

基于 LTI 离散系统的卷积和解法

柴黎, 姚秀芳

(装备学院 光电装备系, 北京 101416)

摘要:结合实例讨论了求解卷积和的4种方法:解析法、图解法、不进位乘法和利用性质求解法。首先论述了每种方法的原理,然后通过实例说明了具体的求解过程,最后列表归纳了各种计算方法的特点,可对进一步开展线性系统的分析和研究提供计算经验和基础。

关键词:LTI 离散系统;卷积和;信号与系统

中图分类号:TN911

文献标识码:A

文章编号:1006-0707(2012)03-0093-03

线性系统分析的中心问题是系统输入与输出的关系。对于离散时不变线性系统,输入与输出的关系用输入对系统单位冲激响应的离散卷积和来表征,因此离散卷积和计算在线性系统的分析中占有非常重要的地位。

目前求解两序列卷积和的常用方法有解析法、图解法、不进位乘法和利用性质求解等4种方法,这些方法分别适用于不同的序列并存在各自的优缺点。

1 解析法

在 LTI 离散系统中,离散信号本身是一个序列,把激励信号分解为单位序列,如果系统的单位序列响应为已知,那么求得每个单位序列单独作用于系统的响应,把这些响应相加就可得到系统对于该激励信号的零状态响应,这个相加过程表现为求卷积和的过程^[1]。任意离散时间序列 $f(k)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} f(k) = & \cdots + f(-2)\delta(k+2) + f(-1)\delta(k+1) + \\ & f(0)\delta(k) + f(1)\delta(k-1) + \cdots + \\ & f(i)\delta(k-i) + \cdots = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i) \end{aligned} \quad (1)$$

如果系统的单位序列响应为 $h(k)$,那么,由线性系统的齐次性和时不变系统的移位不变性可知,系统对 $f(i)\delta(k-i)$ 的响应为 $f(i)h(k-i)$ 。根据系统的零状态线性性质,式(1)的序列 $f(k)$ 作用于系统所引起的零状态响应 $y_{zs}(k)$ 应为

$$\begin{aligned} y_{zs}(k) = & \cdots + f(-2)h(k+2) + f(-1)h(k+1) + \\ & f(0)h(k) + f(1)h(k-1) + \cdots + \\ & f(i)h(k-i) + \cdots = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i) \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)称为序列 $f(k)$ 和 $h(k)$ 的卷积和,即

$$y_{zs}(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i) = f(k) * h(k) \quad (3)$$

式(3)表明,LTI 系统对于任意激励的零状态响应是激励 $f(k)$ 与系统单位序列响应 $h(k)$ 的卷积和。那么,定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的2个序列 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 的卷积和为

$$f(k) = f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)f_2(k-i) \quad (4)$$

例1 计算卷积 $f(k) = a^k \varepsilon(k) * \varepsilon(k)$ 。

解:

$$f(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a^i \varepsilon(i) \varepsilon(k-i) = \left(\sum_{i=0}^k a^i \right) \varepsilon(k) = \frac{1-a^{k+1}}{1-a} \varepsilon(k)$$

这种利用定义求解卷积的方法称为解析法^[2]。

2 卷积和的图解法

在用式(4)计算卷积和时,正确选取参变量 k 的适用区域以及确定相应的求和上限、下限是十分关键的步骤,这可借助于作图的方法解决^[3]。

用作图法计算序列 $f_1(k)$ 与 $f_2(k)$ 的卷积和的步骤如下。

步骤1 换元, k 换为 i , 得 $f_1(i), f_2(i)$;

步骤2 反转平移,由 $f_2(i)$ 反转,得 $f_2(-i)$,右移 k ,得 $f_2(k-i)$;

步骤3 求乘积 $f_1(i)f_2(k-i)$;

步骤4 i 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 对乘积项求和。

例2 $f_1(k)$ 与 $f_2(k)$ 如图1所示,已知 $f(k) = f_1(k) * f_2(k)$,求 $f(2) = ?$ 。

$$\text{解: } f(2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)f_2(2-i)$$

步骤1 换元;

步骤2 $f_2(i)$ 反转, 得 $f_2(-i)$, 右移 2, 得 $f_2(2-i)$;

步骤3 求 $f_1(i)f_2(2-i)$;

