必需能以 M' 及 K' 形成的模态来表达。本文在分析 M' 与 K' 组成的系统运动的基础上, 提出用原自由结构的刚体模态、惯性释放附着模态, 以及振动台试验得到的弹性模态 5_e 来组成 5 , 不但保证了它的各列线性独立, 而且具有明确的力学的意义。虽然惯性模态未剔除原结构的低阶弹性模态, 但本文采用的 5_s 与 5_e 分别来自 M, K 与 M', K' 两个系统。还可看出, 即使有限元模型不够精确, 算得的 5_R 与 5_s 也难与 5_e 各列线性相关。换言之, 能与 5_e 构成的模态基向量不唯一。

本文方法也可用于模态综合, 使之更具灵活性。

参 考 文 献

1 大久保信行. 机械模态分析. 尹传家译. 上海: 上海交通大学出版社, 1985.
2 王文亮, 杜作润. 结构振动与动态子结构方法. 上海: 复旦大学出版社. 1985.
3 殷学纲, 陈淮, 蹇开林. 结构振动分析的子结构方法. 北京: 中国铁道出版社. 1991.
4 倪振华. 模态加速度法的新算法及与模态综合的关系. 见: 西安振动工程学会编. 西安振动工程学会第二届学术讨论会论文集. 西安: 1991. 9～13.

第九届全国断裂、疲劳学术会议征文

为更有效地促进国内同行间的学术交流, 经有关专家提议, 由中国航空学会、中国机械工程学会、中国力学学会及中国金属学会联合协商决定, 今后将全国疲劳学术会议、全国断裂会议合并举办, 首次合并会议暂定名为"第九届全国断裂、疲劳学术会议", 并由中国航空学会主办本届会议。

会议征文内容　所有工程材料与结构中疲劳断裂问题以及相关的材料力学行为等方面的内容都属本届会议征文范围。特别鼓励以下领域:

õ新材料的疲劳、断裂与特殊疲劳问题
õ动态、界面、弹塑性断裂
õ材料与结构剩余寿命与延寿及老龄问题
õ疲劳、断裂的工程应用实例
õ材料与结构的疲劳、断裂性能与环境效应
õ材料力学行为与断裂、疲劳机理与物理模型
õ计算、实验、概率断裂、疲劳力学及其可靠性
õ微机械系统与结构中的疲劳、断裂
õ断裂与疲劳分析软件设计及数据库
õ疲劳断裂试验与测试新方法
õ抗疲劳及防断裂设计技术

征文办法及时间安排　1998年7月31日前寄出论文详细摘要或正式全文(包括: 作者姓名、职称、通讯地址、邮政编码、论文题目、研究目的、研究内容、研究方法及主要结论和意义)。摘要字数约1000字; 正文版面一般为4个页面的激光稿(请按会议规定版面格式排版具体向秘书组索取规定版式样件); 并请注明是否属于国家、部委的基金或攻关项目。

1998年8月将召开审稿会; 1998年9月中旬发录用通知; 1998年10月底交正式论文稿; 1998年12月10～14日召开本次会议, 地点: 昆明。

论文一式两份, 邮寄地址: 西安, 西北工业大学飞机系吕国志, 童小燕或科研处周宗锡
邮编: 710072　　电话: (029) 8493671
请信封注明"断裂疲劳会议"字样。

(李铁柏)