

二维有限区域饱和软土 Biot 固结的数值模拟

李培超¹ 李培绪² 李贤桂³

(上海工程技术大学机械工程学院 201620 上海)¹ (潍坊科技学院 262700 潍坊)²

(创生医疗器械(中国)有限公司 213164 常州)³

摘要: 针对二维有限矩形区域饱和软土固结问题, 选取四种不同边界条件组合, 利用数值模拟方法研究了在上表面剪切载荷作用下土体沉降变形的特征和规律。结果表明: 在剪切载荷单独作用下, 土体位移以水平位移为主, 同时竖向位移也客观存在。这反映了土体固结过程中流固耦合的物理现象。土层最终变形量(沉降和水平位移)由剪切载荷与土体物性决定, 与边界透水性无关; 边界条件对土体的变形模式有着决定性影响。剪切载荷作用、法向载荷作用及二者联合作用的计算结果对比表明: 虽然软土 Biot 固结是复杂的流固耦合过程, 但在这个过程中载荷叠加原理依然成立。

关键词: 多孔介质; 流动和变形耦合; 二维有限区域; 剪切载荷; 叠加原理

中图分类号: O357.3 **文献标识码:** A

1 引 言

众所周知, Terzaghi 首次提出了有效应力原理, 并建立了饱和土体的一维固结理论^[1]。之后 Biot 在其基础上建立了完整的饱和土体三维固结理论^[2-3], 奠定了多孔介质流固耦合渗流理论的基础。Biot 固结理论已被广大岩土力学工作者普遍接受, 并在众多工程领域得到了广泛的应用。

对于二维 Biot 固结问题, 目前已有一些解析解。文献[4]给出了半无限平面软土层上表面受一定宽度均布恒载时竖向位移的解析解。文献[5]~[6]分别获得了二维有限厚度地基表面沉降的复变函数解。文献[7]则求得下表面假定为不透水和刚性条件下二维有限厚度地基固结的全部解。文献[8]给出了任意多层饱和土体二维 Biot 固结的积分形式解。文

献[9]求解了二维 Biot 动力固结方程, 建立了周期载荷作用下单层地基二维 Biot 动力固结的函数表达式, 并根据特定边界条件, 研究了饱和地基动力固结问题。以上文献中给出的解析解都是在地基水平方向尺寸为无限大的前提下得到的, 而在实际工程中土层水平方向尺寸通常是有限的。文献[10]利用积分变换方法导出了二维有限矩形区域孔隙弹性介质存在源汇项时位移场和渗流场的一个解析解, 它适用于孔隙压力场符合第一类边界条件的情况。对于孔隙压力场符合第二类边界条件的情况: 文献[11]给出其点汇解析解; 文献[10]~[11]采用的数学模型为不可压缩多孔介质模型; 文献[12]则进一步给出了可压缩多孔介质模型假设下相应点汇问题的解析解。

以上文献中给出的解析解适用于人为给定的简单的位移场和压力场边界条件。文献[13]进一步

基金项目: 上海高校选拔培养优秀青年教师科研专项基金 (gjd09029); 上海市重点学科建设项目 (P1401)

来稿日期: 2011-09-29 修回日期: 2012-04-10

第一作者简介: 李培超, 男, 1976 年生, 博士, 上海工程技术大学机械工程学院, 副教授; 研究方向——多孔介质力学。

E-mail: wiselee18@163.com

给出了相应的有限差分求解方法。文献[14]在迭代算法基础上编写了二维有限区域流固耦合渗流问题的计算程序, 并进行了算例验证; 重点探讨了法向载荷作用及不同实际边界条件组合的影响, 计算并分析了相应渗流场和位移场的变化特征和规律。但文献[4]未涉及剪切载荷的作用, 实际上剪切载荷在土木工程中时有发生, 它对土体水平变形、破坏和稳定性等有重要的影响^[15-16], 本文是文献[14]的续, 将对剪切载荷作用下的二维有限区域饱和土体 Biot 固结变形特征展开研究。

除开采地下流体外, 地面载荷(如大规模工程建设)诱发的工程性地面沉降已成为目前软土地区地面沉降新的制约因素^[17-18], 随着城市建设进程的加快, 其影响日益显著。本文即以一组算例探讨载荷对地面沉降变形的影响。

