

层合圆柱三维温度场分析的半解析-精细积分法

富明慧 陈焯智

(中山大学应用力学与工程系 510275 广州)

摘要: 针对圆柱体的三维温度场分析, 提出了一种高效的半解析-精细积分法。将温度场展开为环向坐标的 Fourier 级数, 并对径向坐标进行差分离散, 从而把三维热传导方程简化为一系列二阶常微分方程; 将这些二阶常微分方程转化为哈密顿体系下的一阶状态方程, 并利用两点边值问题的精细积分法求解。由于该方法仅对径向坐标进行差分离散, 故相对于传统的数值方法离散规模大幅度减少, 不仅提高了计算效率、降低了存储量, 而且缓解了代数方程的病态问题。此外, 针对 Fourier 半解析解, 根据热平衡原理推导出了两种材料衔接面的半解析差分方程, 从而为求解复合材料层合柱问题打下了基础。算例结果表明, 即使对于细长比高达 400 的圆柱杆件, 此方法仍然可以给出精度较高的解答。

关键词: 层合圆柱; 三维热传导分析; 精细积分法; Fourier 展开; 有限差分法; 功能梯度材料圆柱
中图分类号: O302 **文献标识码:** A

1 引言

圆柱或圆环柱在工程中具有广泛应用, 对此类结构的三维温度场分析具有重要意义, 也是热应力分析的基础。目前该类结构温度荷载的计算方法通常有: 利用 Fourier 热传导方程求解^[1]、等效稳态传热法、指数曲线法^[2]等。在运用 Fourier 热传导方程求解圆柱体结构的温度场时, 主要有解析解法和数值解法两大类。对于一维的热传导问题, 可以给出解析解; 但对于二维和三维问题, 解析求解十分困难, 故目前对此类问题主要采用数值解法, 如有限差分法和有限元法等。此类方法目前已经有许多商业软件^[3-4]可实现。但对于细长圆柱体, 采用有限差分法和有限元法时, 都要求在轴向离散的网格足够密, 以保障单元或者网格的性态, 这必然导致计算

量和存储量的急剧增加。

精细积分法自 1994 年由钟万勰^[5-6]提出后, 由于其具有高精度和高效率的特点, 因而在结构动力方程^[7-9]、热传导问题^[10-13]、两点边值问题^[14-15]等各类初值和边值问题的求解中获得了广泛的应用。在热传导分析方面, 文献[10]讨论了热传导分析有限元解的精细积分算法; 文献[11]针对功能梯度材料 (FGMs) 的二维瞬态热传导问题, 提出了一种降维精细积分法; 文献[12]则应用时域自适应精细积分法求解对流传热问题。

本文针对圆柱及圆环柱结构的三维稳态热传导问题, 提出了一种高效的半解析-精细积分法。该方法充分利用圆柱体几何轴对称的特点, 首先把温度场沿环向作 Fourier 级数展开, 然后对径向进行差分离散, 最后在轴向进行精细积分。该方法的优点是: 离散规模小、计算精度高, 且柱体细长比越大, 这

基金项目: 国家自然科学基金(10672194); 2010 年广东省大学生创新实验项目(1055810002)

来稿日期: 2011-06-23

修回日期: 2011-11-02

第一作者简介: 富明慧, 男, 1966 年生, 中山大学应用力学与工程系, 教授、博士生导师; 研究方向——哈密顿系统的数值分析、理论与方法; 复合材料板壳结构分析。 E-mail: stsfmh@mail.sysu.edu.cn

种优势就越突出。另外针对多层圆柱, 本文给出了衔接面的半解析差分方程。算例充分证明了该方法的有效性, 且精度较高。

2 圆柱体基于 Fourier 展开的半解析-精细积分法

考察如下圆柱体的稳态热传导问题

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_v^*}{\lambda} = 0 \quad (1)$$

$$t_w = t(r, \varphi, z), \quad \xi_w = \xi(r, \varphi, z) \quad (2)$$

其中: t 为温度; q_v^* 为内热源强度; λ 为导热系数; t_w 为对应于第一类边界条件中边界上的温度值; ξ_w 为对应于第二类边界条件中边界上的热流密度值。

