

白化滤波器阶数对 GLS 算法辨识结果的影响

陈 铮 程晓寅 陈黎明

(南京航空航天大学二系, 南京, 210016)

EFFECT OF WHITENING FILTER'S ORDER ON GLS ALGORITHM

Chen Zheng, Cheng Xiao-yin, Chen Li-ming

(Second Department, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 210016)

摘 要 在数据长度一定的前提下, 讨论了如何用 GLS 算法得到精度较高的辨识结果。仿真结果表明: GLS 算法中白化滤波器的阶数对辨识结果有影响; 如果适当选择参数, 则可保证在数据长度相同的条件下, 辨识精度较高。

关键词 白化滤波器, GLS 算法, 阶数

Abstract To get unbiased estimation and speed up the computation GLS on-line recursive algorithm is used. We have applied to identify a given discrete system with pseudorandom disturbing signals. The simulating results show that if the order of whitening filter is chosen properly, more accurate parameters could be obtained while the length of computational data is the same. Finally, how to choose the whitening-filter order to get more accurate parameters with GLS algorithm when limited length of data is available is discussed

Key words whitening filter, GLS algorithm, order

对图 1 所示的单变量线性定常离散系统, 可用 n 阶差分方程描述

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) + b_0 U(k) + b_1 U(k-1) + \dots + b_n U(k-n) \quad (1)$$

$U(kT)$ 和 $y(kT)$ 中的采样周期 T 被省去了。由式 (1) 得此系统的脉冲传递函数为

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (2)$$

在辨识过程中, 通常存在着测量噪声 $W(k)$ 如图 2 所示, 方程 (1) 可改写成

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^n b_i U(k-i) + V(k) \quad (3)$$

式中 $V(k) = \sum_{i=0}^n a_i W(k-i)$

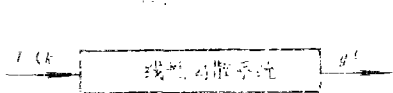


图 1 单变量离散系统

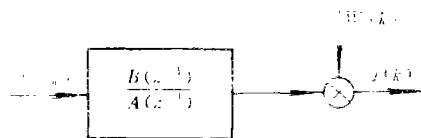


图 2 辨识系统

常用的最小二乘辨识 (即 LS 算法) 只存在残差, 也即 $V(k)$ 与 $u(k)$ 和 $y(k)$ 不相关,

1991 年 9 月 1 日收到, 1992 年 3 月 25 日收到修改稿

且均值 $E[V(k)]=0$ 时，辨识结果才是无偏的。在实际辨识过程中，总存在着测量噪声 $W(k)$ ，因此方程残差 $V(k)$ 变成相关残差，使得 LS 算法的辨识结果是有偏的。在这种情况下使用广义最小二乘辨识 (GLS 算法) 能保证辨识结果是无偏的。

若记相关残差为 $V(k)$ ，白色残差为 $e(k)$ ，测量噪声为 $W(k)$ ，则可用图 3 来说明 GLS 算法的辨识过程。

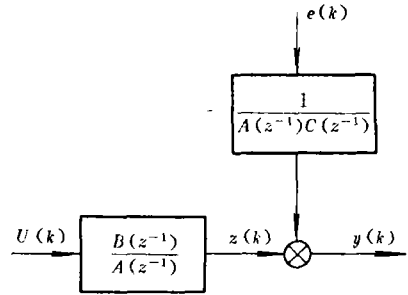


图 3 GLS 算法辨识过程

GLS 算法辨识的实质是：引入一个白化滤波器 $C(z^{-1})$ ，使相关残差 $V(k)$ 变成白色残差 $e(k)$ ，也就是使包括白化滤波器在内的整个系统的方程残差变成白色残差。从而利用最小二乘辨识的方法得到无偏的估计值。

从理论上讲，加了白化滤波器

$$C(z^{-1}) = 1 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_p z^{-p} \tag{4}$$

