第 29 卷 第 4 期 应 用 力 学 学 报 Vol.29 No.4
2012 年 8 月 CHINESE JOURNAL OF APPLIED MECHANICS Aug. 2012

文章编号：1000- 4939(2012) 04-0361-07

含万向铰偏斜旋转轴的组合共振及其稳定性分析

朱拥勇 王德石

（海军工程大学兵器工程系 430033 武汉）

摘要：基于欧拉方程推导出了含万向铰偏斜旋转轴的横向振动模型，利用多尺度方法对该模型进行求解，得出了该偏斜系统可能出现的多种共振模式，进而对含万向铰偏斜轴系横向振动和型组合共振、差型组合共振进行稳定性分析，并对该类偏斜系统横向振动和型组合共振响应进行数值计算与仿真，检验所得稳定性理论分析结果。研究表明：对于和型组合共振而言，其稳定性边界与输入扭矩 T_0、支撑轴承安装位置 l、轴承刚度 K_{x2} 和 K_{y2} 等因素有关；当轴承安装位置距万向铰中心较近或者轴承弹簧刚度系数较小时，系统在频率(ω_{10}+ ω_{20})/2 附近产生和型组合共振的区域减小，即能够抑制系统和型组合共振的产生。该研究可为偏斜轴系振动与噪声抑制提供理论支持。

关键词：万向铰；偏斜轴；横向振动；组合共振；稳定性

中图分类号：TH133.4 **文献标识码**：A

1 引 言

万向铰被普遍应用于汽车传动轴、旋转驱动线等机械系统。在该转子系统中，由万向铰引起的角速度波动会导致系统的非线性振动及其运动失稳问题；在由制造或安装过程中而产生的实际误差偏斜的作用下，这种振动形式表现出更复杂的特性[1]，因此，研究含万向铰偏斜轴系的扭转和横向振动可为偏斜系统振动机理分析、振动控制及降噪奠定理论基础。

从偏斜的定义与分类看，对于横向振动问题，可以从考虑万向铰结构偏斜以及考虑实际误差偏斜这两方面分别进行研究，也可以考虑当两种偏斜情形共存时对此问题进行研究。文献[2]~[3]从传统的受力分析出发，以万向铰传递力矩的横向分量作为激励，从理论和实验两方面对含万向铰偏斜旋转轴的横向振动进行了研究，重点讨论了由派生力矩引起的从动轴的强迫振动频率和共振等问题；并进一步指出，当偏斜转子系统固有频率与驱动轴转动角速度成偶数倍关系时，从动轴将会产生横向振动的共振。在上述研究基础上，文献[4]简单给出了含万向铰偏斜旋转轴的非线性横向振动模型，其中含有正弦外激励和参数激励，利用 Bogoliubov-Mitropolsky 方法得到了近似解，并用实验进行了验证。该理论模型以线位移表示横向振动，推导与求解过于简单，且并未从偏斜的角度进行分析与研究。文献[5]完全忽略了万向铰结构偏斜和实际误差偏斜，在理想情况下对由卡丹铰驱动的转子系统进行了横向振动研究；文献[6]~[9]提出了考虑转子系统实际误差偏斜的重要性，并从建模、求解、实验等方面对此进行了深入系统地研究。国内方面，万向铰偏斜转子系统振动的研究并不多见，更多的研究立足于大型转子系统，并取得了丰富的研究成果。对于仅考虑万

基金项目：国家自然科学基金(50875259)；教育部留学回国人员科研启动基金 来稿日期：2011-09-20 修回日期：2012-06-04
第一作者简介：朱拥勇，男，1981 年生，博士，海军工程大学兵器工程系，讲师；研究方向——机械动力学、非线性振动。E-mail：zyy99515@126.com

向铰结构偏斜以及考虑两种偏斜同时存在时旋转轴系横向振动的研究很少，因此，有必要对存在万向铰固有结构偏斜的旋转轴系横向振动及其稳定性进行分析，并与上述已有研究成果进行综合与对比，从而全面系统地反映出含万向铰偏斜旋转轴横向振动的动力学特性。

本文主要研究了含万向铰偏斜旋转轴横向振动的组合共振模式及其稳定性问题。首先推导出含万向铰偏斜旋转轴的横向振动模型并对其进行求解，得出该偏斜系统可能出现的多种共振模式，进而对含万向铰偏斜轴系横向振动的各种共振模式进行稳定性理论分析与数值仿真。

2 含万向铰偏斜旋转轴的横向振动模型

当只考虑存在万向铰固有结构偏斜时，驱动轴与从动轴处于同一平面内，且两轴之间的夹角用φ表示。当驱动轴转动时，在万向铰的作用下，从动轴产生横向振动(如图 1 所示)，用广义坐标(角位移)α_L和β_L描述从动轴的横向振动。