上述方程是三维的, 为简化计算, 本文先对其进行降维处理。

2.1 方程的降维

首先将温度场沿环向坐标进行 Fourier 展开, 即

$$t(r, \varphi, z) = t_o(r, z) + \sum_{l=1}^L t_s(r, z) \sin(l\varphi) + \sum_{l=1}^L t_c(r, z) \cos(l\varphi) \quad (3)$$

内热源强度也作相应展开

$$q_v^*(r, \varphi, z) = q_{vo}^*(r, z) + \sum_{l=1}^L q_{vs}^*(r, z) \sin(l\varphi) + \sum_{l=1}^L q_{vc}^*(r, z) \cos(l\varphi) \quad (4)$$

将式(3)、式(4)代入到式(1)可得

$$\frac{\partial^2 t_o(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_o(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 t_o(r, z)}{\partial z^2} = -\frac{q_{vo}^*(r, z)}{\lambda} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 t_s(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_s(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 t_s(r, z)}{\partial z^2} - \frac{l^2}{r^2} t_s(r, z) = -\frac{q_{vs}^*(r, z)}{\lambda} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 t_c(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_c(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 t_c(r, z)}{\partial z^2} - \frac{l^2}{r^2} t_c(r, z) = -\frac{q_{vc}^*(r, z)}{\lambda} \quad (7)$$

其中: 式(5)对应于 Fourier 展开的轴对称部分; 式(6)、式(7)对应于非轴对称部分。

这样, 原三维的偏微分方程就被转化为一系列

二维的偏微分方程。对于连续系统, 根据式(5)~式(7)的特点可以推知: 对于轴对称部分, 在圆心 $r=0$ 处有 $\frac{\partial t_o(r, z)}{\partial r} = 0$; 而对于非轴对称部分, 在圆心 $r=0$ 处有 $t_s = 0$ 和 $t_c = 0$ 。

对式(5)~式(7)沿径向坐标进行差分离散。为简便起见, 方程中的二阶导数和一阶导数均采用等步长中心差分格式, 并代入侧边边界条件(也沿环向坐标作 Fourier 展开), 可得到以下三组半解析差分方程

$$\frac{t_{oj+1} - 2t_{oj} + t_{oj-1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_j} \frac{t_{oj+1} - t_{oj-1}}{2\Delta r} + \frac{d^2 t_o}{dz^2} = -\frac{q_{voj}^*}{\lambda} \quad (8)$$

$$\frac{t_{sj+1} - 2t_{sj} + t_{sj-1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_j} \frac{t_{sj+1} - t_{sj-1}}{2\Delta r} + \frac{d^2 t_s}{dz^2} = \frac{l^2}{r_j^2} t_{sj} - \frac{q_{vsj}^*}{\lambda} \quad (9)$$

$$\frac{t_{cj+1} - 2t_{cj} + t_{cj-1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_j} \frac{t_{cj+1} - t_{cj-1}}{2\Delta r} + \frac{d^2 t_c}{dz^2} = \frac{l^2}{r_j^2} t_{cj} - \frac{q_{vcj}^*}{\lambda} \quad (10)$$

其中: $j=1, 2, \dots, n$; n 为径向差分离散的内部结点数; Δr 为差分离散的步长。当然, 为提高靠近圆心处结点的求解精度, 也可采用变步长差分方法^[16], 推导过程完全相同, 只是式(8)~式(10)表达式略有不同, 本文不再赘述。

这样, 就把二维偏微分式(5)~式(7)进一步简化为一维的常微分方程。对于半解析差分式(8)~式(10)的系数矩阵具有统一的三对角形式即

$$N = \begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & a & b \\ & & & c & a \end{pmatrix} \quad (11)$$

其中 a 、 b 、 c 皆为常数。

2.2 半解析差分方程的精细积分求解

$$\text{令: } \mathbf{q} = [t_1, t_2, \dots, t_n]^T; \mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial z} [t_1, t_2, \dots, t_n]^T,$$

则式(8)~式(10)可写成

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{N} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} + \mathbf{f} \quad (12)$$

其中: \mathbf{N} 为式(11)中的矩阵, \mathbf{I} 为单位方阵, 为对应的侧边边界条件和式(8)~式(10)中右端内热源项相加得到的非齐次项。

$$\text{令: } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \text{ 则式(12)可进一步写成} \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (13)$$

