

跨音速非定常流动的 Euler 方程隐式解

高正红

(西北工业大学 503 教研室, 西安, 710072)

AN IMPLICIT DIFFERENCE SCHEME OF EULER EQUATION FOR UNSTEADY TRANSONIC FLOW

Gao Zheng-hong

(Faculty 503 Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072)

摘要 在随时间变化的贴体坐标系中给出求解非定常 Euler 方程的连续通量分裂法。在此基础上建立了可用于跨音速非定常流动的 Euler 方程隐式求解法。采用特征向量变换, 可在保证原方程组离散化精度的条件下使计算大为简化。针对振动翼绕流特点建立了固连于物体的动坐标与固定坐标间的关系。数值计算在动坐标中进行, 既简化网格生成又保证在物面上满足边界条件。对 NACA64A-10 翼型绕 1/4 弦点做简谐俯仰振动的非定常气动力进行了计算, 给出了与实验结果基本相符的计算结果。此外, 还给出翼型做沉浮及同时进行沉浮与俯仰二自由度振动的非定常气动力的计算结果。

关键词 非定常流动, 通量分裂, Euler 方程, 跨音速流动

Abstract A continuous flux splitting method for unsteady Euler equations based on time-dependent body fitted coordinates is given. And with this method, an implicit difference equation for solving the unsteady transonic flow with Euler equations is established. In order to reduce the computer time for solving the block-matrix equations, the characteristic matrix transformation is used. This transformation does not change the discrete order of the equations but the CPU for solving the matrix equations can be reduced greatly. The numerical computation is made in the moving coordinates, so that not only the boundary conditions are kept on the real body surface, but the time-dependent body fitted coordinates are built in a very simple way as well. The NACA64A-10 airfoil which oscillates in pitching about its 1/4 chord point is computed. The computed results are in good agreement with the experiment data. Besides, some calculated results for the airfoil oscillating in heaving and both in heaving and pitching are also shown in the paper.

Key words unsteady flow, flux splitting, Euler equation, transonic flow

以往非定常流动的数值计算多在势流假设下进行。非定常 Euler 方程适用于有旋流动, 它能反映流动中熵的改变。用 Euler 方程求解跨音速非定常流动可较准确地确定流场中激波位置和强度的变化以及这些变化对流动的影响。

文献[1]给出了一种求解 Euler 方程改进的通量分裂法。该方法具有简单和无需增加任何人工粘性项的特点。然而它是在固定坐标系上建立的, 只能用于定常流动的计算。现将其推广到随时间变化的贴体网格, 以建立用于计算非定常流动的 Euler 方程隐式解法。

1990年3月4日收到, 1992年6月16日收到修改稿

1 基本方程及其通量分裂

在随时间变化的贴体坐标系 ($\xi = \xi(x, y, t)$, $\eta = \eta(x, y, t)$, $\tau = t$) 中, 二维非定常 Euler 方程的守恒式为

$$(\partial Q / \partial \tau) + (\partial F / \partial \xi) + (\partial G / \partial \eta) = 0$$

其中 $Q = q / J$, $F = \{\xi_t q + \xi_x f + \xi_y g\} / J$, $G = \{\eta_t q + \eta_x f + \eta_y g\} / J$, J 是坐标变换的 Jacobi 式^[1]。坐标变换存在下述几何关系

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= J y_\eta, & \xi_y &= -J x_\eta, & \xi_t &= -x_\tau \xi_x - y_\tau \xi_y \\ \eta_x &= J y_\xi, & \eta_y &= J x_\xi, & \eta_t &= -x_\tau \eta_x - y_\tau \eta_y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在该坐标系下, 方程 (1) 的通量可以写成

$$F = A Q, \quad G = B Q \quad (3)$$

其中 A 和 B 分别是 F 和 G 的 Jacobi 矩阵

$$A = \partial F / \partial Q = L_\xi^{-1} \Lambda_A L_\xi, \quad B = \partial G / \partial Q = L_\eta^{-1} \Lambda_B L_\eta \quad (4)$$