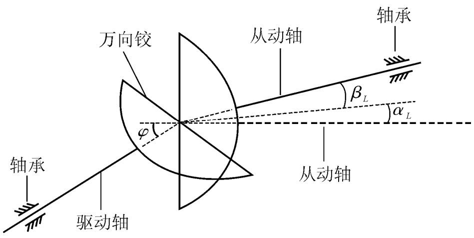

图 1 偏斜旋转轴横向振动的广义坐标

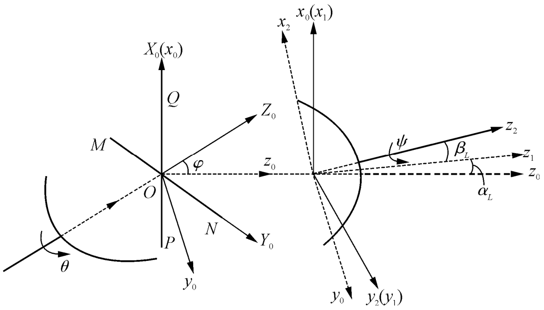

图 2 偏斜轴系横向振动的运动坐标系

如图 2 所示，在驱动轴、从动轴初始位置、产生横向振动的从动轴上分别建立坐标系 $X_0Y_0Z_0$、$x_0y_0z_0$、$x_2y_2z_2$。其中：坐标系$X_0Y_0Z_0$和$x_0y_0z_0$为固定坐标系；$x_2y_2z_2$为固连于从动轴但不随从动轴一起转动的运动坐标系；所有坐标系的原点均为 O 点。坐标系$X_0Y_0Z_0$可由坐标系$x_0y_0z_0$绕x_0轴旋转φ角得到；坐标系$x_2y_2z_2$可由坐标系$x_0y_0z_0$先绕x_0轴旋转α_L角再绕y_1轴旋转β_L角而得到。坐标系$X_0Y_0Z_0$、$x_0y_0z_0$、$x_2y_2z_2$上相应坐标轴的单位向量分别用($\boldsymbol{I}_0$，$\boldsymbol{J}_0$，$\boldsymbol{K}_0$)、($\boldsymbol{i}_0$，$\boldsymbol{j}_0$，$\boldsymbol{k}_0$)、($\boldsymbol{i}_2$，$\boldsymbol{j}_2$，$\boldsymbol{k}_2$)表示。各坐标系之间的坐标变换关系可由相应的方向余弦矩阵$\boldsymbol{C}_\varphi$、$\boldsymbol{C}_{\alpha L}$、$\boldsymbol{C}_{\beta L}$表示[10]。

令运动坐标系 $x_2y_2z_2$ 相对于固定坐标系 $x_0y_0z_0$ 的转动角速度为$\boldsymbol{\omega}_2$，其在运动坐标系$x_2y_2z_2$中的 3 个分量分别为ω_{x2}、ω_{y2}、ω_{z2}，则万向铰驱动的偏斜旋转轴的横向振动模型可表示为

$$J_{x2,O}\dot{\omega}_{x2}+J_{z2,O}\dot{\psi}\omega_{y2}+(J_{z2,O}-J_{y2,O})\omega_{y2}\omega_{z2}=M_{x2,O} \tag{1}$$

$$J_{y2,O}\dot{\omega}_{y2}-J_{z2,O}\dot{\psi}\omega_{x2}+(J_{x2,O}-J_{z2,O})\omega_{x2}\omega_{z2}=M_{y2,O} \tag{2}$$

其中：$J_{x2,O}$、$J_{y2,O}$、$J_{z2,O}$分别为从动轴绕运动坐标系O-$x_2y_2z_2$中Ox_2、Oy_2、Oz_2轴的转动惯量；$M_{x2,O}$、$M_{y2,O}$分别表示Ox_2、Oy_2轴方向上相对于原点O的力矩。

由于向量$\boldsymbol{i}_0$在坐标系 $x_2y_2z_2$ 中可表示为$\boldsymbol{i}_0=\cos\beta_L\boldsymbol{i}_2+\sin\beta_L\boldsymbol{k}_2$，根据图 2 中的坐标系旋转关系可得

$$\boldsymbol{\omega}_2=\dot{\alpha}_L\cos\beta_L\boldsymbol{i}_2+\dot{\beta}_L\boldsymbol{j}_2+\dot{\alpha}_L\sin\beta_L\boldsymbol{k}_2 \tag{3}$$