两端边界条件为

$$\mathbf{q}(0) = \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{q}(z_f) = \boldsymbol{\beta} \quad (14)$$

其中: $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{N} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$; z_f 为圆柱的总长度; $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 是已知的常数组成的列向量。

将区间 $[0, z_f]$ 均匀划分为 M 份, 则步长 $\Delta z = z_f / M$ 。记: $z_i = i\Delta z$; $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}(z_i)$; $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}(z_i)$, 则有^[17]

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{T}(\Delta z)\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1}^*, \quad (i = 1, 2, \dots, M-1) \quad (15)$$

其中: 传递矩阵 $\mathbf{T} = \exp(\mathbf{H}\Delta z)$, 它可用文献[5]中的指数矩阵运算技巧精确求得;

$\mathbf{v}_{i+1}^* = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \exp(\mathbf{H}(z_{i+1} - s))\mathbf{f}(s)ds$ 为式(13)的特解, 可按文献[18]中特解的精细积分法给出, 也可用数值积分的方法如 Romberg 积分公式^[17]、Cotes 积分公式^[19]等方法计算。

应该指出, 上述沿轴向的“代数化”过程是一个几乎无离散误差的精细积分过程, 计算精度与步长 Δz 无关, 这是与传统差分离散的最大区别之处。

将式(15)写成矩阵形式, 有

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{T} & \mathbf{I}_{2m \times 2n} & & & & \\ & -\mathbf{T} & \mathbf{I}_{2m \times 2n} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\mathbf{T} & \mathbf{I}_{2m \times 2n} & \\ & & & & -\mathbf{T} & \mathbf{I}_{2m \times 2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{M-1} \\ \mathbf{v}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{M-1}^* \\ \mathbf{v}_M^* \end{pmatrix} \quad (16)$$

至此, 三维稳态热传导边值问题转化为式(16)形式的代数方程组。该代数方程组中自由度 $(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$ 的总个数为 $(2M + 2)$ 个, 其中 $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_M)$ 为已知, 故未知量为 $2M$ 个, 方程总数也为 $2M$ 个, 因而是封闭的代数方程组。式(16)可用文献[15]中给出的递推合并消元方法求解。

3 复合材料层合圆柱 (或圆环柱) 基于 Fourier 展开的半解析-精细积分法

工程实际中有许多复合材料组成的多层圆柱体结构, 如钢管混凝土柱、复合材料管道等。由于

各层均可视为均匀材料层, 因此相邻层间界面的处理就成为热传导分析的关键。针对 Fourier 级数半解析解法, 有关两种介质衔接面的半解析差分方程的研究尚未见到, 为此针对稳态热传导问题, 本文推导了衔接面的半解析差分方程。具体过程如下。

在衔接面处取一扇形六面体微元, 垂直于纸面的厚度为 dz 。如图 1 所示, 实线包围部分即为所研究的微元体。

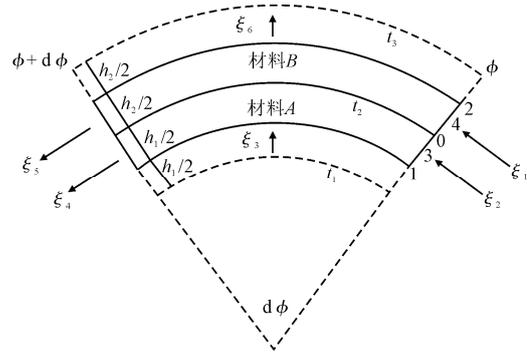


图 1 衔接面处所取扇形六面体微元俯视图 (厚度为 dz)

图 1 中: h_1 和 h_2 分别表示材料 A 和 B 沿径向的差分步长。编号 0、1、2、3、4 都为对应位置扇形面编号, 其中 3 和 4 面表示图中箭头所示的等效热流流入面; r_0, r_1, r_2, r_3, r_4 分别表示对应面形心点到扇形圆心的距离。由于取的是微元体, 故面上热流可表示为对应面形心处的热流密度与该面面积的乘积。