Λ_A 和 Λ_B 分别是以 A 和 B 的特征值 λ_{A_i} 和 λ_{B_i} ($i=1, 2, 3, 4$) 为元素的对角矩阵, L_ξ 和 L_η 是相应的特征向量矩阵^[2]。

为建立自身稳定的离散化方程需将通量分裂成两部分。根据文献[1]的分析, 可先将 $\lambda_{A(B)_i}$ 按下式分裂成正负两部分

$$\hat{\lambda}_{A(B)_i}^+ = \begin{cases} 0, & \hat{M}_k \leq -\varepsilon \\ (\hat{M}_k + \varepsilon)^2 / 4\varepsilon, & |\hat{M}_k| < \varepsilon \\ \hat{M}_k, & \hat{M}_k \geq \varepsilon \end{cases}, \quad \hat{\lambda}_{A(B)_i}^- = \begin{cases} \hat{M}_k, & \hat{M}_k \leq -\varepsilon \\ -(\hat{M}_k - \varepsilon)^2 / 4\varepsilon, & |\hat{M}_k| < \varepsilon \\ 0, & \hat{M}_k \geq \varepsilon \end{cases} \quad (5)$$

其中 $i=1$ 时 $\hat{M}_k = M_k - 1$, $i=2$ 或 3 时 $\hat{M}_k = M_k$, $i=4$ 时 $\hat{M}_k = M_k + 1$ 。

$M_k = (k_x + k_y u + k_y v) / a \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, a 为音速。在以上表达式中, 对于 λ_A , $k = \xi$; 对于 λ_B , $k = \eta$ 。这样, 分裂后的特征值为

$$\lambda_{A(B)_i}^\pm = \hat{\lambda}_{A(B)_i}^\pm a \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (6)$$

采用与文献[1]相同的方法便可将通量 F 和 G 分裂为满足要求的两部分^[2]。

2 数值方法

对于通量分裂后的 Euler 方程

$$(\partial Q / \partial \tau) + (\partial F^+ / \partial \xi) + (\partial F^- / \partial \xi) + (\partial G^+ / \partial \eta) + (\partial G^- / \partial \eta) = 0 \quad (7)$$

保证时间二阶精度 $O(\Delta \tau^2)$ 的半离散化隐式方程为

$$\left\{ I + \frac{\Delta \tau}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial F^+}{\partial Q} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial F^-}{\partial Q} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial G^+}{\partial Q} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial G^-}{\partial Q} \right) \right] \right\} \Delta Q^n$$

$$= -\Delta\tau \left[\frac{\partial F^+}{\partial \xi} + \frac{\partial F^-}{\partial \xi} + \frac{\partial G^+}{\partial \eta} + \frac{\partial G^-}{\partial \eta} \right] \quad (8)$$

其中 $\Delta Q^n = Q^{n+1} - Q^n$.

若以网格中点为计算点并取 $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$, 利用 MUSCL 型差分则有

$$\left. \begin{aligned} \delta_\xi^\pm F_{ij}^\pm &= [F^\pm(q_{i+1/2j}^\pm, q_{i+1/2j}^\pm) - F^\pm(q_{i-1/2j}^\pm, q_{i-1/2j}^\pm)] \\ \delta_\eta^\pm G_{ij}^\pm &= [G^\pm(q_{ij+1/2}^\pm, h_{ij+1/2j}^\pm) - G^\pm(q_{ij-1/2}^\pm, h_{ij-1/2j}^\pm)] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} q_{i+1/2j}^- &= q_{ij} + \varphi_{ij}^-(q_{ij} - q_{i-1j})/2 + \psi_{ij}^c(q_{i+1j} - q_{ij})/2 \\ q_{i+1/2j}^+ &= q_{i+1j} + \varphi_{ij}^+(q_{i+2j} - q_{i+1j})/2 + \psi_{ij}^c(q_{i+1j} - q_{ij})/2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