作用于从动轴的外力矩由两部分组成：第一部分为万向铰作用于从动轴上的力矩，该力矩是由驱动力矩引起的；第二部分为轴承力矩，是由从动轴的支撑轴承产生的。若驱动轴在外扭矩T_0的作用下以匀角速度ω旋转，令万向铰作用于从动轴上的力矩为$\boldsymbol{T}=(T_{x2},T_{y2},T_{z2})^{\mathrm{T}}$，其中$T_{x2}$、$T_{y2}$、$T_{z2}$表示力矩在坐标系 O-$x_2y_2z_2$中沿三个坐标轴的分量。若不考虑万向铰的质量、转动惯量以及各种摩擦，力矩$\boldsymbol{T}$的方向必与万向铰十字轴平面垂直。令该方向的单位向量为$\boldsymbol{e}_n$，当主动轴转动θ时，参考文献[6]的求解过程，可得到单位向量$\boldsymbol{e}_n$在坐标系 O-$x_2y_2z_2$中的具体表达式。从而万向铰作用于从动轴上的力矩$\boldsymbol{T}=T\boldsymbol{e}_n$，且其与驱动扭矩$T_0$的关系为

$$T_0=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{K}_0=T\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{K}_0 \tag{4}$$

将轴承处理为互相垂直的两对弹簧与阻尼器，其中：沿x_2轴方向弹簧刚度系数为K_{x2}，阻尼器阻尼系数为C_{x2}；沿 y_2 轴方向弹簧刚度系数为K_{y2}，阻尼器阻尼系数为C_{y2}。这样，轴承力矩就转化为由弹力和阻尼力产生的力矩，而由弹力和阻尼力产生的力矩主要取决于从动轴末端的位移，即从动轴的变形。令：从动轴受到的轴承弹力为$\boldsymbol{F}_s=-K\boldsymbol{d}$；

从动轴受到的阻尼力 $\boldsymbol{F}_d = -C\dot{\boldsymbol{d}}$ 。根据文献[1]，从动轴受到的轴承力矩，即弹力和阻尼力相对于万向铰中心点 O 的力矩分别为

$$\boldsymbol{M}_{s,O} = \overline{OA'} \times \boldsymbol{F}_s = (M_{sx2}, M_{sy2}, M_{sz2})^{\mathrm{T}} = -K_{y2}l^2 \sin\alpha_L \boldsymbol{i}_2 - K_{x2}l^2 \cos\alpha_L \sin\beta_L \boldsymbol{j}_2 \tag{5}$$

$$\boldsymbol{M}_{d,O} = \overline{OA'} \times \boldsymbol{F}_d = (M_{dx2}, M_{dy2}, M_{dz2})^{\mathrm{T}} = -C_{y2}l^2\dot{\alpha}_L \cos\beta_L \boldsymbol{i}_2 - C_{x2}l^2\dot{\beta}_L \boldsymbol{j}_2 \tag{6}$$

将式(3)～式(6)代入式(1)和式(2)中，即可得到横向振动模型的非线性常微分方程。在实际工程中，由于从动轴产生横向振动的角位移较小，以 $\cos\alpha_L \approx 1$、$\sin\alpha_L \approx \alpha_L$、$\cos\beta_L \approx 1$、$\sin\beta_L \approx \beta_L$ 进行替换，并在化简过程中略去高次项，令：$J_{x2,O} = J_{y2,O} = J_0$；$J_{z2,O} = \kappa J_0$ (其中 κ 为常数)。经线性化处理并化简后可得到其横向振动模型的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}\ddot{\alpha}_L \\ \ddot{\beta}_L\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dfrac{C_{y2}l^2}{J_0} & \kappa\dot{\psi} \\ -\kappa\dot{\psi} & \dfrac{C_{x2}l^2}{J_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\alpha}_L \\ \dot{\beta}_L\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dfrac{K_{y2}l^2}{J_0} & 0 \\ 0 & \dfrac{K_{x2}l^2}{J_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_L \\ \beta_L\end{pmatrix} + \frac{T_0\sin 2\theta}{2J_0}\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_L \\ \beta_L\end{pmatrix} +$$
$$\frac{T_0\csc\varphi\cos 2\theta}{4J_0}\begin{pmatrix}0 & 3-\cos 2\varphi \\ 2\cos 2\varphi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_L \\ \beta_L\end{pmatrix} + \frac{T_0\csc\varphi}{4J_0}\begin{pmatrix}0 & \cos 2\varphi + 1 \\ -2\cos 2\varphi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_L \\ \beta_L\end{pmatrix}$$
$$= -\frac{T_0}{2J_0}\begin{pmatrix}\tan\varphi\sin 2\theta \\ \sin\varphi(1-\cos 2\theta)\end{pmatrix} \tag{7}$$

式(7)即为存在万向铰结构偏斜($\varphi \neq 0$)时旋转轴的横向振动方程。与文献[5]中理想情况下含万向铰旋转轴横向振动模型($\varphi \neq 0$)相比，式(7)将原模型进行了推广，使其更符合实际工况。

