

Daubechies 条件小波有限元法研究

陈雅琴¹ 张宏光² 党发宁¹

(西安理工大学岩土工程研究所 710048 西安)¹ (长安大学公路学院 710064 西安)²

摘要: 为拓展小波理论在结构工程中的应用, 提高结构计算精度, 提出了以 Daubechies 条件小波 Ritz 法为基础的 Daubechies 条件小波有限元法。该法结合广义变分原理和拉格朗日乘子法构造修正泛函, 根据修正泛函的驻值条件得到全域法求解方程矩阵。根据构件的边界条件, 按左右边界对求解矩阵进行相应拆分, 构建条件小波单元刚度矩阵, 并依据公共节点位移相等原则形成总体刚度矩阵, 由此解得各单元的小波基待定系数, 即可进一步求解位移场函数、内力分布函数及荷载集度函数。以工程中常见的弹性拉压杆及平面弯曲梁为例, 详细阐述了该方法的构造过程。并通过典型算例将 Daubechies 条件小波有限元法计算值与理论解进行了对比, 结果表明: 在弹性拉压杆算例中, 位移、应力、荷载集度的相对误差均在 $1.22 \times 10^{-3}\%$ 以内; 在平面弯曲梁算例中, 挠度、弯矩、荷载集度的相对误差均在 $8.91 \times 10^{-2}\%$ 以内。

关键词: Daubechies 小波; 条件小波; 有限元法; 广义变分原理; 拉格朗日乘子

中图分类号: TU13 **文献标识码:** A

1 引言

传统有限元法在工程数值计算领域中担当着重要角色, 随着该理论的不断发展和更新, 其在工程中的应用也日益深入。但是, 由于传统有限元法一般采用幂函数作为位移场函数的试探函数, 在某些工程问题中当位移场函数不是幂函数时, 采用传统有限元法进行求解将产生较大的误差, 而利用小波函数插值可以获得新的有限元逼近空间^[1-2]。因此, 为了分析更加复杂的工程实际问题, 可将小波插值与有限元法相结合, 即为小波有限元法^[3-4]。

小波有限元法吸收了传统有限元法离散逼近的优点, 可以方便地处理复杂的边界条件; 同时又拥有小波函数特有的多分辨特性, 可以提供另一种提高精度的细化算法, 即在不改变网格剖分的前提

下提高其分辨率。小波函数最大的特点就在于它具有多尺度、多分辨、紧支性的特点。因此, 小波有限元法可以根据实际需要任意改变分析尺度: 在变化梯度小的求解域用大的分析尺度; 在变化梯度大的求解域则采用小的分析尺度。在这方面, 小波有限元法可以弥补传统有限元法的不足; 并且小波有限元法算法的数值稳定性好、运算速度快、求解精度高, 因此有必要对其展开研究。

国内外针对小波有限元法进行了大量研究工作^[5-11]。对于工程中的桁架、薄膜、梁等结构均有研究成果。其中 Daubechies 小波由于具有正交性及紧支性而在工程应用中受到重视。

本文主要研究 Daubechies 条件小波有限元法。该法区别于其他参考文献中的常规小波有限元法, 是以已有研究成果 Daubechies 条件小波 Ritz 法^[12]为基础, 建立有限元法中的单刚矩阵并组装成总刚

矩阵而形成的。

2 Daubechies 条件小波有限元法的构建

本文以结构中常见的受拉(压)弹性杆、平面受弯梁为基本研究对象, 阐述 Daubechies 条件小波有限元法的构建过程。

2.1 受拉(压)弹性杆

图1为两端固结且受均布荷载的弹性拉压杆, $f(x)$ 为所受均布荷载, σ_x 为应力, $d\sigma_x$ 为应力增量。实际工程中的边界条件及荷载可在求解过程中灵活变换。