步骤4 求和, 得 $f(2) = 4.5$, 如图 1 所示。

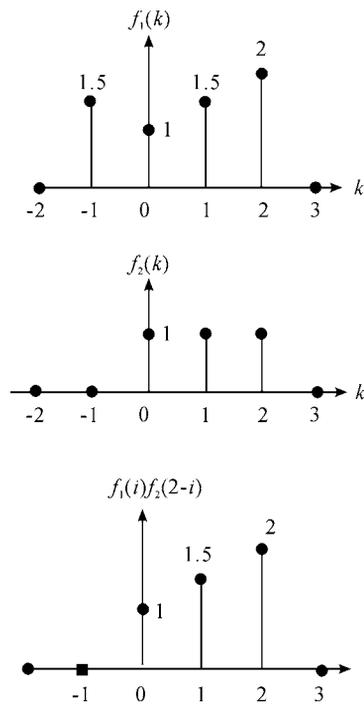


图 1 卷积求解过程

3 不进位乘法求卷积和

图解法的优点是整个计算过程通过绘图的方式展现出来, 思路清晰, 但计算过程非常麻烦, 且易出错。不进位乘法是在图解法的基础上发展而来的, 不需要画图, 但其原理与图解法一样, 需逐点计算, 最后相加得出结果。使用此方法需要概念及思路非常清楚, 将卷积和的计算转换成简单的代数运算, 既简单又不容易出错, 在短短几分钟之内就可得出结果, 可大大提高运算速度和准确性^[4]。

$$f(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)f_2(k-i) = \dots f_1(-1)f_2(k+1) + f_1(0)f_2(k) + f_1(1)f_2(k-1) + f_1(2)f_2(k-2) + \dots + f_1(i)f_2(k-i) + \dots \quad (5)$$

$f(k)$ = 所有两序列序号之和为 k 的那些样本乘积之和。

如 $k=2$ 时,

$$f(2) = \dots f_1(-1)f_2(3) + f_1(0)f_2(2) + f_1(1)f_2(1) + f_1(2)f_2(0) + \dots$$

例 3 $f_1(k) = \{0, 3, 4, 0, 6, 0\}$

$\uparrow k=0$

$$f_2(k) = \{0, 2, 1, 5, 0\}$$

$\uparrow k=1$

求 $f_1(k) * f_2(k)$ 。

解:

步骤 1 将 $f_1(k)$, $f_2(k)$ 分别列写在第 1 行与第 2 行;

步骤 2 将 $f_2(3)$ 与 $f_1(0)$, $f_1(1)$, $f_1(2)$, $f_1(3)$ 分别相乘, 得到输出序列 15, 20, 0, 30, 写在第 3 行;

步骤 3 将 $f_2(2)$ 与 $f_1(0)$, $f_1(1)$, $f_1(2)$, $f_1(3)$ 分别相乘, 得到输出序列 3, 4, 0, 6, 写在第 4 行;

步骤 4 将 $f_2(1)$ 与 $f_1(0)$, $f_1(1)$, $f_1(2)$, $f_1(3)$ 分别相乘, 得到输出序列 6, 8, 0, 12, 写在第 5 行;

步骤 5 将第 3 至第 5 行中各列求和, 得到 $f_1(k) * f_2(k)$ 。

解:

$$\begin{array}{rcccccc} & 3 & 4 & 0 & 6 & k=3 \leftarrow \\ \times & 2 & 1 & 5 & k=3 \leftarrow \\ \hline & 15 & 20 & 0 & 30 \\ & 3 & 4 & 0 & 6 \\ + & 6 & 8 & 0 & 12 \\ \hline & 6 & 11 & 19 & 32 & 6 & 30 \leftarrow \\ & & & & & & k=3+3=6 \end{array}$$

$$f(k) = \{\dots 0, 6, 11, 19, 32, 6, 30, 0, \dots\}$$

$\uparrow k=1$

可以看出, 利用此方法计算离散卷积和时, 不用反复平移反折序列, 也不用作图, 计算过程简捷, 计算速度快, 准确性高, 因此特别适于手工计算; 此外, 该计算过程也直观体现了离散卷积和的物理意义。

4 利用性质求解^[5]

1) 移位性质

若 $f_1(k) * f_2(k) = f(k)$, 则 $f_1(k-k_1) * f_2(k-k_2) = f(k-k_1-k_2)$

2) 与 2 个基本序列的卷积

$$f(k) * \delta(k) = f(k)$$

$$f(k) * \delta(k-k_0) = f(k-k_0)$$

$$f(k) * \varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^k f(i)$$

$$\varepsilon(k) * \varepsilon(k) = (k+1)\varepsilon(k)$$

例 4 $\varepsilon(k-1) * \delta(k+2) = \varepsilon(k+1)$

$$\varepsilon(k-1) * \varepsilon(k+2) = (k+2)\varepsilon(k+1)$$

$$(0.5)^k \varepsilon(k-2) * \varepsilon(k) = 0.5[1 - (0.5)^{k-1}] \varepsilon(k-2)$$