3　偏斜旋转轴横向振动的多尺度解

考虑万向铰固有结构偏斜角度 φ 较小的情况，取近似 $\cos\varphi \approx 1$、$\sin\varphi \approx \varphi$，且令：$T_0 = \varepsilon T_0'$；$\varGamma = \varepsilon\varGamma'$；$C_{x2} = \varepsilon C_{x2}'$；$C_{y2} = \varepsilon C_{y2}'$；$\kappa = \varepsilon\kappa'$，则式(7)可变换为

$$\begin{pmatrix}\ddot{\alpha}_L \\ \ddot{\beta}_L\end{pmatrix} + \varOmega_0^2\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}\alpha_L \\ \beta_L\end{pmatrix} = \varepsilon\left[-\varGamma'\varOmega_0^2\boldsymbol{D}_0 - \varOmega_0\boldsymbol{C}'\begin{pmatrix}\dot{\alpha}_L \\ \dot{\beta}_L\end{pmatrix} + \varGamma'\varOmega_0^2(\boldsymbol{E}_0\sin 2\omega t + \boldsymbol{E}_1\cos 2\omega t + \boldsymbol{E}_2)\begin{pmatrix}\alpha_L \\ \beta_L\end{pmatrix}\right] \tag{8}$$

其中

$$\boldsymbol{E}_1 \approx \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_2 \approx \begin{pmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{D}_0 \approx \begin{pmatrix}\sin 2\omega t \\ 1-\cos 2\omega t\end{pmatrix}\varphi,$$

$$\boldsymbol{C} = \varepsilon\boldsymbol{C}' = \varepsilon\begin{pmatrix}\dfrac{C_{x2}'l^2}{J_0\Omega_0} & -\kappa'\nu \\ -\kappa'\nu & \dfrac{C_{y2}'l^2}{J_0\Omega_0}\end{pmatrix}$$

记

$$\omega_{10}^2 = \varOmega_0^2 K_{11} = K_{y2}l^2 / J_0,$$

$$\omega_{20}^2 = \varOmega_0^2 K_{22} = K_{x2}l^2 / J_0$$

如果 $\begin{pmatrix}\alpha_L \\ \beta_L\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_{L0}(T_0,T_1) + \varepsilon\alpha_{L1}(T_0,T_1) \\ \beta_{L0}(T_0,T_1) + \varepsilon\beta_{L1}(T_0,T_1)\end{pmatrix}$，用多尺度法，化简并展开后令 ε 的同次幂的系数为零，可得各阶近似的线性偏微分方程组分别为

$$D_0^2\alpha_{L0} + \varOmega_0^2K_{11}\alpha_{L0} = D_0^2\alpha_{L0} + \omega_{10}^2\alpha_{L0} = 0 \tag{9}$$

$$D_0^2\beta_{L0} + \varOmega_0^2K_{22}\beta_{L0} = D_0^2\beta_{L0} + \omega_{20}^2\beta_{L0} = 0 \tag{10}$$

$$\begin{aligned}D_0^2\alpha_{L1} + \varOmega_0^2K_{11}\alpha_{L1} &= D_0^2\alpha_{L1} + \omega_{10}^2\alpha_{L1} \\ &= -2D_0D_1\alpha_{L0} - \frac{C_{x2}'l^2}{J_0}D_0\alpha_{L0} + \kappa'\nu\Omega_0D_0\beta_{L0} - \\ &\quad \varGamma'\varOmega_0^2\varphi\sin 2\omega T_0 - \varGamma'\varOmega_0^2\alpha_{L0}\sin 2\omega T_0 + \\ &\quad \varGamma'\varOmega_0^2\beta_{L0}(\cos 2\omega T_0 + 1)\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}D_0^2\beta_{L1} + \varOmega_0^2K_{22}\beta_{L1} &= D_0^2\beta_{L1} + \omega_{20}^2\beta_{L1} \\ &= -2D_0D_1\beta_{L0} + \kappa'\nu\varOmega_0D_0\alpha_{L0} - \frac{C_{y2}'l^2}{J_0}D_0\beta_{L0} - \\ &\quad \varGamma'\varOmega_0^2\varphi(1-\cos 2\omega T_0) + \varGamma'\varOmega_0^2\alpha_{L0}(\cos 2\omega T_0 - 1) + \\ &\quad \varGamma'\varOmega_0^2\beta_{L0}\sin 2\omega T_0\end{aligned} \tag{12}$$

将零次近似方程式(9)和式(10)的解代入一次近似方程方程式(11)和式(12)的右边，$\cos 2\omega t$ 和

$\sin 2\omega t$ 分别用 $(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega T_0}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega T_0})/2$ 和 $(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega T_0}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega T_0})/2\mathrm{j}$ 代替可得