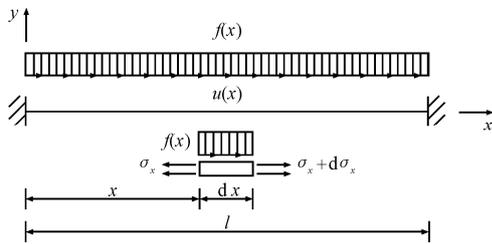


图1 弹性受拉(压)杆

2.1.1 单元刚度矩阵的建立

首先, 建立弹性拉压杆的局部坐标系。设: 杆的长度为 l ; 左右端点的总体坐标分别为 x_1 和 x_2 , 则局部坐标 ξ 与总体坐标 x 间的关系为

$$\xi = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{l} \quad (1)$$

显然有, 局部坐标 ξ 的取值范围为 $0 \leq \xi \leq 1$ 。

其次, 在局部坐标中预设 Daubechies 小波基位移场函数。

$$\mathbf{u}^e = \Phi^T \mathbf{a}^e \quad (2)$$

其中: \mathbf{u}^e 为局部坐标系中的位移场函数; Φ 为具有 p 阶消失矩的 Daubechies 小波基函数; Φ^T 为其转置矩阵; \mathbf{a}^e 为局部坐标系中小波基函数的待定系数列阵。

根据 p 阶 Daubechies 小波基函数的支撑域特性, 令 $N = 2p - 1$ (注: 若无特殊说明, 文后所用字母 N 均有 $N = 2p - 1$ 成立, 其中 p 为小波函数消失矩的阶数), 则对于 V_0 空间, Φ 的矩阵表达式应为

$$\Phi = \phi_0(\xi) = [\phi[\xi - (1 - N)] \quad \phi[\xi - (2 - N)] \quad \dots \quad \phi(\xi)]^T \quad (3)$$

设 λ 为 Lagrange 乘子, 为约束边界 Γ 中的一组独立坐标的函数向量。由于图1中的约束边界

Γ 是两个端点, 则可简化为

$$\lambda = \sum_{i=1}^2 \mathbf{b}_i = \mathbf{b} \quad (4)$$

其中 \mathbf{b} 为边界条件矩阵。

采用 Lagrange 乘子法将需满足的边界条件 $E(\mathbf{u})$ 引入自然变分条件下的泛函, 可以形成新的修正泛函, 即

$$\Pi^* = \Pi_p(\mathbf{u}) + \lambda^T E(\mathbf{u}) \quad (5)$$

其中: λ^T 为 λ 的转置; Π^* 为新的修正泛函; $\Pi_p(\mathbf{u})$ 为自然变分条件下的泛函, 其表达式为

$$\begin{aligned} \Pi_p(\mathbf{u}) &= \frac{EA}{2l} \int_0^1 \left[\frac{d\mathbf{u}^e}{d\xi} \right]^2 d\xi - l \int_0^1 f(l \cdot \xi) \mathbf{u}^e d\xi \\ &= \frac{EA}{2l} \int_0^1 \left[\frac{d(\Phi^T \mathbf{a}^e)}{d\xi} \right]^T \left[\frac{d(\Phi^T \mathbf{a}^e)}{d\xi} \right] d\xi - ql^{r+1} \int_0^1 \xi^r (\Phi^T \mathbf{a}^e) d\xi \\ &= \frac{EA}{2l} \int_0^1 (\mathbf{a}^e)^T \Phi'(\Phi)^T \mathbf{a}^e d\xi - ql^{r+1} \int_0^1 (\mathbf{a}^e)^T \Phi \cdot \xi^r d\xi \end{aligned} \quad (6)$$

其中: E 为弹性模量; A 为构件的横截面积。为体现荷载的普遍性, 将 $f(x)$ 设为幂函数, 即令

$$f(x) = ql^r$$

其中: q 为荷载集度系数; r 为幂函数指数。若构件受均布荷载, 则 $r = 0$ 。 $E(\mathbf{u})$ 为必须满足的边界条件, 且有

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})|_{\Gamma} = (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})|_{x=0 \text{ 或 } x=l} = \mathbf{0} \quad (7)$$