(式中 p 为白化滤波器的阶数) 后，就能得无偏的辨识结果。但从下面例子的数字仿真结果却说明，若白化滤波器的阶数选择不当，便得不到满意的结果。

这里，假设被辨识系统可用差分方程

$$y(k) - 1.5y(k - 1) + 0.7y(k - 2) = u(k - 1) + 0.5u(k - 2) \tag{5}$$

来表示。与方程 (1) 相比可知系统的参数为：

$$a_1 = -1.5, a_2 = 0.7, b_0 = 0.0,$$

$$b_1 = 1.0, b_2 = 0.5. \text{ 因此参数向量}$$

$$\mathbf{Q} = (a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n)^T$$

$$\text{的真值应是: } \mathbf{Q} = (-1.5, 0.7, 0.0, 1.0, 0.5)^T$$

在仿真运算中，首先假设存在测量噪声 $W(k)$ ，并由测量噪声引起的方程误差为 $V(k)$ 。为了便于在计算机上实现，假设 $V(k)$ 是如图 4 所示的均值可调的伪随机信号。

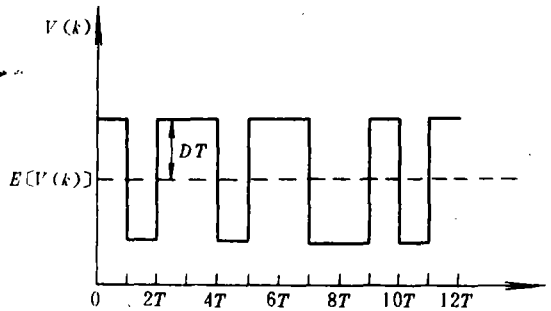


图 4 方程误差 $V(k)$ 示意图

其次，以参数真值与估计值之差的平方和

$$J_\sigma = \sum_i \sigma_i^2 = \sum_i [\theta(i) - \hat{\theta}(i)]^2 \tag{6}$$

式中 θ 为参数向量的真值， $\hat{\theta}$ 为参数向量估计值，作为评价辨识结果好坏的指标函数。

最后，选用周期为 $N=2^7-1=127$ ，幅值为 0.5 的伪随机二位信号作为输入信号，在 PDP-11/23 微处理机上进行了仿真计算，得到在不同的方程误差均值 $E[V(k)]$ 和方差误差幅值 DT 的情况下， J_σ 与白化滤波器阶数 p 的关系，结果见下表和图 5。

数字仿真表(p ——白化滤波器阶数, 数据长度 $m=1\ 000$)

$E(D)$	DT	p	a_1	a_2	h_0	b_1	b_2	J_σ
0.1	0.005	0	-1.50768	0.69609	0.00221	1.00243	0.4950	0.11×10^{-3}
		1	-1.51419	0.71740	-0.00160	0.99889	0.48222	0.82×10^{-3}
		2	-1.50214	0.70990	-0.0151	0.99630	0.48473	0.42×10^{-3}
		3	-1.50214	0.69949	-0.0075	0.99967	0.49823	0.086×10^{-3}
		4	-1.50624	0.70641	-0.00113	0.99762	0.49076	0.17×10^{-3}
		5	-1.50323	0.70353	-0.00092	0.99842	0.49462	0.055×10^{-3}
0.5	0.025	0	-1.57760	0.65872	0.01025	1.01256	0.43776	1.186×10^{-3}
		1	-1.40675	0.52179	0.00678	1.01802	0.62628	5.677×10^{-3}
		2	-1.47695	0.70478	-0.00133	0.99009	0.496006	0.6697×10^{-3}
		3	-1.42958	0.57393	0.00036	1.00417	0.58512	2.812×10^{-3}
		4	-1.50453	0.70698	-0.00257	0.99367	0.48492	0.342×10^{-3}
		5	-1.45880	0.55192	0.00272	1.00915	0.56204	2.548×10^{-3}

$E[V(k)]$	DT	p	a_1	a_2	h_0	b_1	b_2	J_σ
1.0	0.05	0	-1.61045	0.64007	0.01278	1.01602	0.49090	24.5×10^{-3}
		1	-1.25312	0.26910	-0.000867	0.97495	0.72281	296.97×10^{-3}
		2	-1.28136	0.27932	-0.01152	0.95152	0.63460	245.37×10^{-3}
		3	-1.41690	0.43031	-0.00652	0.98302	0.56129	83.37×10^{-3}
		4	-1.39046	0.41720	0.00600	1.01445	0.61317	105.03×10^{-3}
		5	-1.55028	0.57904	0.00797	1.01276	0.47380	18.07×10^{-3}
0.5	0.5	0	-1.59062	0.69908	-0.03688	0.97077	0.38480	23.7×10^{-3}
		1	-1.38581	0.51896	-0.03954	0.94338	0.55178	53.27×10^{-3}
		2	-1.30320	0.49865	-0.04424	0.92943	0.59364	95.00×10^{-3}
		3	-1.45762	0.59285	-0.03779	0.96228	0.50382	16.20×10^{-3}
		4	-1.58846	0.69654	-0.03927	0.97300	0.38785	22.47×10^{-3}
		5	-1.42852	0.62993	-0.05598	0.93389	0.48213	17.86×10^{-3}