$$\begin{aligned}
&D_0^2\alpha_{L1}+\omega_{10}^2\alpha_{L1}=-2\mathrm{j}\omega_{10}D_1A_\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{10}T_0}-\\
&\quad \mathrm{j}\omega_{10}\frac{C'_{x2}l^2}{J_0}A_\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{10}T_0}+\mathrm{j}\omega_{20}\kappa'\nu\Omega_0A_\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{20}T_0}+\\
&\quad \Gamma'\Omega_0^2A_\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{20}T_0}-\frac{1}{2\mathrm{j}}\Gamma'\Omega_0^2\varphi\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega T_0}+\\
&\quad \frac{1}{2\mathrm{j}}\Gamma'\Omega_0^2\varphi\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega T_0}-\frac{1}{2\mathrm{j}}\Gamma'\Omega_0^2A_\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\omega+\omega_{10})T_0}+\\
&\quad \frac{1}{2\mathrm{j}}\Gamma'\Omega_0^2\bar{A}_\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\omega-\omega_{10})T_0}+\frac{1}{2}\Gamma'\Omega_0^2A_\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\omega+\omega_{20})T_0}+\\
&\quad \frac{1}{2}\Gamma'\Omega_0^2\bar{A}_\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\omega-\omega_{20})T_0}
\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&D_0^2\beta_{L1}+\omega_{20}^2\beta_{L1}=-2\mathrm{j}\omega_{20}D_1A_\beta\mathrm{e}^{j\omega_{20}T_0}+\\
&\quad \mathrm{j}\omega_{10}\kappa'\nu\Omega_0A_\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{10}T_0}-\mathrm{j}\omega_{20}\frac{C'_{y2}l^2}{J_0}A_\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{20}T_0}-\\
&\quad \Gamma'\Omega_0^2A_\alpha\mathrm{e}^{j\omega_{10}T_0}-\Gamma'\Omega_0^2\varphi+\frac{1}{2}\Gamma'\Omega_0^2\varphi\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega T_0}+\\
&\quad \frac{1}{2}\Gamma'\Omega_0^2\varphi\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega T_0}+\frac{1}{2}\Gamma'\Omega_0^2A_\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\omega+\omega_{10})T_0}+\\
&\quad \frac{1}{2}\Gamma'\Omega_0^2\bar{A}_\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\omega-\omega_{10})T_0}+\frac{1}{2j}\Gamma'\Omega_0^2A_\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\omega+\omega_{20})T_0}-\\
&\quad \frac{1}{2j}\Gamma'\Omega_0^2\bar{A}_\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\omega-\omega_{20})T_0}
\end{aligned}\tag{14}$$

在一次近似方程式(13)和式(14)中，当 $\omega=\dfrac{\omega_{i0}\mp\omega_{j0}}{2}$(其中 $i,j=1,2$ 且 $i\neq j$)时，均可使系统产生共振而出现久期项，这表明该系统有多个组合共振频率，$\omega=\dfrac{\omega_{10}+\omega_{20}}{2}$ 的共振为和型组合共振，$\omega=\dfrac{\omega_{10}-\omega_{20}}{2}$($\omega_{10}>\omega_{20}$)的共振为差型组合共振。

4 和型组合共振的稳定性

以下研究偏斜旋转轴横向振动产生和型组合共振($\omega=\dfrac{\omega_{10}+\omega_{20}}{2}$)时的稳定性条件。一般情况下，支撑轴承阻尼较小，所以为重点研究轴承刚度对系统共振及稳定性边界的影响，一般假设从动轴支撑轴承无阻尼存在，即 $C_{x2}=0$、$C_{y2}=0$。令

$$2\omega=\omega_{10}+\omega_{20}+\varepsilon\sigma \tag{15}$$

将上式代入一次近似方程式(11)和式(12)的右边，将 εT_0 以 T_1 代替，为避免久期项出现，复振幅 A_α 和 A_β 必须满足

$$D_1A_\alpha+\frac{\mathrm{j}}{4\omega_{10}}\Gamma'\Omega_0^2\bar{A}_\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sigma T_1}=0 \tag{16}$$

$$D_1A_\beta+\frac{\mathrm{j}}{4\omega_{20}}\Gamma'\Omega_0^2\bar{A}_\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sigma T_1}=0 \tag{17}$$

将复振幅 A_α 和 A_β 写为指数形式为：$A_\alpha=a_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\lambda T_1}$；$A_\beta=a_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\lambda+\sigma)T_1}$，并代入方程式(16)和式(17)中，等式左右两边均消去 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\lambda T_1}$ 可得

$$\lambda a_1-\frac{\Gamma'\Omega_0^2}{4\omega_{10}}a_2=0\,,\ \frac{\Gamma'\Omega_0^2}{4\omega_{20}}a_1+(\lambda+\sigma)a_2=0 \tag{18}$$

根据方程组的非零解条件，解出两个根分别为

$$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\left[\sigma\pm\sqrt{\sigma^2-\frac{\Gamma'^2\Omega_0^4}{4\omega_{10}\omega_{20}}}\right] \tag{19}$$

当 λ_1 和 λ_2 满足 $\mathrm{Im}(\lambda_i)=0$，即 λ_1 和 λ_2 为实根时，方程组式(16)和式(17)的零解稳定，此时，对式(19)应满足

$$\sigma^2>\frac{\Gamma'^2\Omega_0^4}{4\omega_{10}\omega_{20}}\quad 或\quad |\sigma|>\frac{\Gamma'\Omega_0^2}{2\sqrt{\omega_{10}\omega_{20}}} \tag{20}$$