其中: \mathbf{u} 为位移函数; $\bar{\mathbf{u}}$ 为边界处的位移函数值。

将式(2)、式(6)、式(7)代入式(5)中, 得

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \Pi_p(\mathbf{u}) + \lambda^T E(\mathbf{u}) \\ &= \Pi_p(\mathbf{u}) + \mathbf{b}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})|_{\Gamma} \\ &= \frac{EA}{2l} \int_0^1 (\mathbf{a}^e)^T \Phi'(\Phi)^T \mathbf{a}^e d\xi - ql^{r+1} \int_0^1 (\mathbf{a}^e)^T \Phi \cdot \xi^r d\xi + \\ &\quad (\mathbf{b}^e)^T (\Phi^T \mathbf{a}^e - \bar{\mathbf{u}}^e)|_{\Gamma} \end{aligned} \quad (8)$$

由修正泛函变分为零可得到下列一组方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{a}^e} = \frac{EA}{l} \int_0^1 \Phi'(\Phi)^T d\xi \cdot \mathbf{a}^e - \\ \quad ql^{r+1} \int_0^1 \Phi \cdot \xi^r d\xi + \Phi|_{\Gamma} \cdot \mathbf{b}^e = 0 \\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{b}^e} = \Phi^T|_{\Gamma} \cdot \mathbf{a}^e - \bar{\mathbf{u}}^e = 0 \end{cases} \quad (9)$$

得

$$\begin{aligned}
 \Pi_p(\mathbf{v}) &= \int_0^l \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 \mathbf{v}}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l f(x) \mathbf{v} dx - \sum_i P_i v_i - \sum_j M_j \frac{dv_j}{dx} \\
 &= \frac{EI}{2l^3} \int_0^1 \left(\frac{d^2 \mathbf{v}^\epsilon}{d\xi^2} \right)^2 d\xi - l \int_0^1 f(l \cdot \xi) \mathbf{v}^\epsilon d\xi - \sum_i P_i v_i^\epsilon - \sum_j M_j \frac{dv_j^\epsilon}{dx} \\
 &= \frac{EI}{2l^3} \int_0^1 \left[\frac{d^2 (\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{a}^\epsilon)}{d\xi^2} \right]^T \left[\frac{d^2 (\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{a}^\epsilon)}{d\xi^2} \right] d\xi - ql^{r+1} \int_0^1 g(\xi) (\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{a}^\epsilon) d\xi - \\
 &\quad \sum_i P_i (\mathbf{a}^\epsilon)^T \boldsymbol{\Phi} \Big|_{\xi=\xi_i} - \frac{1}{l} \sum_j M_j \frac{d(\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{a}^\epsilon)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_j} \\
 &= \frac{EI}{2l^3} \int_0^1 (\mathbf{a}^\epsilon)^T \boldsymbol{\Phi}'' (\boldsymbol{\Phi}'')^T \mathbf{a}^\epsilon d\xi - ql^{r+1} \int_0^1 (\mathbf{a}^\epsilon)^T \boldsymbol{\Phi} \cdot \xi^r d\xi - \\
 &\quad \sum_i P_i (\mathbf{a}^\epsilon)^T \boldsymbol{\Phi} \Big|_{\xi=\xi_i} - \frac{1}{l} \sum_j M_j (\mathbf{a}^\epsilon)^T \boldsymbol{\Phi}' \Big|_{\xi=\xi_j}
 \end{aligned} \tag{18}$$