一阶迎风格式, $\varphi^\pm = \psi^c = 0$; 二阶迎风格式, $\varphi^\pm = 1, \psi^c = 0$; 二阶中心格式, $\varphi^\pm = 0, \psi^c = 1$. $q_{i\pm 1/2j}, h_{ij\pm 1/2}$ 是由贴体坐标引入的几何参量, 其值由所在网格线上计算. $q_{i-1/2j}^+, q_{ij+1/2}^+$ 和 $q_{ij-1/2}^+$ 也有与 (10) 式类似的表达式.

为建立空间二阶精度稳定的离散化方程, 方程组 (8) 右端项差分采用二阶迎风格式, 左端项差分只需取一阶迎风格式. 由 Beam-Warming 的因式分解法可建立二阶精度的两步隐式有限体积方程

$$\left\{ I + \frac{\Delta\tau}{2} \left[\delta_\xi^- \left(\frac{\partial F^+}{\partial Q} \right) + \delta_\xi^+ \left(\frac{\partial F^-}{\partial Q} \right) \right] \right\}_{ij} \Delta W^n = -\Delta\tau \left(\delta_\xi^- F^+ + \delta_\xi^+ F^- + \delta_\eta^- G^+ + \delta_\eta^+ G^- \right)_{ij} \quad (11)$$

$$\left\{ I + \frac{\Delta\tau}{2} \left[\delta_\eta^- \left(\frac{\partial G^+}{\partial Q} \right) + \delta_\eta^+ \left(\frac{\partial G^-}{\partial Q} \right) \right] \right\}_{ij} \Delta Q^n = \Delta W_{ij} \quad (12)$$

这是两组三角块矩阵方程组. 以方程 (11) 为例, 为简化计算可将其写为

$$\left\{ \left[I + \frac{\Delta\tau}{4} \left(\frac{\partial F}{\partial Q_{i+1j}} - \frac{\partial F}{\partial Q_{i-1j}} \right) \right] - \frac{\Delta\tau}{4} \left[\left(\frac{\partial F^+}{\partial Q_{i+1j}} - 2\frac{\partial F^+}{\partial Q_{ij}} + \frac{\partial F^+}{\partial Q_{i-1j}} \right) - \left(\frac{\partial F^-}{\partial Q_{i+1j}} - 2\frac{\partial F^-}{\partial Q_{ij}} + \frac{\partial F^-}{\partial Q_{i-1j}} \right) \right] \right\} \Delta W^n = \text{RHS}(11) \quad (13)$$

其左端项后一部分为高于二阶的差分, 设

$$\left(\frac{\partial F^\pm}{\partial Q_{i+1j}} - 2\frac{\partial F^\pm}{\partial Q_{ij}} + \frac{\partial F^\pm}{\partial Q_{i-1j}} \right) \Delta W^n = \hat{\delta}_A A_{ij}^\pm (\Delta W_{i+1j}^n - 2\Delta W_{ij}^n + \Delta W_{i-1j}^n)$$

在保证二阶精度前提下, 可取

$$\partial F / \partial Q_{i+1j} \approx A_{ij}^+, \quad \partial F / \partial Q_{i-1j} \approx A_{ij}^-$$

于是方程组 (13) 可写成

$$\Delta W_{ij}^n + (\Delta\tau/4)(\Delta W_{i+1j}^n - \Delta W_{i-1j}^n) - (\Delta\tau/4)\hat{\delta}_A (A_{ij}^+ - A_{ij}^-)(\Delta W_{i+1j}^n - 2\Delta W_{i-1j}^n) = \text{RHS}(11) \quad (14)$$