5 4 种方法比较

通过实例讨论了解析法、图解法、不进位乘法和利用性质求解等 4 种方法的原理, 下面列表比较每种方法的优缺点以及各

自适用的序列。

表1 卷积和解法比较

方法	描述	实例	优点
解析法	对容易求和的序列比较有效	指数序列	利用定义求解
图解法	求某点上的卷积值	K 为确定值	通过绘图的方式展现出来,思路清晰
不进位乘法	体现了离散卷积和的物理意义	适用于序列长度有限时	将卷积和的计算转换成了简单的代数运算,既简单又不容易出错
利用性质	常用移位性质	结合2个基本序列	比较灵活

6 结束语

卷积运算在信号与系统理论、控制理论和动态电路的分析

(责任编辑 鲁进)

(上接第92页)

3 结束语

弹药库房安全性是一个复杂的多因素、多变量、多层次的问题,用模糊神经网络方法对其进行评价,具有运算速度快,容错能力强,自学能力强等特点,同时也兼有处理不确定问题的能力,而且有成熟的Matlab神经网络工具箱作为软件支持比较容易实现。理论分析与算例的结果表明,该评价方法是可行的和有效的,可为弹药库房的安全管理提供一定的参考依据。

参考文献:

- [1] 范志和,朱华兵,严平,等. 弹药技术处理与安全技术[Z]. 武汉:海军工程学院,1998.
- [2] 孟令勇,王凤英. 弹药库房模糊数学安全评价方法研究[J]. 机械管理开发,2005(4):11-12.
- [3] Williamson O E. Market and Hierarchies[M]. New York: The Free Press,1975.
- [4] 郑恒,汪佩兰. 模糊神经网络在火工品生产系统安全评价中的应用[J]. 安全与环境学报,2004,4(增刊):159-162.
- [5] 张彤,肖南峰. 基于BP网络的数字识别方法[J]. 重庆理工大学学报:自然科学版,2010(3):43-47.

中具有重要意义。通过对卷积和的各种计算方法和特点的归纳,可使我们对卷积计算有一个更清楚的认识。使用者可以根据实际需要灵活运用。本文所做的工作也为进一步深入开展线性系统的分析和研究提供了计算经验和基础。

参考文献:

- [1] 吴大正. 信号与线性系统分析[M]. 北京:高等教育出版社,2005.
- [2] 郑君里,应启珩,杨为理. 信号与系统[M]. 2版. 北京:高等教育出版社,2000.
- [3] 唐向宏,岳恒立,郑雪峰. MATLAB及在电子信息类课程中的应用[M]. 北京:电子工业出版社,2006.
- [4] 程玲. 信号与系统分析中卷积积分的几种解法[J]. 气象教育与科技,2001(4):23-24.
- [5] 吴楚,李京清,王雪明,等. 信号与系统课程辅导[M]. 北京:清华大学出版社,2004.

- [6] 张彤,卢雯雯,肖南峰. 基于BP网络的人脸朝向识别方法[J]. 重庆理工大学学报:自然科学版,2010(6):61-65.
- [7] 郭丽,石航飞,陈志锦,等. BP神经网络在双伺服同步运动系统中的应用[J]. 兵工自动化,2011(1):44-46.
- [8] 高桂清,施旭鑫,李治,等. 基于BP神经网络的导弹作战方案评估方法[J]. 四川兵工学报,2011(11):6-9.
- [9] 王学智,刘罕杰,孙正民. 基于BP神经网络的装备维修人员保障能力评估[J]. 四川兵工学报,2010(4):4-6.
- [10] 杨纶标,高英仪. 模糊数学原理及应用[M]. 广州:华南理工大学出版社,2005.
- [11] 飞思科技产品研发中心. 神经网络理论与MATLAB7实现[M]. 北京:电子工业出版社,2005.
- [12] 孙群,刘国璧,程伟. 基于模糊神经网络的刘翔110m栏成绩预测[J]. 重庆科技学院学报:自然科学版,2011(2):135-138.
- [13] 黄勤,龚海清,刘金亨,等. 基于改进的遗传神经网络入侵检测系统[J]. 重庆理工大学学报:自然科学版,2010(5):83-86.
- [14] 郭兰平,俞建宁,张建刚,等. 改进RBF神经网络在城市公交车速时间序列预测中的应用[J]. 重庆理工大学学报:自然科学版,2010(12):60-66.

(责任编辑 刘舸)