将温度场在环向作 Fourier 展开时, 由式(3)可知温度包含有 $t_0(r, z)$ 、 $t_s(r, z)\sin(l\varphi)$ (其中 $l=1, 2, \dots$)、 $t_c(r, z)\cos(l\varphi)$ 项。下面以 $t_s(r, z)\sin(l\varphi)$ 项为例推导衔接面稳态半解析差分方程。

在柱坐标系下, 径向、环向、轴向热流密度表达式分别为

$$\text{径向: } \xi = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \quad (17)$$

$$\text{环向: } \xi = -\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \quad (18)$$

$$\text{轴向: } \xi = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \quad (19)$$

其中: λ 为导热系数; ξ 为热流密度, 即单位时间单位面积上传递的热量。在稳态条件下, 流入微元体的总热流量加上微元体内热源生成热流量等于流出微元体的总热流量, 于是

$$\xi_1 s_1 + \xi_2 s_2 + \xi_3 s_3 + \xi_7 s_7 + q_v^* V = \xi_4 s_4 + \xi_5 s_5 + \xi_6 s_6 + \xi_8 s_8 \quad (20)$$

其中: ξ, s 的下标对应的是图中所示不同的流入面与流出面的热流密度和面积; ξ_7 和 s_7 表示从扇形

底面流入的热流密度和对应面积; ξ_8 和 s_8 表示从扇形顶面流出的热流密度和对应面积 (应注意的是, 在计算通过扇形六面体微元的底面和顶面热流量时, 要考虑两种材料的区别); q_v^* 表示内热源强度; V 表示整个微元体的体积。

把式(17)~式(19)代入到式(20)中, 并对 $\frac{\partial}{\partial r}$ 作中心差分, 即

$$\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r=r_1} = \frac{t_2 - t_1}{h_1}, \quad \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r=r_2} = \frac{t_3 - t_2}{h_2}$$

同时对 $\frac{t}{r}$ 作线性插值, 即

$$\left(\frac{t}{r}\right)_{r=r_3} = \frac{3}{4} \frac{t_2}{r_0} + \frac{1}{4} \frac{t_1}{r_0 - h_1}, \quad \left(\frac{t}{r}\right)_{r=r_4} = \frac{3}{4} \frac{t_2}{r_0} + \frac{1}{4} \frac{t_3}{r_0 + h_2}$$

再根据式(4), 内热源强度为 $q_{vs}^*(r, z) \sin(l\varphi)$, 将其与 $t = t_s(r, z) \sin(l\varphi)$ 一并代入式(20), 可得

$$\begin{aligned} & \lambda_2 \frac{t_{s3} - t_{s2}}{h_2} \left(r_0 + \frac{h_2}{2}\right) - \lambda_1 \frac{t_{s2} - t_{s1}}{h_1} \left(r_0 - \frac{h_1}{2}\right) - \\ & [\lambda_1 l^2 \left(\frac{3}{4} \frac{t_{s2}}{r_0} + \frac{1}{4} \frac{t_{s1}}{r_0 - h_1}\right) \frac{h_1}{2} + \\ & \lambda_2 l^2 \left(\frac{3}{4} \frac{t_{s2}}{r_0} + \frac{1}{4} \frac{t_{s3}}{r_0 + h_2}\right) \frac{h_2}{2}] + \frac{1}{2} [\lambda_1 (r_0^2 - r_1^2) + \\ & \lambda_2 (r_2^2 - r_0^2)] \frac{d^2 t_s}{dz^2} + q_{vs}^* \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

其中: λ_1 为材料 A 的导热系数; λ_2 为材料 B 的导热系数。

同理, 可推导出对应于式(3)式中 $t_o(r, z)$ 和 $t_c(r, z) \cos(l\varphi)$ (其中 $l=1, 2, \dots$) 的衔接面稳态半解析差分方程, 具体结果为