令 $\delta_A = (\hat{\delta}_A - 1) / 2$, $\alpha = \Delta\tau / 2$ 。将方程两端同时左乘 $L_{\xi_{ij}}^n$, 在保证二阶精度的条件下, 方程组(14)变为

$$\alpha \Lambda_{A_{ij}}^- \Delta \hat{W}_{i+1,j}^n + [I + \alpha(\Lambda_{A_{ij}}^+ - \Lambda_{A_{ij}}^-)] \Delta \hat{W}_{ij}^n - \alpha \Lambda_{A_{ij}}^+ \Delta \hat{W}_{i-1,j}^n - \alpha \delta_A (\Lambda_{A_{ij}}^+ - \Lambda_{A_{ij}}^-) [\Delta \hat{W}_{i+1,j}^n - 2\Delta \hat{W}_{ij}^n + \Delta \hat{W}_{i-1,j}^n] = L_{\xi_{ij}}^n [\text{RHS}(11)] \quad (15)$$

$$\Delta W^n = L_{\xi}^{-1} (\Delta \hat{W}^n) \quad (16)$$

同理, 方程组(12)亦可变为

$$\alpha \Lambda_{B_{ij}}^- \Delta \hat{Q}_{i,j+1}^n + [I + \alpha(\Lambda_{B_{ij}}^+ - \Lambda_{B_{ij}}^-)] \Delta \hat{Q}_{ij}^n - \alpha \Lambda_{B_{ij}}^+ \Delta \hat{Q}_{i,j-1}^n - \alpha \delta_B (\Lambda_{B_{ij}}^+ - \Lambda_{B_{ij}}^-) [\Delta \hat{Q}_{i,j+1}^n - 2\Delta \hat{Q}_{ij}^n + \Delta \hat{Q}_{i,j-1}^n] = L_{\eta_{ij}}^n [\Delta W_{ij}^n] \quad (17)$$

$$\Delta Q^n = L_{\eta}^{-1} (\Delta \hat{Q}^n) \quad (18)$$

由上述特征变换, 可在二阶精度前提下将块矩阵方程转换为代数方程组求解。 δ_A 和 δ_B 是经验参数, $\delta_{A(B)} = 0.1 \sim 0.3$, 与所取时间步长有关。该值对计算结果的影响是三阶小量。

3 网格生成、边界条件和初始条件

根据文献[3]提供的网格生成技术, 以翼型弦线中点为原点生成相应的贴体网格

$$\xi = \xi(x_0, y_0), \quad \eta = \eta(x_0, y_0) \quad (19)$$

通常翼型的振动可分解为沉浮振动和绕翼型某点的俯仰振动。设翼型做俯仰振动(转动中心距弦线中点距离为 a) 的迎角变化规律为

$$\alpha = \alpha_0 f(t) \quad (20)$$

做沉浮振动(设 h 为沿 y 负方向的位移)的规律为

$$h = -h_0 g(t) \quad (21)$$

若将所生成的贴体网格固连于翼型, 通过固定坐标与翼型上动坐标间的关系, 可得到任意时刻的贴体坐标

$$x = (x_0 + a) \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - a, \quad y = -(x_0 + a) \sin \alpha + y_0 \cos \alpha - h \quad (22)$$

以时间 τ 为变量, 分别对上式求导即可得到任意时刻坐标随时间的变化率

$$\left. \begin{aligned} x_{\tau} &= [-(x_0 + a) \sin \alpha + y_0 \cos \alpha] d\alpha / d\tau, \\ y_{\tau} &= -[(x_0 + a) \cos \alpha + y_0 \sin \alpha] d\alpha / d\tau - dh / d\tau \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

只需一次生成贴体网格, 即可得到随时间变化的贴体坐标及其随时间的变化速率。

由无粘流的特点, 绕振动物体的流动中, 流体沿物面法线方向的速度应等于物体振动速度沿该方向的分量 V_{bn} , 即在物面上

$$(\vec{V} \cdot \vec{n})_{\text{body}} = V_{bn} \quad (24)$$

其中 \bar{n} 是物体外法线方向的单位矢量。 V_{bn} 是由物体振动的物理条件确定的。引入贴体坐标变换后

$$V_n = (x_\tau y_\xi - y_\tau x_\xi - y_\xi u + x_\xi v)_{\text{body}} = 0 \quad (25)$$

