

跨音速大迎角 Euler 方程数值分析

蔡晋生 李凤蔚 罗时钧

(西北工业大学 503 教研室, 西安, 710072)

A NUMERICAL SOLUTION OF TRANSONIC EULER EQUATION AT HIGH ANGLES OF ATTACK

Cai Jin-sheng, Li Feng-wei, Luo Shi-jun

(Faculty 503, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072)

摘要 应用有限体积法离散三维 Euler 方程, 选用三步显式格式进行时间推进求解; 并通过当地时间步长、残值光顺、焓修正等方法加速收敛。对一维波动方程的 von Neumann 稳定性分析说明这种三步格式的最大 Courant 数是 2。对三角翼跨音速大迎角流动的数值分析表明文中的三步格式及焓修正方法优于人们经常采用的四步、五步格式以及焓阻尼技术。

关键词 跨音速流, 大迎角空气动力学, Euler 方程

Abstract By finite volume method for spatial discretization and three-stage explicit time-stepping scheme, a numerical solution of three-dimensional Euler equations is presented in this paper. The technique of local time stepping, residual averaging, enthalpy correcting, etc. is used for accelerating convergence. The analysis of von Neumann stability of one-dimensional wave equation indicates that the maximum Courant Number of the above-mentioned three-stage scheme is 2. The calculation of flows around delta wings at high angles of attack shows that the three-stage scheme and enthalpy correction method presented in this paper are better than usually used four or five-stage scheme and enthalpy damping technique. The calculated results show that the numerical method used in this paper can give a good simulation of transonic vortex flow at high angles of attack.

Key words transonic flow, high angles of attack aerodynamics, Euler equations

新一代飞行器(战斗机、导弹等)对机动性要求不断增加, 大迎角飞行已成为攻击和防御机动飞行的一部分。为适应这种机动性要求采用了细长机翼。这种机翼即使在迎角较小时也会在前缘产生分离, 形成纵向脱体涡。脱体涡对气动特性影响很大。通过对这种涡系的控制和利用, 体现了空气动力学设计思想从附体流型到脱体流型的变革。正如 Helmholtz^[1]所述, 无粘流中分离涡可在任何具有尖锐边缘的物体上发生。80 年代已成功通过求解 Euler 方程自动地形成前缘分离涡。大迎角流动中可能发生涡破裂, 文献[2]认为涡破裂基本上决定于压力梯度, 几乎与粘性无关。因此, 涡破裂过程可通过 Euler 方程模拟。虽然 N-S 方程数值分析使脱体涡计算有了本质性的发展, 但在我国现有的计算机条件下, 还不能很好地开展这方面的工作。Euler 方程的数值分析已有很多成熟的方法, 例如 Jameson 有限体积法^[3]等。对大迎角绕流可能得到较好的模拟效果。

1992 年 1 月 10 日收到, 1992 年 8 月 3 日收到修改稿

1 空间离散方法

将积分形式的Euler方程应用到网格单元 $V_{i,j,k}$ 上,有

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{i,j,k}} \bar{U} dV + \int_{S_{i,j,k}} \hat{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1)$$

其中

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \rho u & \rho v & \rho w \\ \rho u^2 + p & \rho uv & \rho uw \\ \rho uv & \rho v^2 + p & \rho vw \\ \rho uw & \rho vw & \rho w^2 + p \\ \rho uH & \rho vH & \rho wH \end{bmatrix}$$

$$p = (\gamma - 1)\rho[E - (u^2 + v^2 + w^2)/2]$$

ρ , u , v , w , p , E 和 H 分别为流体的密度, 速度分量, 压力, 总能和总焓。 $S_{i,j,k}$ 由相邻的六个网格面组成, 是网格单元 $V_{i,j,k}$ 的边界。以网格单元中心的物理量 $\bar{U}_{i,j,k}$, $\hat{\mathbf{F}}_{i,j,k}$ 为未知量, 对方程(1)的积分项作一阶代数近似, 得到离散形成的 Euler 方程

$$(d/dt)(V_{i,j,k} \bar{U}_{i,j,k}) + \bar{Q}_{i,j,k} = 0 \quad (2)$$

其中 $\bar{Q}_{i,j,k}$ 是流出网格单元 $V_{i,j,k}$ 的物理通量。方程(2)加入二阶和四阶人工粘性项^[4]后可改写为

$$(d/dt)(V_{i,j,k} \bar{U}_{i,j,k}) + \bar{Q}_{i,j,k} - \bar{D}_{i,j,k} = 0 \quad (3)$$