其中： $\boldsymbol{\Phi}''$ 为 Daubechies 小波基函数 $\boldsymbol{\Phi}(\xi)$ 对局部坐标 ξ 求二阶导数所组成的列阵； $(\boldsymbol{\Phi}'')^T$ 为其转置矩阵； P_i 和 M_j 分别为作用在梁上某点的集中力和集中力矩； \mathbf{v}^ϵ 为局部坐标系下预设小波基位移场（挠度）函数。

$$\mathbf{v}^\epsilon = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{a}^\epsilon \tag{19}$$

两端竖向支撑的位移边界条件可描述为

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 \tag{20}$$

若梁的两端固结，则两端转角 θ 为 0，即

$$\theta|_{x=0} = 0, \quad \theta|_{x=l} = 0 \tag{21}$$

以边界条件两端固结为例，将式(18)~式(21)代入式(5)中，得

$$\begin{aligned}
 \Pi^* &= \Pi_p(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\lambda}^T E(\mathbf{v}) = \Pi_p(\mathbf{v}) + \mathbf{b}^T \mathbf{C}_\Gamma \\
 &= \frac{EI}{2l^3} \int_0^1 (\mathbf{a}^\epsilon)^T \boldsymbol{\Phi}'' (\boldsymbol{\Phi}'')^T \mathbf{a}^\epsilon d\xi - ql^{r+1} \int_0^1 (\mathbf{a}^\epsilon)^T \boldsymbol{\Phi} \cdot \xi^r d\xi - \\
 &\quad \sum_i P_i (\mathbf{a}^\epsilon)^T \boldsymbol{\Phi} \Big|_{\xi=\xi_i} - \frac{1}{l} \sum_j M_j (\mathbf{a}^\epsilon)^T \boldsymbol{\Phi}' \Big|_{\xi=\xi_j} + (\mathbf{b}^\epsilon)^T \mathbf{C}^\epsilon \Big|_\Gamma
 \end{aligned} \tag{22}$$

式中， $\mathbf{C} = [(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) (\mathbf{v}' - \bar{\mathbf{v}}')]^T$ ， $\mathbf{C}^\epsilon = [(\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{a}^\epsilon - \bar{\mathbf{v}}^\epsilon) (\boldsymbol{\Phi}'^T \bar{\mathbf{v}}^\epsilon)]^T$ ，且在边界条件 Γ 上成立。

由修正泛函变分为零可得到下列一组方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{a}^\epsilon} = \frac{EA}{l^3} \int_0^1 \boldsymbol{\Phi}'' (\boldsymbol{\Phi}'')^T d\xi \cdot \mathbf{a}^\epsilon - ql^{r+1} \int_0^1 \boldsymbol{\Phi} \cdot \xi^r d\xi - \\ \sum_i P_i \boldsymbol{\Phi} \Big|_{\xi=\xi_i} - \frac{1}{l} \sum_j M_j \boldsymbol{\Phi}' \Big|_{\xi=\xi_j} + (\mathbf{b}^\epsilon)^T \mathbf{D} \Big|_\Gamma = 0 \\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{b}^\epsilon} = \mathbf{C}^\epsilon \Big|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{23}$$

式中， $\mathbf{D} = [\boldsymbol{\Phi} \quad \boldsymbol{\Phi}']^T$ ，且在边界条件 Γ 上成立。

进而得到

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}^\epsilon & \bar{\mathbf{K}}_{ab}^\epsilon \\ \bar{\mathbf{K}}_{ba}^\epsilon & \bar{\mathbf{K}}_{bb}^\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^\epsilon \\ \mathbf{b}^\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}^\epsilon \\ \bar{\mathbf{v}}^\epsilon \end{bmatrix} \tag{24}$$

式中

$$\bar{\mathbf{K}}^\epsilon = \frac{EI}{l^3} \int_0^1 \boldsymbol{\Phi}'' (\boldsymbol{\Phi}'')^T d\xi \tag{25}$$

$$\bar{\mathbf{P}}^\epsilon = ql^{r+1} \int_0^1 \boldsymbol{\Phi} \cdot \xi^r d\xi + \sum_i P_i \boldsymbol{\Phi} \Big|_{\xi=\xi_i} + \frac{1}{l} \sum_j M_j \boldsymbol{\Phi}' \Big|_{\xi=\xi_j} \tag{26}$$