2 数学模型

2.1 控制方程组

为了处理简单, 本文以二维区域为研究对象。在工程实际中, 有时可用二维模型近似代替三维模型。二维有限区域 Biot 固结方程组具体推导过程详见文献[14]和[19], 此处直接给出, 为

$$G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \left(\frac{1-\phi}{K_s} + \frac{\phi}{K_f} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

其中: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$; E 代表多孔介质弹性模量; K_s 、 K_f 分别为固体骨架颗粒和孔隙流体的体积压缩模量; u 和 w 分别为 x 向和 z 向的位移; ε_v 为体积应变, $\varepsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$; p 为孔隙流体压力; k 为渗透率; μ 为流体粘性系数; ϕ 为孔隙度; ν 为泊松比。

2.2 定解条件

本文研究了四种不同边界条件组合对结果的影响: (a)上、下表面均自由透水; (b)上表面自由透水, 下表面不透水; (c)上表面两侧自由透水、中间受载区域不透水, 下表面不透水; (d)上、下表面均不透水。以上四种情况, 均假定: 其左右边界固定

且自由透水; 下表面固定; 上表面可自由变形。

上述四种情况所对应的边界条件较容易写出, 具体形式见文献[14], 本文只考虑上表面位移场边界条件的表达式。当无剪力作用时, 土层上表面可假定为滑移边界条件, 正应力等于外部法向载荷, 位移场边界条件^[14]为

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4a)$$

$$2G \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \right) - p = -q(x,t) \left[h(x + \frac{b}{2}) - h(x - \frac{b}{2}) \right] \quad (4b)$$

其中 $h(x)$ 为 Heaviside 单位阶梯函数: 当 $x \geq 0$ 时, $h(x) = 1$; $x < 0$ 时, $h(x) = 0$ 。

如果考虑土层上表面剪切载荷的作用, 式(4a)应修改为

$$\tau = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (4c)$$

3 数值算法

上述数学模型的控制方程组由 2 个位移场方程和 1 个压力场方程组成, 每个方程中都含有 3 个未知变量 p 、 w 、 u , 因此需要对上述方程组联立求解。本文首先采用全隐式有限差分法^[14]离散控制方程, 然后再利用强隐式迭代算法^[13] (Strong Implicit Procedure)求解离散后的代数方程组, 从而得到压力场和位移场, 求解流程见图 1。由于本文是文献[14]的续, 两者的数值算法并无不同, 因此关于本文数值算法和相关算例的具体细节, 可参阅文献[14]。

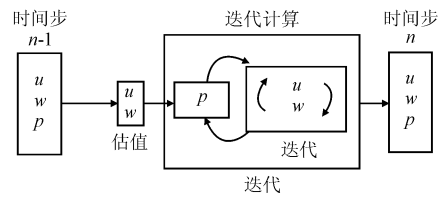


图 1 迭代算法流程图

4 剪切载荷作用分析

4.1 算例描述

本算例研究了图 2 所示的二维有限饱和软土层(具体参数见表 1^[14])上表面受到剪切载荷 τ 和法向载荷 $q(x,t)$ 联合作用下的沉降变形特征, 并考虑四种不同边界条件组合对此问题的影响。

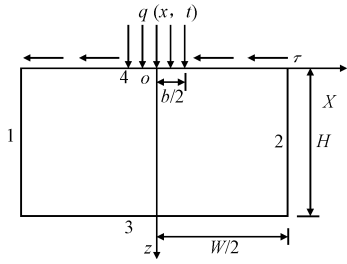


图2 二维饱和软土层受载示意图

表1 饱和软土层参数

参数	E	ν	ϕ	K_s	K_f
取值	3.94945 MPa	0.25	0.52	48550 MPa	1362 MPa
参数	k	μ_f	H	b	W
取值	$1.57406 \times 10^{-17} \text{ m}^2$	$2.0 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$	10.0 m	1.0 m	11.0 m

4.2 计算结果及分析

假设整个土层上表面只受到剪切荷载 τ 作用，其大小为 $5.0 \times 10^4 \text{ Pa}$ ，土层上表面($z=0$)的位移曲线(即上表面竖向位移(沉降) w 和水平位移 u 与 x 的关系曲线)如图3所示，其中(a)~(d)分别对应于前文所述四种边界条件组合。每幅图中不同曲线对应不同时刻：细虚线表示发展过程；粗实线表示最终稳定状态。图4表示的是剪切荷载 τ ($5.0 \times 10^4 \text{ Pa}$)和法向均布荷载 q ($6.5 \times 10^4 \text{ Pa}$)联合作用下对应上述四种边界条件的土层上表面位移曲线。图5表示的是达到稳定状态时土层上表面的位移曲线。其中： u_1 和 w_1 为剪切荷载和法向均布荷载联合作用下的水平位移和竖向位移； u_2 和 w_2 为剪切荷载单独作用下的水平位移和竖向位移； u_3 和 w_3 为法向均布荷载单独作用下的水平位移和竖向位移。