又由于

$$\Omega_0=\sqrt{(K_{x2}+K_{y2})l^2/(2J_0)}\,,$$
$$\omega_{10}^2=\Omega_0^2K_{11}=K_{y2}l^2/J_0\,,$$
$$\omega_{20}^2=\Omega_0^2K_{22}=K_{x2}l^2/J_0\,,$$
$$\Gamma'=\frac{T'_0}{2J_0\Omega_0^2}\,,\ K_{11}=\frac{K_{y2}l^2}{J_0\Omega_0^2}=\frac{2K_{y2}}{(K_{x2}+K_{y2})}\,,$$
$$K_{22}=\frac{K_{x2}l^2}{J_0\Omega_0^2}=\frac{2K_{x2}}{(K_{x2}+K_{y2})}$$

将上述各式代入式(20)，可得

$$|\sigma|>\frac{T'_0}{2l^2\sqrt{K_{x2}K_{y2}}} \tag{21}$$

由于 $\sigma=\pm T'_0/(2l^2\sqrt{K_{x2}K_{y2}})$ 对应于稳定与不稳定之间的临界状况，因此可代入式(15)以确定(ω，ε)参数平面内的稳定图，即

$$\omega\pm\varepsilon\frac{T'_0}{4l^2\sqrt{K_{x2}K_{y2}}}=\frac{\omega_{10}+\omega_{20}}{2} \tag{22}$$

此近似的稳定图边界由两条直线组成，如图 3 所示，参数共振在不稳定区内产生。

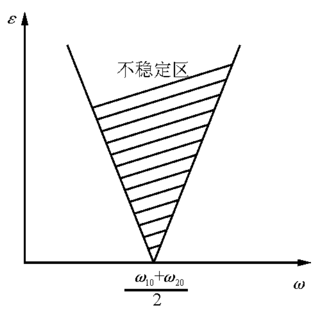

图 3　和型组合共振的稳定图

5　差型组合共振的稳定性

以下研究偏斜旋转轴横向振动产生差型组合共振($\omega = \dfrac{\omega_{10}-\omega_{20}}{2}$，$\omega_{10} > \omega_{20}$)时的稳定性条件。令

$$2\omega = \omega_{10} - \omega_{20} + \varepsilon\sigma \tag{23}$$

利用与和型组合共振相同的稳定性分析方法，将复振幅 A_α 和 A_β 写成指数形式为：$A_\alpha = a_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda T_1}$；$A_\beta = a_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\lambda-\sigma)T_1}$。于是可得：$\lambda a_1 + \dfrac{\Gamma' \Omega_0^2}{4\omega_{10}} a_2 = 0$；$\dfrac{\Gamma' \Omega_0^2}{4\omega_{20}} a_1 + (\lambda - \sigma) a_2 = 0$。根据该方程组的非零解条件，解出这两个根分别为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + \frac{\Gamma'^2 \Omega_0^4}{4\omega_{10}\omega_{20}}}\right] \tag{24}$$

由式(24)决定的根 λ_1 和 λ_2 恒满足 $\mathrm{Im}(\lambda_i) = 0$，满足实根条件，这说明在频率 $\dfrac{\omega_{10}-\omega_{20}}{2}$ 附近无论驱动轴转速如何变化，系统总是稳定的，不会产生差型组合共振。

6　横向振动响应仿真与分析

利用龙格-库塔法求解方程式(7)，可得到偏斜旋转轴横向振动的时间响应。考虑 $K_{x2} < K_{y2}$ 的情形，对横向振动的和型组合共振进行数值计算与仿真，检验上节所得稳定性的分析结果。

取：φ=5°=0.0873rad；l=0.46m；从动轴密度 ρ=7.83×10^3kg/m^3；从动轴横截面半径 R=2.40×10^{-3}m；κ=3.96×10^{-5}；T_0=0.3N·m；C_{x2}=C_{y2}=1×10^{-3}N/m·s^{-1}。当 K_{x2}=7.740N/m、K_{y2}=23.220N/m 时，有：J_0=4.597×10^3kg·m^2；Ω_0^2 = 7.125×10^2(rad/s)^2；Γ=4.580×10^{-2}；K_{11}=1.5；K_{22}=0.5；C_{11}= C_{22}=0.0017；$\omega_{10}^2 = 1.069\times10^3(\mathrm{rad/s})^2$；$\omega_{20}^2 = 3.563\times10^3(\mathrm{rad/s})^2$。