其中 $\bar{D}_{i,j,k}$ 是耗散通量, $\bar{D}_{i,j,k} = D \bar{U}_{i,j,k}$, D 是耗散算子。

$$D = \delta_i^- [\alpha_{i,j,k} (\varepsilon_{i,j,k}^{(2i)} \delta_i^+ - \varepsilon_{i,j,k}^{(4i)} \delta_i^{+3})] + \delta_i^- [\alpha_{i,j,k} (\varepsilon_{i,j,k}^{(2j)} \delta_j^+ - \varepsilon_{i,j,k}^{(4j)} \delta_j^{+3})] \\ + \delta_k^- [\alpha_{i,j,k} (\varepsilon_{i,j,k}^{(2k)} \delta_k^+ - \varepsilon_{i,j,k}^{(4k)} \delta_k^{+3})]$$

δ^+ 与 δ^- 分别表示一阶前差与后差算子, δ^{+3} 是三阶前差算子, $\alpha_{i,j,k}$ 是耗散通量的权因子, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(4)}$ 是与流场梯度相关的自适应参数。

2 时间推进方法

方程(3)的一种三步显式时间推进格式(略去下标 i, j, k)为

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}^{(0)} = \bar{U}^{(n)}, \quad \bar{U}^{(1)} = \bar{U}^{(0)} - \alpha_1 \Delta t \bar{P}^{(0)}, \quad \bar{U}^{(2)} = \bar{U}^{(0)} - \alpha_3 \Delta t \bar{P}^{(1)} \\ L(\bar{U}^{(3)} - \bar{U}^{(0)}) = -\alpha_3 \Delta t \bar{P}^{(2)}, \quad \bar{U}^{(n+1)} = \bar{U}^{(3)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 1$, \bar{P} 称为方程 (3) 的残值, L 是三维光顺算子, 它们分别表示为

$$\bar{P}^{(i)} = (1/V)(\bar{Q}^{(i)} - \bar{D}^{(0)}) \quad i=0, 1, 2$$

$$L = (1 - \varepsilon_i \delta_i^2)(1 - \varepsilon_j \delta_j^2)(1 - \varepsilon_k \delta_k^2)$$

为加速收敛 Δt 取当地时间步长, 计算中其形式为

$$\Delta t_{i,j,k} = \lambda V_{i,j,k} [6\max(q_{i,j,k}, a_{i,j,k})S_m]^{-1}$$

其中 $\lambda = \Delta t / \Delta x$ 是格式的 Courant 数, q 、 a 分别为网格单元中心的速度和音速, S_m 是六个网格面中最大网格面的面积。

还采用了如下的焓修正方法, 即以修正后的焓 H^* 代替方程 (1) 中的焓 H

$$H^* = (1 - \sigma)H + \sigma H_\infty \quad (6)$$

其中 σ 为焓修正系数, $0 \leq \sigma \leq 1$ 。

3 稳定性分析

考虑一维波动方程

$$\partial u / \partial t + \partial u / \partial x = 0 \quad (7)$$

用中心差分进行空间离散

$$du_j / dt + Q_j = 0, \quad Q_j = (\lambda / 2\Delta t)(u_{j+1} - u_{j-1}) \quad (8)$$

将三步格式 (4) 式用于方程 (8) (不考虑残值光顺), 并设附加小扰动的第 k 个 Fourier 波的形式是

$$u_j^{(n)} = A^{(n)} \exp[ik(j\Delta x)] \quad (9)$$

因此

$$Q_j^{(n)} = -(1/\Delta t)iI_z u_j^{(n)} \quad (10)$$

其中 $I_z = -\lambda \sin\theta$, $\theta = kx$ 是相位角。将 (9) 式和 (10) 式代入方程 (8) 的三步格式得

$$u_j^{(n+1)} = F(\theta)u_j^{(n)}, \quad F(\theta) = (1 - I_z^2/2) + iI_z(1 - I_z^2/4) \quad (11)$$