则有

$$\bar{\mathbf{K}}^\epsilon \mathbf{a}^\epsilon = \bar{\mathbf{P}}^\epsilon \tag{27}$$

其中： $\bar{\mathbf{K}}^\epsilon$ 为小波空间的梁单元刚度矩阵； $\bar{\mathbf{P}}^\epsilon$ 为小波空间的单元载荷列阵； $\bar{\mathbf{v}}^\epsilon$ 为位移列阵。 $\bar{\mathbf{K}}_{ab}^\epsilon$ 、 $\bar{\mathbf{K}}_{ba}^\epsilon$ 、 $\bar{\mathbf{K}}_{bb}^\epsilon$ 可根据平面弯曲梁两端的约束条件来确定，且有 $\bar{\mathbf{K}}_{ab}^\epsilon = (\bar{\mathbf{K}}_{ba}^\epsilon)^T$ ，具体算法为

1) 两端固结

$$\bar{\mathbf{v}}^\epsilon = \begin{pmatrix} \bar{v}_1^\epsilon \\ (\bar{v}_1^\epsilon)' \\ \bar{v}_2^\epsilon \\ (\bar{v}_2^\epsilon)' \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{bb}^\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{ab}^\epsilon = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \Big|_{\xi=0} & \boldsymbol{\Phi}' \Big|_{\xi=0} & \boldsymbol{\Phi} \Big|_{\xi=1} & \boldsymbol{\Phi}' \Big|_{\xi=1} \end{bmatrix}$$

2) 两端铰结

$$\bar{\mathbf{v}}^\epsilon = \begin{pmatrix} \bar{v}_1^\epsilon \\ (\bar{v}_1^\epsilon)'' \\ \bar{v}_2^\epsilon \\ (\bar{v}_2^\epsilon)'' \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{bb}^\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

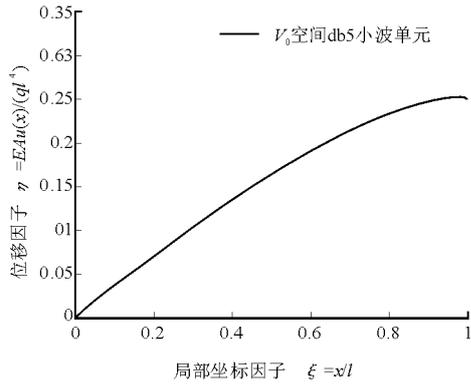
$$\bar{\mathbf{K}}_{ab}^\epsilon = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \Big|_{\xi=0} & \boldsymbol{\Phi}'' \Big|_{\xi=0} & \boldsymbol{\Phi} \Big|_{\xi=1} & \boldsymbol{\Phi}'' \Big|_{\xi=1} \end{bmatrix}$$

3) 左端固结、右端铰结

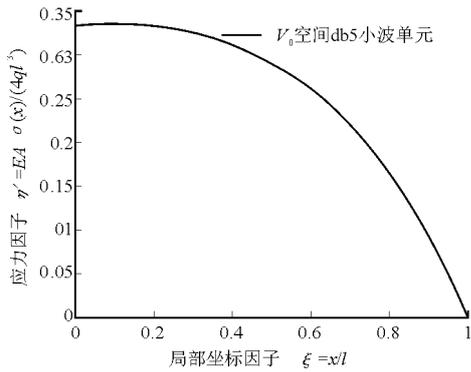
$$\bar{\mathbf{v}}^\epsilon = \begin{pmatrix} \bar{v}_1^\epsilon \\ (\bar{v}_1^\epsilon)' \\ \bar{v}_2^\epsilon \\ (\bar{v}_2^\epsilon)'' \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{bb}^\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{ab}^\epsilon = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \Big|_{\xi=0} & \boldsymbol{\Phi}' \Big|_{\xi=0} & \boldsymbol{\Phi} \Big|_{\xi=1} & \boldsymbol{\Phi}'' \Big|_{\xi=1} \end{bmatrix}$$