代入 Euler 方程, 则在物面上的通量为

$$\begin{aligned} [G]_{\text{body}} &= [\rho V_n, \rho u V_n - y_\xi p, \rho v V_n + x_\xi p, (e + p)V_n - zp]_{\text{body}}^T \\ &= [0, -y_\xi p, x_\xi p, zp]_{\text{body}}^T \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $z = x_\tau y_\xi - y_\tau x_\xi$ 。由此可知, 只要给出物体表面的压力值就可确定相应的通量。物面压力可由向流场内两点插值的方法计算。

此外在求解隐式方程组 (17) 时, 需首先确定 $\Delta Q_{i,i-1}^n$ 。根据文献[4]可将其近似处理为 $\Delta \hat{Q}_{i,i-1}^n = 0$ 。

随时间变化贴体网格上的远场边界 ($\eta = \text{cont}$) 条件利用无反射条件由非守恒型 Euler 方程导出的边界条件确定^[5]

$$S_i \partial \tilde{q} / \partial \tau = 0 \quad (\lambda_i < 0), \quad S_i \partial \tilde{q} / \partial \tau + L_i = 0, \quad (\lambda_i > 0) \quad (27)$$

其中 $\tilde{q} = [\rho, u, v, p]^T$, S_i 是确定扰动波沿外边界法向传播的特征矩阵, L_i 是与 S_i 有关的矩阵^[5]。 \tilde{q} 也由文献[5]的方法确定。

由于远场边界以外的流动 ($j > N$) 被视为无穷远流, 即 $\Delta Q_{i,N+1}^n = 0$, 因此求解方程组 (17) 时可取 $\Delta \hat{Q}_{i,N+1}^n = 0$ 。

进行算例计算时, 针对翼型做等幅简谐振动的特点, 取翼型在相应状态下跨音速定常解做为非定常 Euler 方程的初始条件。经过 2~3 个周期的迭代运算即可呈现稳定的周期性。这时便可得到真实的物理解。

4 计算结果

对 NACA64A-10 翼型在来流 Mach 数 $Ma_\infty = 0.802$ 的气流中, 以初始迎角 $\alpha_\infty = 0^\circ$ 进行沉浮振动, 绕 1/4 弦点做俯仰振动以及同时进行上述两自由度振动等情况作了计算。计算均在 128×32 的 O 型网格上完成。通常物面非定常压力系数可写成

$$C_p(x, t) = C_{p_m}(x) + a_0 \sum_{i=1}^N [C_{p_i}^R(x) \sin(n2kt) + C_{p_i}^I \cos(n2kt)] \quad (28)$$

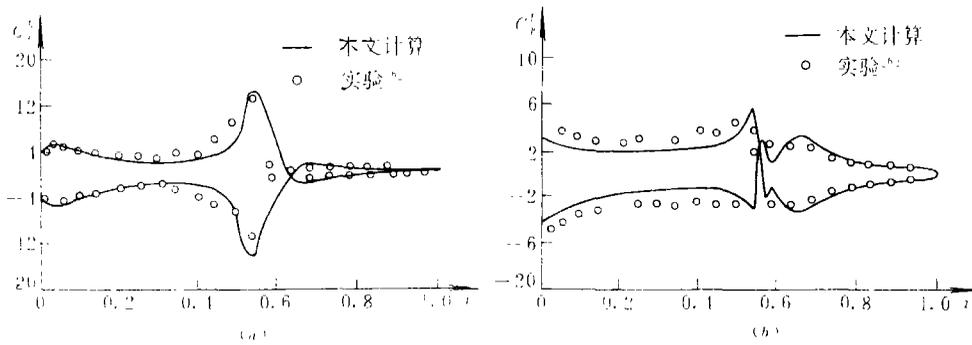


图 1 俯仰振动时压力系数沿翼型表面的分布 ($Ma_\infty=0.802, \alpha_\infty=0^\circ, \alpha_p=1^\circ, k_p=0.2$)