$F(\theta)$ 为增长因子, 由稳定性条件 $|F(\theta)| \leq 1$ 得

$$|\lambda \sin\theta| \leq 2 \quad (12)$$

要求 (12) 式对任意波数 k 都成立, 求得格式的最大 Courant 数 $\lambda = 2$ 。从上述分析可发现 α_1 、 α_2 和 α_3 取不同值时, 格式的最大 Courant 数不同。上述分析未考虑残值光顺影响。实际上, 残值光顺增大了格式的依赖区域, 从而可增强格式的稳定性。

4 网格生成与算例分析

对钝前缘切尖三角翼 (图 1) 大迎角跨音速流场进行了计算。三角翼前缘后掠角

为 65° ，梢根比为 0.15，顺流翼型 y 坐标为

$$\bar{y} = \pm \begin{cases} 0.1183\sqrt{\bar{x}} - 0.210\bar{x} + 0.3501\bar{x}^2 - 0.3406\bar{x}^3 & 0 \leq \bar{x} \leq 0.4 \\ \text{NACA 61A005} & 0.4 < \bar{x} \leq 1.0 \end{cases}$$

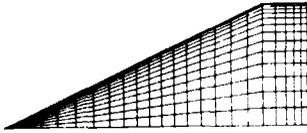


图 1 三角翼翼面网格分布

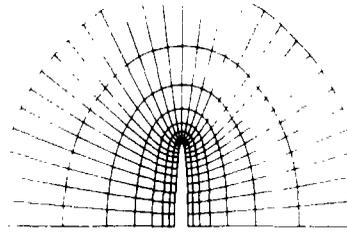


图 2 $x-c=0.6$ 截面“O”型网格(半场)

4.1 网格生成

网格拓扑结构为“H-O”型。在垂直于弦向坐标轴 (x 轴) 的平面内由以下方法生成贴体且与边界正交的网格。设 A 、 B 是一条网格线的边界点 (A 在翼面上, B 在远场边界上), 取多项式插值函数。

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\xi + \mathbf{a}_2\xi^2 + \mathbf{a}_3\xi^3 \quad (14)$$

其中 \mathbf{r} 是节点位置向量, \mathbf{a}_0 、 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 和 \mathbf{a}_3 为待定参数。令 $\xi = 0$ 时 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A$, $\partial \mathbf{r} / \partial \xi = \mathbf{n}_A$; $\xi = 1$ 时 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B$, $\partial \mathbf{r} / \partial \xi = \mathbf{n}_B$, 这样就可定出 (15) 式中所有待定参数。取 $\xi = i/N (i=0, 1, 2, \dots, N)$ 时, 可求出网格线 AB 上的节点分布; 由导数 $\partial \mathbf{r} / \partial \xi$ 的几何意义知, 当 \mathbf{n}_A 和 \mathbf{n}_B 是 A 和 B 点上流场边界的法向时, 网格线 AB 与边界正交; 调整 $|\mathbf{n}_A|$ 和 $|\mathbf{n}_B|$ 的大小可控制网格节点在 A 和 B 点附近的密度 (图 2)。同样这种方法还可用来生成简单外形的三维贴体与边界正交网格^[4]。