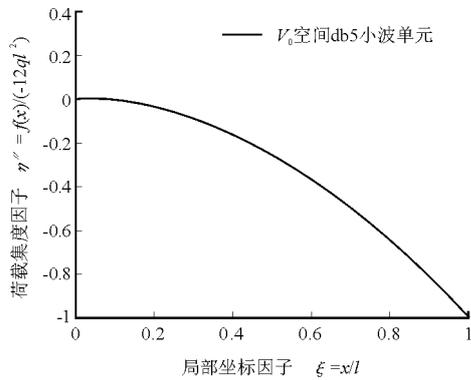
4) 左端固结、右端自由



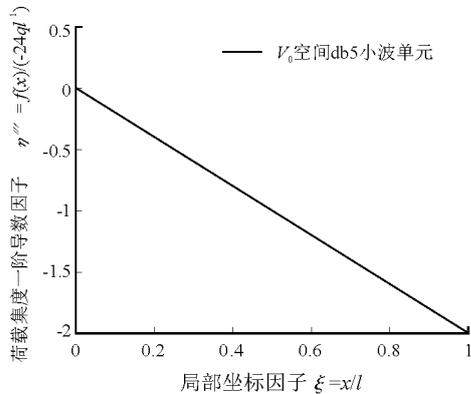
(a) 非线性荷载弹性杆位移曲线图



(b) 非线性荷载弹性杆应力图



(c) 非线性荷载弹性杆荷载集度分布图



(d) 非线性荷载弹性杆荷载集度一阶导数分布图

图4 $f(x)=qx^2$ 左端固结、右端自由弹性拉压杆计算结果

表1 左端固结、右端自由弹性拉压杆数值计算结果
(非线性荷载, 对应图4)

计算位置 ($\times l$)	η (位移因子)		η' (应力因子)	
	理论解	条件小波解	理论解	条件小波解
0	0	0.000000000	0.3333333	0.3333333820
0.25	0.0830078125	0.0830078125	0.328125	0.3281249912
0.5	0.1614583333	0.1614583335	0.291666667	0.2916666648
0.75	0.2236328125	0.2236328125	0.192708333	0.1927083324
1	0.25	0.2500000000	0	0.0000000018

计算位置 ($\times l$)	$\eta^{(4)}$ (荷载集度因子)	
	理论解	条件小波解
0	0	0.0000033420
0.25	-0.0625	-0.0625007642
0.5	-0.25	-0.2499999887
0.75	-0.5625	-0.5625000138
1	-1	-0.9999999711

3.2 平面弯曲梁

以两端固结, 受线性荷载的平面弯曲梁为例 (图5), 采用具有5阶消失矩的 db5 小波尺度函数作为基函数。挠度、弯矩、剪力及荷载集度的计算结果如表2所示, 图6显示各项计算结果与解析解的对比情况。