(a) 实部 (b) 虚部

其中 a_0 是振幅, $k = \omega c / 2V_\infty$ 为振动折算频率, ω 为振动频率。计算结果以压力系数第一阶近似的实部 C_{p1}^R 和虚部 C_{p1}^I 在翼面上分布的形式给出。

$$\left. \begin{aligned} C_{p1}^R &= -[C_p(2kt = 3\pi/2) - C_p(2kt = \pi/2)] / 2a_0 \\ C_{p1}^I &= -[C_p(2kt = \pi) - C_p(2kt = 0)] / 2a_0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

4.1 翼型绕 1/4 弦点做俯仰振动情况

这时(22)式中的 $a = -0.25$, 迎角的振动规律为 $\alpha = \alpha_p \sin(2k_p t)$ 图 1 给出振幅、 $\alpha_p = 1^\circ$, 折算频率 $k_p = 0.2$ 情况的计算与实验^[6]结果。可看出两者符合良好。图 2 给出升力和力矩系数随时间变化过程 (图中 $\theta = 2kt - 4\pi$)。图 3 给出 $\alpha_p = 4^\circ, k_p = 1.57$ 的计算结果。

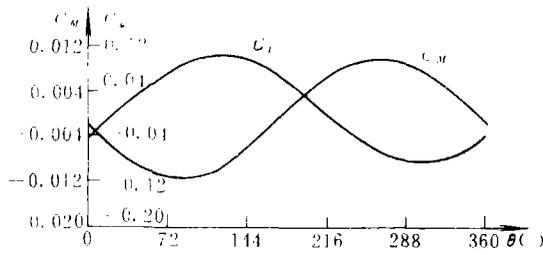


图 2 俯仰振动时升力、力矩系数随时间的变化 ($Ma_\infty=0.802, \alpha_\infty=0^\circ, \alpha_p=1^\circ, k_p=0.2$)

4.2 沉浮振动情况

这时翼型振动规律为 $h = -h_0 \sin(\alpha k_h t)$, 图 4 给出振幅 $h_0 = 0.03$, 折算频率 $k_h = 1.57$ 的计算结果。

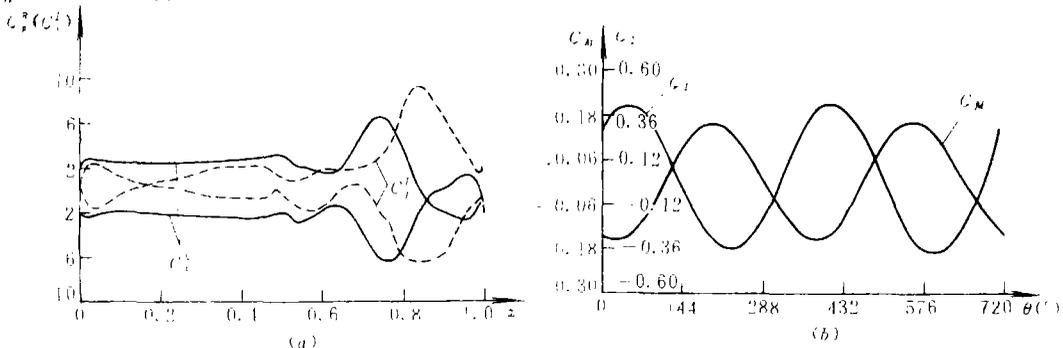


图 3 俯仰振动时计算结果 ($Ma_\infty=0.802, \alpha_\infty=0^\circ, \alpha_p=4^\circ, k_p=1.57$)