$$\begin{aligned} & \lambda_2 \frac{t_{o3} - t_{o2}}{h_2} \left(r_0 + \frac{h_2}{2}\right) - \lambda_1 \frac{t_{o2} - t_{o1}}{h_1} \left(r_0 - \frac{h_1}{2}\right) + \\ & \frac{1}{2} [\lambda_1 (r_0^2 - r_1^2) + \lambda_2 (r_2^2 - r_0^2)] \frac{d^2 t_o}{dz^2} + q_{vo}^* \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_2 \frac{t_{c3} - t_{c2}}{h_2} \left(r_0 + \frac{h_2}{2}\right) - \lambda_1 \frac{t_{c2} - t_{c1}}{h_1} \left(r_0 - \frac{h_1}{2}\right) - \\ & [\lambda_1 l^2 \left(\frac{3}{4} \frac{t_{c2}}{r_0} + \frac{1}{4} \frac{t_{c1}}{r_0 - h_1}\right) \frac{h_1}{2} + \\ & \lambda_2 l^2 \left(\frac{3}{4} \frac{t_{c2}}{r_0} + \frac{1}{4} \frac{t_{c3}}{r_0 + h_2}\right) \frac{h_2}{2}] + \frac{1}{2} [\lambda_1 (r_0^2 - r_1^2) + \\ & \lambda_2 (r_2^2 - r_0^2)] \frac{d^2 t_c}{dz^2} + q_{vc}^* \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

式(21)~式(23)即为衔接面处的稳态半解析差分

方程, 利用这些方程就可针对两种不同材料进行联合求解。

在具体的工程实际计算中, 往往会涉及较为复杂的问题, 例如结构与地基之间的热交换问题。此时可将本文方法与有限元方法进行结合, 对于杆端衔接部分可用有限元方法计算, 其形成的代数方程组可与本文方法进行联合求解。这样就使得两种方法的优势都得以发挥。

4 算例

4.1 算例 1: 长圆柱的稳态热传导计算。本算例中各物理量纲均为 1。设圆柱半径 1, 长 400。设侧边界的温度为 $t_{w1} = z + z \sin \varphi$, 两端边界温度为

$$t_{w2} = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ 400 + 400r \sin \varphi, & z = 400 \end{cases}$$

其中 r 、 z 、 φ 分别为径向、轴向、环向坐标。表 1 为精确解与本文结果的对比, 其中: $r = 0.6$; $\varphi = \pi/2$; z 沿轴向变化。

对于细长比高达 1:400 的圆柱, 如果采用常规三维数值方法离散, 为保障单元性态则离散规模必然十分庞大, 这会导致庞大的存贮量和计算量。本文虽然沿径向仅取了 20 个结点, 但解答的误差都不超过 0.1%, 这说明本文方法具有很高的精度; 同时在存贮量和计算效率方面, 本文方法也具有突出的优势。

需要指出的是, 在实际的工程应用中并不要求如此高的精度, 因此在运用本文方法时可适当减少求解传递矩阵 T 的循环次数, 这样可进一步提高效率以及减少存贮量。

表 1 本文结果与精确解的比较

长度 z/m	精确解/ $^{\circ}C$	本文解/ $^{\circ}C$	相对误差/ $\times 10^9(\%)$
50	78.51252739 1347	78.51252739 49312	4.57
100	157.02505478 2693	157.02505478 9862	4.57
150	235.5375821 7404	235.5375821 848	4.57
200	314.2034543 45449	314.2034543 59759	4.55
250	392.715981 736796	392.715981 754681	4.55
300	471.228509 128142	471.228509 149618	4.56
350	549.7410365 19489	549.7410365 44523	4.55

4.2 算例 2: 钢管混凝土柱的轴对称温度场计算。设: 钢管混凝土柱内径为 0.1m, 外径为 0.2m, 长为 20m; 钢管和混凝土界面在 $r=0.18m$ 处; 钢管导热系数取为 $75W/(m \cdot ^{\circ}C)$; 混凝土导热系数取为 $0.79 W/(m \cdot ^{\circ}C)$; 内边界温度恒定为 $30^{\circ}C$; 外边界温