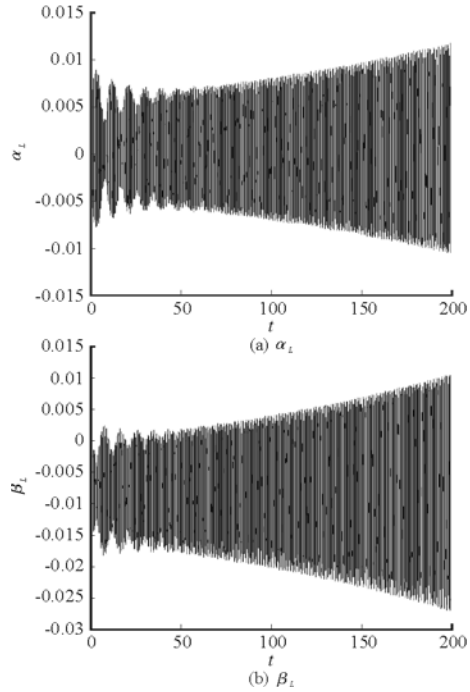

图 4　和型组合共振响应($K_{x2} \neq K_{y2}$，ω=25.9rad/s)

当 K_{x2}=7.74N/m 且 K_{y2}=23.22N/m 时可得：ω_{10}=32.692rad/s；ω_{20}=18.876rad/s，于是 (ω_{10}+ω_{20})/2=25.784rad/s。若ω=25.9rad/s，其对应的横向振动响应 α_L 和 β_L 如图 4 所示，系统产生和型组合共振。其中：α_L 和 β_L 的单位为弧度(rad)；时间 t 的单位为秒(s)，以下所有图示中的单位均与此相同。

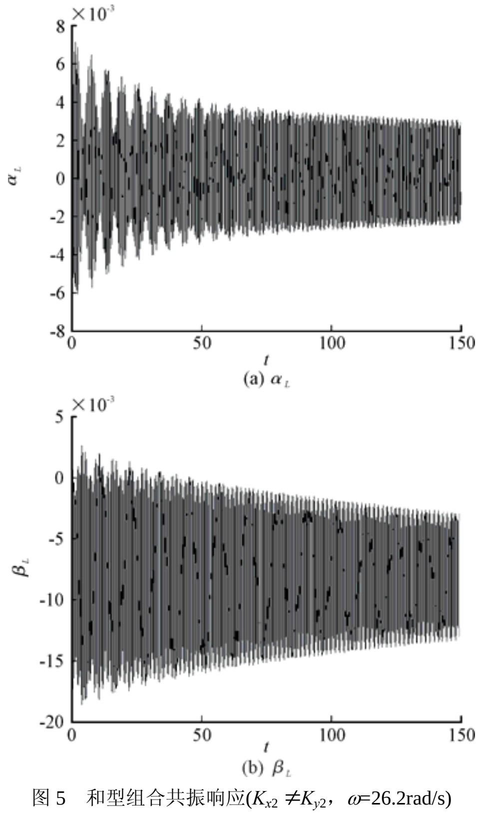

图 5　和型组合共振响应($K_{x2} \neq K_{y2}$，ω=26.2rad/s)

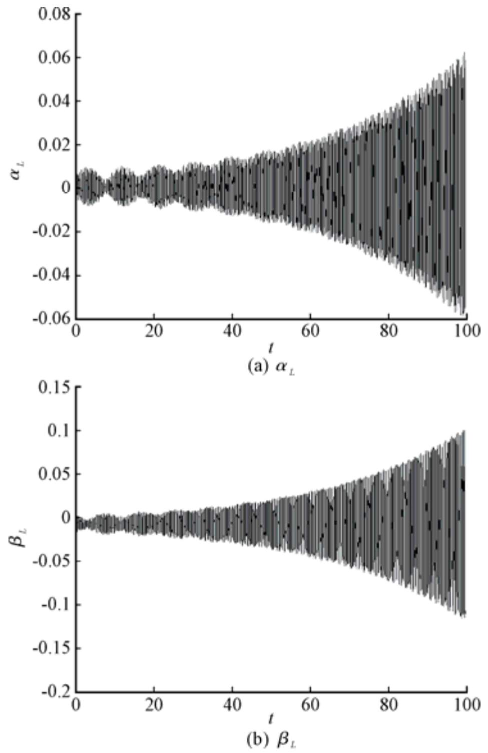

图6 和型组合共振响应($K_{x2}\neq K_{y2}$，$C_{x2}=C_{y2}=0$，ω=25.9rad/s)