(a) 翼面压力系数分布 (b) 升力、力矩系数随时间的变化

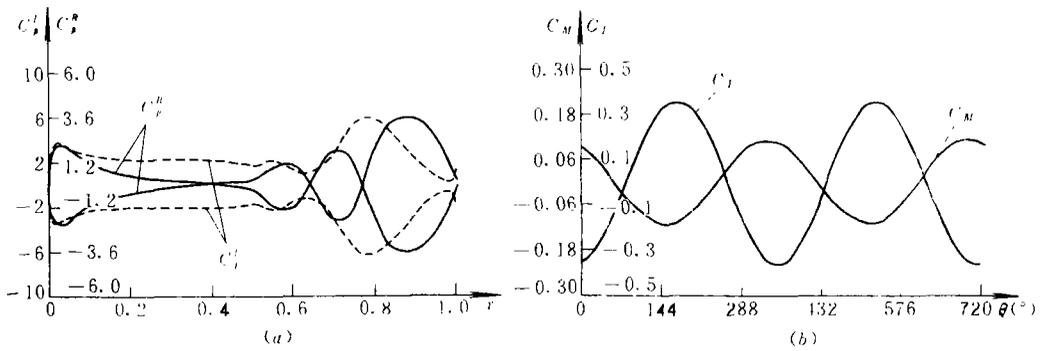


图 4 沉浮振动时计算结果 ($Ma_\infty=0.802$, $\alpha_\infty=0^\circ$, $h_0=0.03^\circ$, $k_h=1.57$)

(a) 翼面压力系数分布 (b) 升力、力矩系数随时间的变化

4.3 沉浮俯仰复合振动情况

图 5 给出 $k_p=1.57$, $k_h=1.57$, $h_0=0.03$ 和 $\alpha_p=4^\circ$ 时的计算结果。

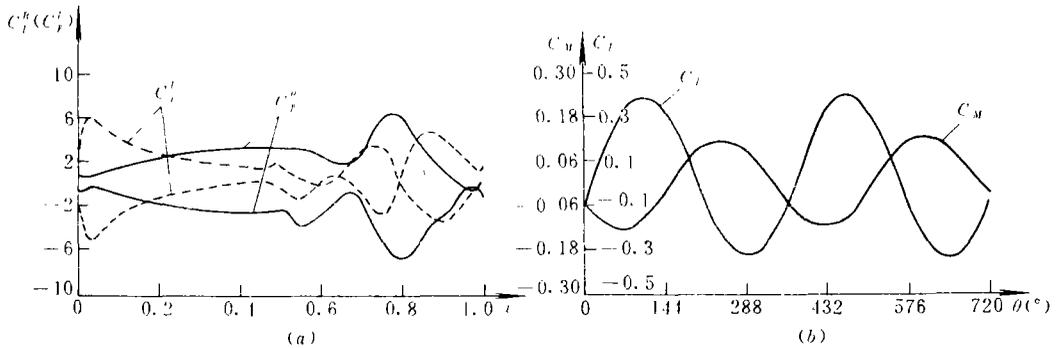


图 5 复合振动情况的计算结果 ($Ma_\infty=0.802$, $\alpha_\infty=0^\circ$, $k_h=k_p=1.57$, $\alpha_p=4^\circ$, $h_0=0.03$)

(a) 翼面压力系数分布 (b) 升力、力矩系数随时间的变化

参 考 文 献

- 1 高正红, 刘千刚. 一种求解欧拉方程改进的通量分裂方法. 空气动力学学报, 1992, 10(3): 321~331
- 2 高正红. 跨音速定常与非定常流动的 Euler 方程解. 西北工业大学博士论文, 1989.
- 3 高正红. 用多重网格法生成随时间变化的贴体网格. 航空学报, 1988, 9(3): A184~A187
- 4 Lerat A, Sides J. Calcul Numerique Deconlements Transoniques Instationaries. AGARD-CP-226, 15-1-15-10, 1977.
- 5 Thompson K W. Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic System. J Comp Phys, 1987, 68:1~24
- 6 Davis S S, Malcolm G N. Experimental Unsteady Aerodynamics of Conventional and Supercritical Airfoils. NASA TM 81221, 1981.