首先分析剪切荷载单独作用下的土层变形特点。从图3可以看出，剪切荷载单独作用下水平位移变化较大。值得指出的是尽管没有法向荷载作用，但也有竖向位移(有正有负)产生(虽然较小)。沉降产生的原因在于土体的沉降 w 和水平位移 u 二者是相互耦合的。这体现在控制方程组式(1)~式(3)和边界条件式(4c)里。接下来观察土体表面位移曲线随时间的变化规律。不难发现，剪切荷载单独作用下， u 的绝对值随时间增加而逐渐增大(方向向左为负)，但图3(d)的增加幅度明显比其他三者小；至于 w 的

变化，图3(a)~图3(c)情形下均呈逆时针变化，而图3(d)呈顺时针变化。以上变化特点说明了表面的透水性质决定了其变形模式；不透水的上表面使图3(d)的反应更像柔软的弹性体。然而同时观察对比图3(a)~图3(d)中稳定状态的位移曲线，容易发现四种情况下的土体最终位移是相同的。这一点解释如下：尽管四种情况边界条件不同会导致各自前期的固结变形过程有所不同，但是当超静水压力消散完毕后，载荷最终都将完全由土体骨架承担，所以四种情况对应土体最终变形量相同。

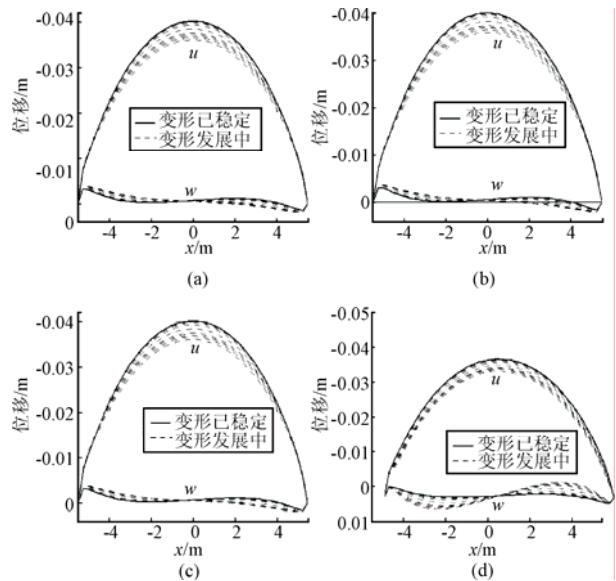


图3 剪切荷载单独作用下土层上表面位移曲线

观察图4(a)~图4(d)，剪切荷载和法向荷载联合作用下水平位移为弯曲的之字形，而竖向位移则呈抛物形。法向荷载作用下土体的固结变形特征，文献[11]已做详细描述，此处不再赘述。稳定状态时上表面位移曲线如图5(a)~图5(d)中的 u_3 和 w_3 曲线所示。这与剪切荷载单独作用下的变形特征(如图5(a)~图5(d)中的 u_2 和 w_2)有着非常明显的区别。对于竖向位移而言，如上所述剪切荷载效应 w_2 较小，而法向荷载对沉降位移 w_3 影响比较大，二者有量级的差别；对于水平位移，剪切荷载作用下的水平位移 u_2 向左为负，而法向荷载导致的水平位移 u_3 是中心对称的，二者量级基本相同。观察图5(a)~图5(d)，容易得到： $u_1 = u_2 + u_3$ ； $w_1 = w_2 + w_3$ ，这表明剪切荷载和法向荷载联合作用下的土层位移等于剪