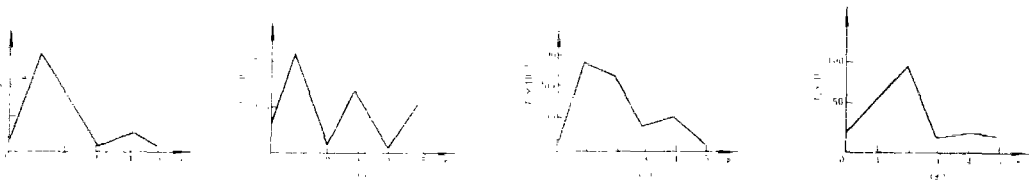


图 5 J_σ 与 p 的关系曲线

从图 5 所示的 J_σ 与 p 的关系曲线中, 我们可以得到以下有关 GLS 算法的几点结论:

- (1) 辨识结果的精度与白化滤波器 $C(z^{-1})$ 的阶数 p 有关。并非 p 越大, 精度越高, 而是存在一最佳 p_{opt} , 这一点很有意义;
- (2) 白化滤波器的最佳阶数与噪声有关, 不同的 $E[V(k)]$ 和不同的 DT 都将会得到不同的 p_{opt} ;

(3) 若当 $p=s$ (s 为某正整数), 辨识结果较好, 则当 $p=s+2k$ ($k=1, 2, \dots$) 时, 辨识结果仍然不错, 但当 $p=s+(2k-1)$ 时, 辨识结果则较差;

(4) $p_{opt} > 2$. 因此在用 GLS 算法时, 应取 $p > 2$ 以便得到满意的辨识结果。

以上仿真结果表明, 在实际辨识过程中, 若采用 GLS 算法, 应注意白化滤波器阶数的选择。若阶数 p 选择不当, 不但不能发挥 GLS 算法的优点, 有时甚至比 LS 算法(即 $p=0$) 的辨识结果还差。

这里要说明的是, 在仿真计算中, 白化滤波器的阶数 p 只取到 5。这是因为, 一方面, p 越大, 计算工作量越大, 辨识速度越慢, 在实际辨识工作中一般 p 不会取得太大; 另一方面, 由 $p < 5$ 的辨识结果, 可以推知 $p > 5$ 时各阶白化滤波器加入以后的辨识情况。

还应当说明的是, 虽然在仿真运算中, 为了方便起见, 选用了具有伪随机信号作为方程误差信号 $V(k)$, 但我们认为由此得出的有关 GLS 算法的结论仍不失一般性。对于其它形式的误差信号, 同样会得到类似的结果。

文中所用 GLS 算法程序的程序框图如图 6 所示。

参 考 文 献

1 夏天长. 系统辨识—最小二乘法. 北京: 清华大学出版社, 1983.

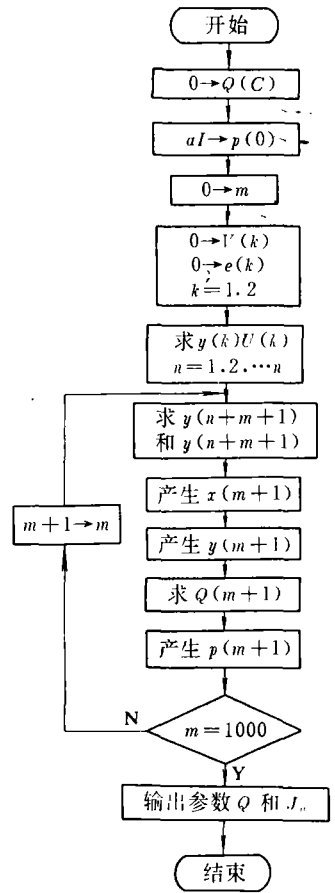


图 6 GLS 算法程序框图