度按线性规律变化, 即: $t_{w1} = 60 - z$; 两端边界温度均按线性规律变化 (r, z 分别为径向和轴向坐标)。

分别采用本文方法和有限元方法进行计算, 有限元方法采用轴对称四边形四节点单元, 单元离散规模为 4000×20 。计算结果对比见图 2 和图 3。

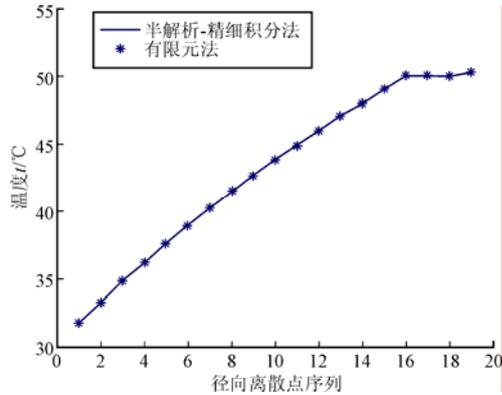


图 2 轴向 $z=10\text{m}$ 处温度沿径向变化情况

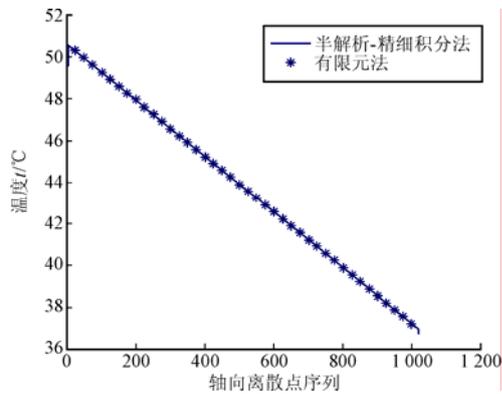


图 3 径向 $r=0.15\text{m}$ 处温度沿轴向变化情况

从图 2 和图 3 可以看出, 两种方法计算的结果十分接近, 也证明了本文方法的有效性。

在同一台机器上, 本文方法计算所用 CPU 时间为 1.5s, 而有限元计算所用 CPU 时间为 7s, 运用本文方法计算该问题, 效率提高了将近 5 倍。

在数据存贮量方面, 有限元所需计算自由度个数为 4001×21 个, 所需要存贮半带宽约为 20; 本文方法所需要存贮的是 4 个 38×38 的矩阵^[15], 并且需要 10 次循环运算。这样, 有限元法所需要的计算机存贮量是本文方法的三十倍。事实上, 因为在实际情况中不需要把轴向每一个结点的温度值都求出, 故运用文献[15]中递推合并消元方法求解时, 在前几次循环过程中可用新的数据覆盖原来的数据, 这样本文方法所需的存贮量将进一步减少。另外需注意到本例只是一个轴对称情况, 如果对于一些非轴对称, 并且细长比更大的圆柱温度场分析问题, 有限元方法离散的网格数都将急剧增加, 而由于本文方法在轴向方向运用精细积分, 数据存贮量

的增加有限。因而, 本文的半解析-精细积分法在计算效率和存贮量方面都具有很大的优越性。

4.3 算例 3: 功能梯度材料圆柱筒的稳态温度场计算。设功能梯度材料圆柱筒内径为 0.1m, 外径为 0.2m, 轴向长度为 2m; 导热系数按 $\lambda = 0.06e^{0.2r}$ 指数规律给出。设内边界温度为 100°C, 外边界温度按照以下分段函数给出

$$t_{w1} = \begin{cases} -z + 20, & -\pi \leq \varphi < -\pi/2 \\ -z + 20 + 2 \cos \varphi, & -\pi/2 \leq \varphi < \pi/2 \\ -z + 20, & \pi/2 \leq \varphi < \pi \end{cases}$$

两端边界条件按抛物线规律变化: 底端近似为 $t_{w2} = 3100r^2 - 1700r + 238$; 顶端近似为 $t'_{w2} = 2700r^2 - 1600r + 232$ (其中 r, z, φ 分别为径向、轴向和环向坐标)。沿径向将功能梯度材料筒均匀离散为 20 个子层, 每一层按均匀材料计算^[20]。

针对径向 $r=0.15\text{m}$ 、环向为 $\pi/2$ 处三个不同点, 表 2 给出了按式(3)中 Fourier 级数展开到第 L 项时的计算结果。

表 2 本文方法收敛性

L	z/m		
	0.5	1.0	1.5
6	52.85330	52.56188	52.26135
8	52.85128	52.55986	52.25933
10	52.85055	52.55913	52.25860
12	52.85027	52.55885	52.25832
14	52.85016	52.55874	52.25821
16	52.85011	52.55869	52.25816