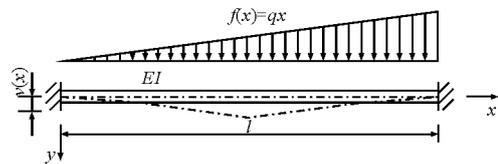


图5 $f(x)=qx$ 两端固结平面弯曲梁

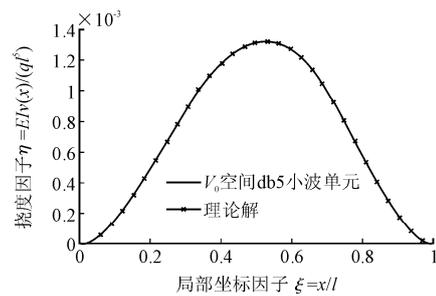


图6(a) 平面弯曲梁挠度曲线图

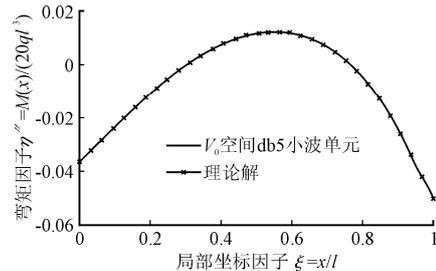


图6(b) 平面弯曲梁弯矩图

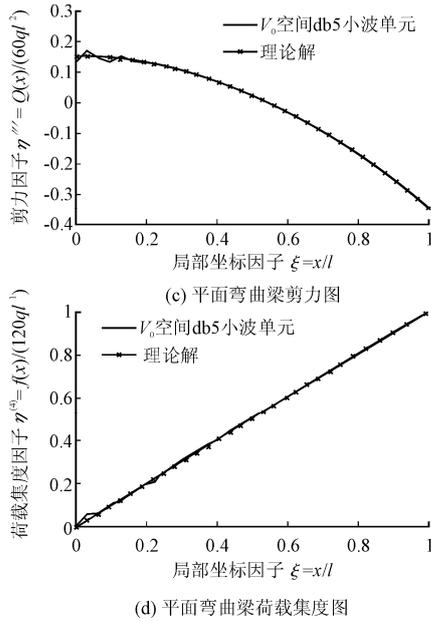


图6 两端固结平面弯曲梁计算结果($f(x)=qx$)

表2 两端固结平面弯曲梁数值计算结果
(线性荷载, 对应图6)

计算位置 ($\times l$)	η (挠度因子) ($\times 10^{-2}$)		η' (弯矩因子) ($\times 10^{-1}$)	
	理论解	条件小波解	理论解	条件小波解
0	0.000000	0.000000	-0.33333333	-0.33321635
0.25	0.06591797	0.06591786	0.01562500	0.01561538
0.5	0.13020833	0.13020826	0.20833333	0.20834514
0.75	0.08056641	0.08056651	0.08854167	0.08854580
1	0.000000	0.000000	-0.500000	-0.50000026

计算位置 ($\times l$)	η' (剪力因子)		$\eta^{(4)}$ (荷载集度因子)	
	理论解	条件小波解	理论解	条件小波解
0	0.15000000	0.14363993	0.00000000	0.00213659
0.25	0.11875000	0.11864388	0.25000000	0.25022282
0.5	0.02500000	0.02479770	0.50000000	0.49998411
0.75	-0.13125000	-0.13117249	0.75000000	0.74993580
1	-0.35000000	-0.34995783	1.00000000	0.99997384

3.3 计算结果分析

通过对表1所列数值进行条件小波解与理论解的相对误差计算, 可知在弹性拉压杆算例中: 位移的最大相对误差在跨中, 为 $1.24 \times 10^{-7}\%$; 应力的最大相对误差在左端固结处, 为 $2.46 \times 10^{-5}\%$; 荷载集度的最大相对误差在跨中, 为 $1.22 \times 10^{-3}\%$ 。

通过对表2所列数值进行条件小波解与理论解的相对误差计算, 可知在平面弯曲梁算例中: 挠度的最大相对误差在 $l/4$ 处, 为 $1.67 \times 10^{-4}\%$; 弯矩的最大相对误差在左端固结处, 为 $3.51 \times 10^{-2}\%$; 剪力

的最大相对误差在左端固结处, 为 4.24% ; 荷载集度的最大相对误差在跨中, 为 $8.91 \times 10^{-2}\%$ 。

从计算精度方面分析, 文中算例仅采用了一个单元进行计算, 计算结果为位移、应力、荷载集度及荷载集度一阶导数, 文中将计算结果与理论解进行了比较。如采用常规的 Daubechies 小波法计算^[3-5], 所得结果只是各节点的位移值, 其挠曲线为折线, 无法进一步计算弯矩、剪力及荷载集度。另外, 传统有限元法一般采用线性插值, 如只划分一个单元, 对文中算例无法进行正常求解。