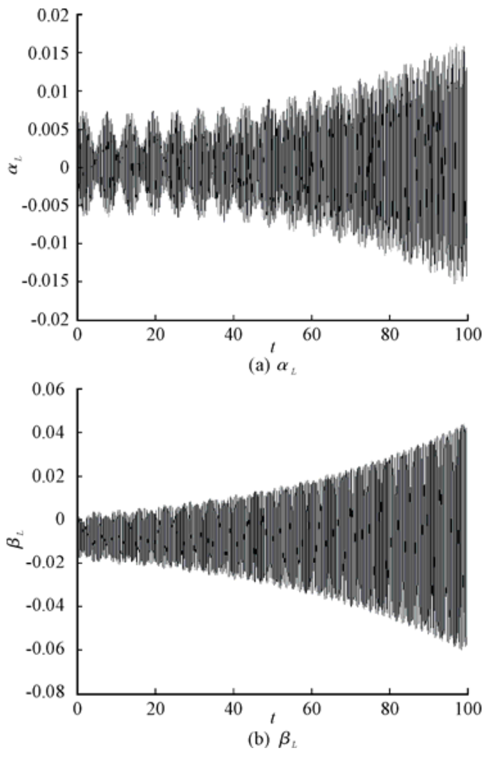

图7 和型组合共振响应($K_{x2}\neq K_{y2}$，$C_{x2}=C_{y2}=0$，ω=26.2rad/s)

若$\omega=26.2$rad/s，其对应的横向振动响应α_L和β_L如图5所示。由此可见α_L、β_L的振动幅值较小，说明系统未产生和型组合共振。

若不考虑支撑轴承阻尼，即$C_{x2}=C_{y2}=0$，则$(\omega_{10}+\omega_{20})/2$=25.784rad/s。若$\omega=25.9$rad/s，根据稳定性判别条件式(20)和式(21)可知，系统产生组合共振，其对应的横向振动响应α_L和β_L如图6所示。

若不考虑支撑轴承阻尼时，同样取$\omega=26.2$rad/s，根据稳定性判别条件式(20)和式(21)可知，系统此时仍然是不稳定的，会产生和型组合共振，其对应的横向振动响应α_L和β_L如图7所示。而此时对于存在轴承阻尼的情形，$\omega=26.2$rad/s时系统是稳定的。

以上对各种不同条件下的和型组合共振仿真研究结果与前面所得到的不同共振情形的稳定性分析结果相一致，证明该稳定性理论结果是正确的。

7 结 论

本文研究了含万向铰偏斜旋转轴横向振动的组合共振模式及其稳定性问题，由上述研究可得以下结论。

1) 当驱动轴旋转角速度接近于频率$(\omega_{10}+\omega_{20})/2$时，系统产生和型组合共振。

2) 无论驱动轴转速如何变化，系统不会产生差型组合共振。

3) 根据稳定性条件式(20)，产生和型组合共振时，调谐参数σ与输入扭矩T_0、支撑轴承安装位置l、轴承刚度K_{x2}和K_{y2}有关。若输入扭矩T_0一定，当轴承安装位置距万向铰中心较近或者轴承弹簧刚度系数较小时，系统在频率$(\omega_{10}+\omega_{20})/2$附近产生和型组合共振的区域减小；反之，若轴承安装位置距万向铰中心较远或者轴承弹簧刚度系数较大时，系统在频率$(\omega_{10}+\omega_{20})/2$附近产生和型组合共振的区域增大。因此，在实际万向铰驱动的偏斜轴系中，要抑制系统和型组合共振的产生，较合理的方法为尽量选取大刚度支撑轴承，并且适当选择支撑轴承的安装位置。

参 考 文 献

[1] 朱拥勇. 万向铰驱动下偏斜轴系非线性振动及其稳定性分析[D]. 武汉：海军工程大学，2011.

[2] Ota H，Kato M．Lateral vibration of a rotating shaft driven by a universal joint-1st report：generation of even multiple vibrations by secondary moment[J]．Bulletin of JSME，1984，27：2002-2007．

[3] Ota H，Kato M．Even multiple vibrations of a rotating shaft due to

secondary moment of a universal joint[C]//The Third International Conference on Vibrations in Rotating Machinery．New York，ImechE，1984：199-204．

[4] Ota H，Kato M．Unstable and forced vibrations of an asymmetrical shaft driven by a universal joint[C]//Proceedings of the International Conference on Rotordynamics，Tokyo，Japan，1986：493-498．

[5] Iwatsubo T，Saigo M．Transverse vibration of a rotor system driven by a cardan joint[J]. Journal of Sound and Vibration，1984，95：9-18．

[6] Mazzei A J．Dynamic stability of a flexible spring mounted shafts driven through a universal joint[D]．Michigan：the University of Michigan，1998．

[7] Mazzei A J，Argento A，Scott R A．Dynamic stability of a rotating shaft driven through a universal joint[J]．Journal of Sound and Vibration，1999，222：19-47．

[8] Mazzei A J，Scott R A．Effects of internal viscous damping on the stability of a rotating shaft driven through a universal joint[J]．Journal of Sound and Vibration，2003，265：863-885．

[9] Mazzei A J，Scott R A．On the stability of a driveline with internal viscous damping[C]//Proceedings of IMAC-XX：A Conference on Structural Dynamics．Los Angeles，2002：217-223．

[10] 朱拥勇，王德石，冯昌林．万向铰驱动的偏斜转子系统传递力矩分析[J]．海军工程大学学报，2010，22(5)：5-9．