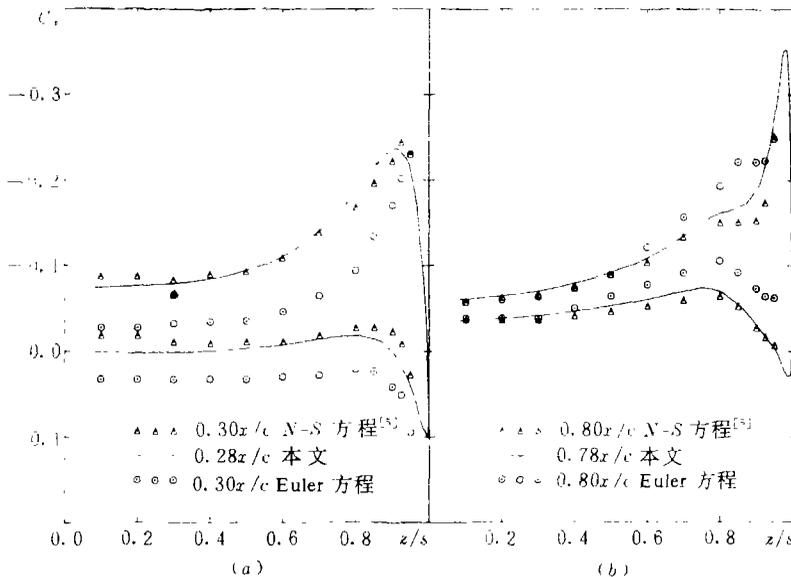


图 3 $Ma_\infty=0.85$, $\alpha=2^\circ$ 时压力分布

4.2 算例分析

图 3 是 $Ma_x = 0.85$, 攻角 $\alpha = 2^\circ$ 时的压力分布计算结果。本文结果与 N-S 方程结果^[5]相符。图 4 是 $Ma_\infty = 0.85$, 攻角 $\alpha = 20^\circ$ 时的压力分布, 其中实验结果参见文献 [6]。由横向流动分布图 (图 5) 可明显地看到分离涡及涡核位置。图 6 是 $Ma_\infty = 0.85$, 攻角 $\alpha = 24^\circ$ 时的压力分布。由实验知道攻角 $\alpha > 21^\circ$ 时流场中发生涡破裂。因此, 图 6 中压力分布在翼后部有较大差异正反映了粘性影响。算例是在 VAX320 机 (3×10^6 次/s) 上进行的, 完成一个迎角的计算需 CPU 时间 120~180min。

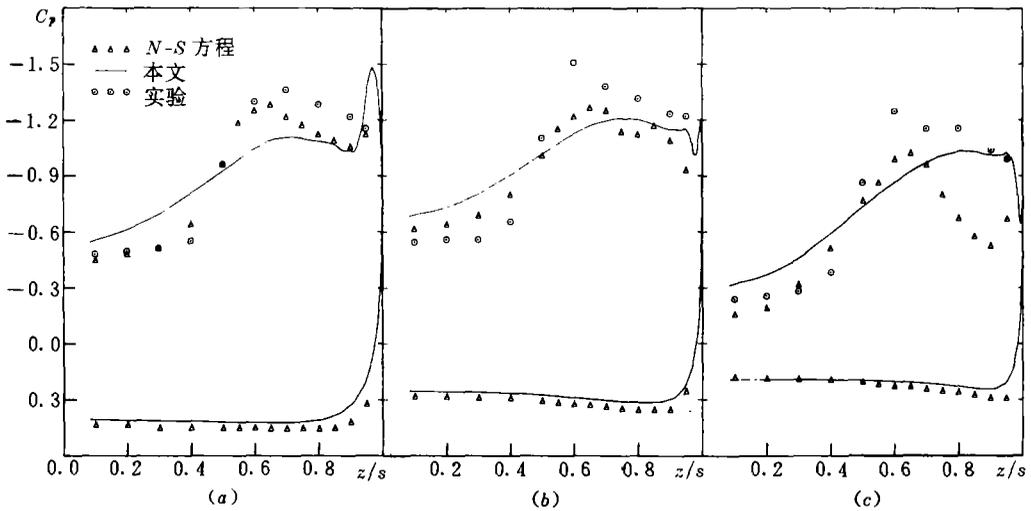


图 4 $Ma_\infty = 0.85, \alpha = 20^\circ$ 时压力分布 (a) $x/c = 0.3$ (b) $x/c = 0.6$ (c) $x/c = 0.8$