本算例属非轴对称问题, 从表 2 可以看出: Fourier 级数第 10 项以后的各项对数值解答的影响比较小, 仅体现在小数点后第 4 位以后; 且项数越靠后, 影响就越小。这也表明本文方法具有较好的收敛性。此外, 分层常数化结合半解析-精细积分法在处理功能梯度材料问题方面也较为有效。

5 结 论

本文针对圆柱体或圆环柱结构的三维温度场计算问题, 提出了一种高效的半解析-精细积分方法。该方法沿环向作 Fourier 级数展开、沿径向离散、沿轴向精细积分。由于能充分利用结构的几何特征, 从而使得离散规模小、计算效率高, 即使对于细长比高达数百的杆件, 本方法仍然可以给出较为精确的解答。

在利用半解析-精细积分法求解复合材料层合圆柱或圆环柱的稳态温度场时, 本文针对 Fourier

级数展开形式,由热平衡原理推导出了衔接面处的半解析差分方程,为此类结构的 Fourier 半解析法打下基础。

对于功能梯度材料圆环柱,利用分层常数化的方法将其简化为多层圆环柱进行分析,证明了本文方法对于功能梯度材料圆柱体的有效性。

参 考 文 献

- [1] 刘兴法. 混凝土结构的温度应力分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 1991: 23-26.
- [2] 李鸿猷. 高层建筑结构日照影响的探讨[J]. 建筑结构学报, 1989(3): 52-68.
- [3] 宋永娟, 洪军, 张先扬. 高温后钢筋混凝土柱截面温度数值模拟与分析[J]. 山西建筑, 2009, 35(27): 82-83.
- [4] 孙粤琳, 张燎军, 冉懋鸽. 矩形钢管混凝土柱温度场及温度应力的有限元分析[J]. 水利水电科技进展, 2005, 25(5): 33-36.
- [5] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 131-135.
- [6] 钟万勰. 矩阵黎卡提方程的精细积分法[J]. 计算结构力学及其应用, 1994, 11(2): 113-119.
- [7] 林家浩, 钟万勰, 张文首. 结构非平稳随机响应方差矩阵的直接精细积分计算[J]. 振动工程学报, 1999, 12(1): 1-8.
- [8] 王忠, 王雅琳, 王芳. 任意激励下结构动力响应的状态方程精细积分法[J]. 计算力学学报, 2002, 19(4): 419-422.
- [9] 侯秀慧, 邓子辰, 黄立新. 桥梁结构移动荷载识别的辛精细积分算法[J]. 动力学与控制学报, 2008, 6(1): 66-72.
- [10] 张洪武, 张鹏, 钟万勰. 获得热传导问题“拟解析解”的精细积分算法[J]. 力学与实践, 1998, 20(4): 9-11.
- [11] 蓝林华, 富明慧, 程正阳. 功能梯度材料瞬态热传导问题的降维精细积分法[J]. 固体力学学报, 2010, 31(4): 406-410.
- [12] 赵潇, 杨海天, 高强. 时域自适应精细算法求解对流热传导问题[J]. 计算物理, 2006, 23(4): 451-456.
- [13] 王丫. 热传导方程的小波精细积分算法[J]. 重庆工学院学报, 2007, 21(8): 130-132.
- [14] Chen B S, Tong L Y, Gu Y X. Precise time integration for linear two-point boundary value problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 175: 182-211.
- [15] 富明慧, 张文志. 两点边值问题的一种精细求解方法[J]. 应用力学学报, 2010, 27(4): 433-438.
- [16] Croft D R, Lilley G D. 传热的有限差分方程计算[M]. 张风祿, 译. 北京: 冶金工业出版社, 1982: 47-51.
- [17] 任传波, 贺光宗, 李忠芳. 结构动力学精细积分的一种高精度通用计算格式[J]. 机械科学与技术, 2005, 24(12): 1507-1509.
- [18] 富明慧, 刘祚秋, 林敬华. 一种广义精细积分法[J]. 力学学报, 2007, 39(5): 672-677.
- [19] 富明慧, 梁华力. 一种改进的精细-龙格库塔法[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2009, 48(5): 1-5.
- [20] 陈伟球, 边祖光, 丁皓江. 功能梯度矩形厚板的三维热弹性分析[J]. 力学季刊, 2002, 23(4): 443-449.