从计算量方面分析, 本文中提出的新方法在求解小波系数之前需要求解出尺度函数、小波函数及其各阶导数在各点的离散值, 因此与传统的有限元法相比, 计算量有所增加。但由于该离散值为常量, 一次计算后即可重复使用, 因此不需反复计算。而常规 Daubechies 小波有限元法虽然可直接计算出单元内部各节点位移, 不需计算小波系数, 但却需要借助位移转换矩阵, 而位移转换矩阵不是固定矩阵, 每次都需要重新计算, 且性态不稳定, 求解时易发生奇异, 严重影响计算结果的精度。

4 结论

- 1) 本文针对结构中常用构件——弹性拉压杆及平面弯曲梁, 构建出 Daubechies 条件小波有限元法并进行了典型算例的计算。
- 2) 考虑到具有低阶消失矩的小波单元求解速度快的特点, 在同一构件的计算中可根据需要灵活选取具有不同消失矩的小波单元, 以在保证求解精度的同时提高求解效率。
- 3) 通过典型算例将 Daubechies 条件小波有限元法计算值与理论解进行了对比, 结果表明: 在弹性拉压杆算例中, 位移、应力、荷载集度的相对误差均在 $1.22 \times 10^{-3}\%$ 以内; 在平面弯曲梁算例中, 挠度、弯矩、荷载集度的相对误差均在 $8.91 \times 10^{-2}\%$ 以内。

按照本文所研究的 Daubechies 条件小波有限元法的构建思路, 结合二维 Daubechies 小波尺度函数的构建, 可将该法进一步拓展到空间梁、板、壳等结构的计算分析中, 目前正在进一步研究中。

参考文献

[1] 程正兴. 小波分析与应用实例[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2006.

- [2] Albert Cohen. Numerical analysis of wavelet methods[M]. Amsterdam: Elsevier Press, 2003.
- [3] 何正嘉, 陈雪峰, 李兵, 等. 小波有限元理论及其工程应用[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [4] 马军星. Daubechies 小波有限元理论及工程应用研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2003.
- [5] 韩建刚. 小波有限元理论及其在结构工程中的应用[D]. 西安: 西安建筑科技大学, 2003.
- [6] 黄义, 韩建刚. 薄板小波有限元理论及其应用[J]. 计算力学学报, 2006, 23 (1): 76-80.
- [7] 马军星, 王进. 弹性地基梁小波有限元分析[J]. 系统仿真学报, 2007, 19 (10): 2183-2185.
- [8] 周又和, 王记增, 郑晓静. 小波伽辽金有限元法在梁板结构中的应用[J]. 应用数学和力学, 1998, 19 (8): 697-706.
- [9] Ko J, Kurdila A J, Pilant M S. A class of finite element methods based on orthonormal, compactly supported wavelets[J]. Computational Mechanics, 1995, 16: 235-244.
- [10] Ma Junxing, Xue Jijun, He Zhengjia, et al. A study of the construction and application of a Daubechies wavelet-based beam element[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2003, 39 (10): 965-975.
- [11] Chen Xuefeng, Yang Shengjun, He Zhengjia, et al. The construction of wavelet finite element and its application[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2004, 40: 541-554.
- [12] 陈雅琴, 张宏光, 党发宁. 基于弹性地基梁计算的 Daubechies 条件小波 Ritz 法研究[J]. 应用力学学报, 2011, 28 (4): 334-338.
- [13] 陈雅琴. 桥梁结构计算中的广义变分原理——Daubechies 条件小波法研究[D]. 西安: 长安大学, 2008.