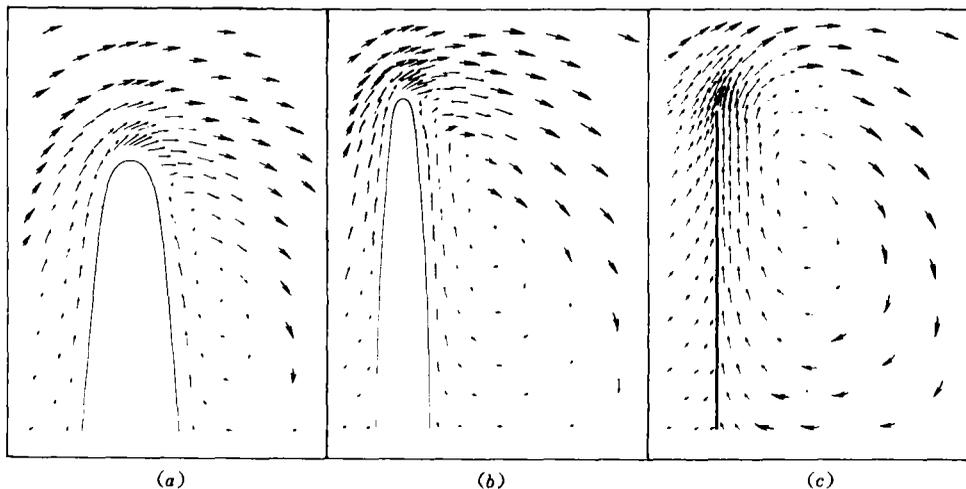


图 5 $Ma_\infty = 0.85, \alpha = 20^\circ$ 横向速度矢量场 (a) $x/c = 0.3$ (b) $x/c = 0.58$ (c) $x/c = 0.98$

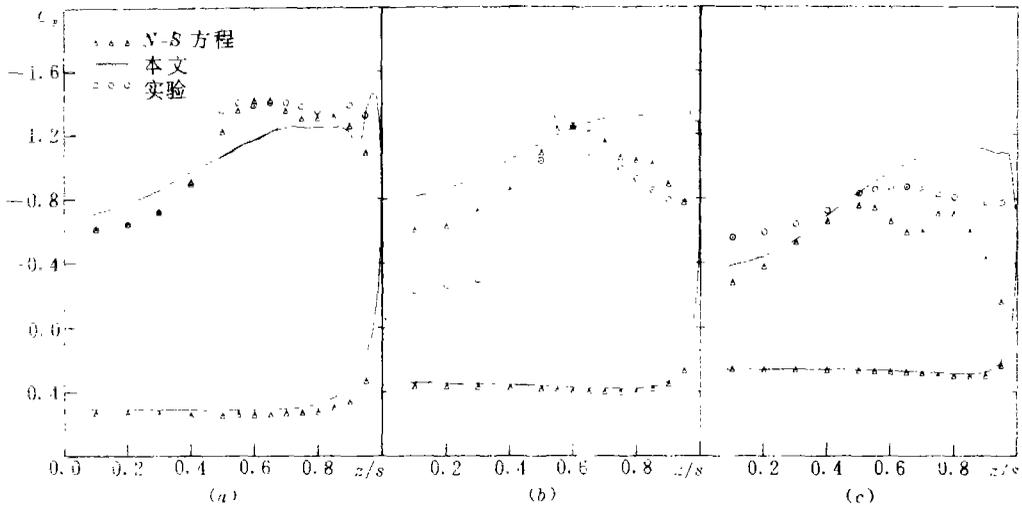


图6 $Ma_\infty=0.85$, $\alpha=24^\circ$ 时压力分布 (a) $x/c=0.3$ (b) $x/c=0.6$ (c) $x/c=0.8$

5 结 论

综合以上一些较为典型的计算结果, 作进一步分析^[4]后可以认为 Euler 方程确实能用来模拟压差起重要作用的大迎角脱体涡流动。即使是钝前缘计算也可以自动形成前缘脱体涡。然而, 要想很好地模拟涡的破裂还需要进一步考虑粘性影响。对比三步格式和四步格式, 发现文中采用的三步格式在不明显地降低最大 Courant 数的情况下, 能大量减少每个时间步上的计算工作量, 从而缩短达到最后收敛所需的时间。

参 考 文 献

- 1 Helmholtz U. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1958, 55(1): 25~55
- 2 Hitzel S M, Wagner B. Euler-Simulation of the Vortex Flow Experiment—A Critical Consideration. *Proceeding of the International Vortex Flow Experiment on Euler Code Validation*, Stockholm, Sweden, 1986, 281~288
- 3 Jameson A. Successes and Challenges in Computational Aerodynamics. *AIAA paper 87-1184*, 1987.
- 4 蔡晋生. 跨音速大迎角欧拉方程数值分析. 西北工业大学博士学位论文, 1991.
- 5 Rizzi A, Drougge G, Müller B. Navier-Stokes and Euler Solutions for Vortex Flow over a Delta Wing. In: Zierep J, Oertel H, eds *Symposium Transsonicum III*, IUTAM Symposium Göttingen, 1988, 305~316
- 6 Hartmann K. US/European Transonic Vortex Flow Experiment—Data Lists of Pressure Measurements. *DFNLR Interner Bericht 222-86A26*, 1986.