切载荷和法向载荷单独作用下各自位移的代数和, 完全符合叠加原理。这一点是由本文所采用 Biot 固结方程组(即方程式(1)~式(3))的线性本质所决定的。

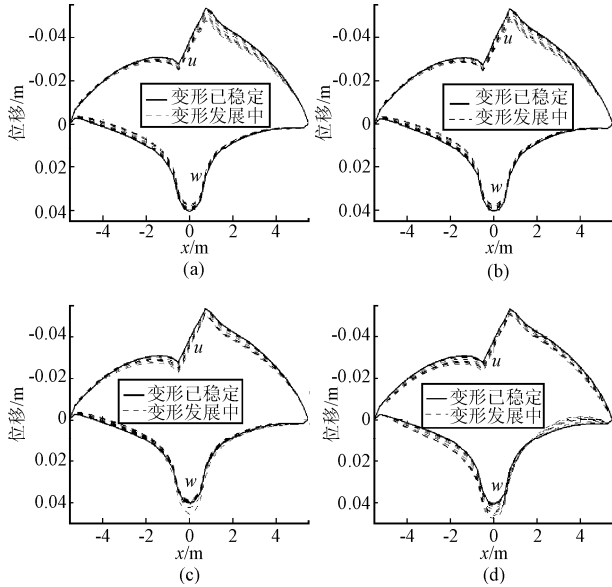


图4 剪切载荷和法向载荷联合作用下土层上表面位移曲线

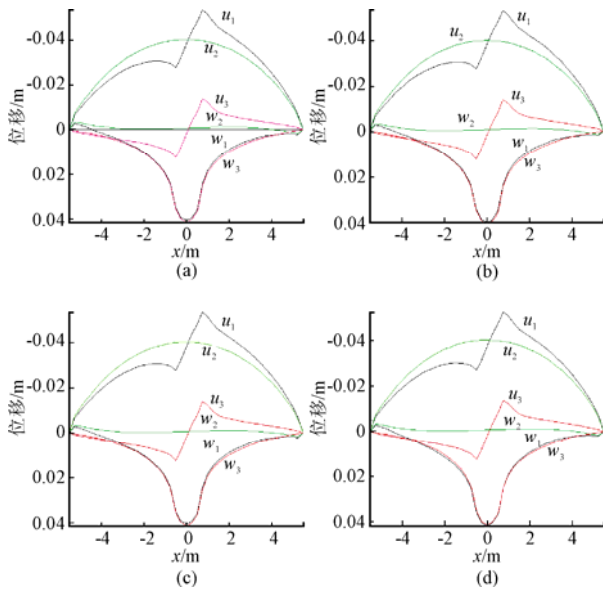


图5 载荷作用下土层上表面位移曲线

5 结论

本文以有限矩形区域饱和软土层上表面承受恒定剪切载荷问题为例, 选取了四种不同边界条件组合, 对土层的沉降变形进行了计算和分析, 并与

软土层上表面承受恒定法向载荷结果作了比较, 得到如下结论。

- 1) 土层最终变形量由载荷及土体物性决定, 与上下边界透水性无关。
- 2) 边界条件虽不决定土体最终变形量, 却影响其变形发展过程。
- 3) 剪切载荷作用下, 土体水平位移较大, 竖向位移较小。
- 4) 叠加原理适用于二维有限区域饱和软土 Biot 固结问题。

参 考 文 献

- [1] Terzaghi K. Theoretical soil mechanics[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1943.
- [2] Biot M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. J Appl Phys, 1941, 12: 155-164.
- [3] Biot M A, Willis D G. The elastic coefficients of the theory of consolidation[J]. J Appl Mech, 1957, 24: 594-601.
- [4] Biot M A. Consolidation settlement under a rectangular load distribution[J]. J Appl Phys, 1941, 12: 426-430.
- [5] Gibson R E, Schiffman R L, Pu S L. Plane strain and axially symmetric consolidation of a clay layer on a smooth impervious base[J]. Quarterly J Mech Appl Math, 1970, 23: 505-520.
- [6] Booker J R. The consolidation of a finite layer subject to surface loading[J]. Int J Solids Structures, 1974, 10: 1053-1065.
- [7] 黄传志, 肖原. 二维固结问题的解析解[J]. 岩土工程学报, 1996, 18 (3): 47-54.
- [8] 胡亚元, 王立忠, 陈云敏, 等. 多层地基二维 Biot 固结的理论解答[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(5): 17-21.
- [9] 祝波恩, 蔡袁强, 凌道胜. 饱和地基二维动力 Biot 固结分析[J]. 岩土工程学报, 2004, 26 (2): 248-253.
- [10] Barry S I, Mercer G N. Exact solutions for two dimensional time dependent flow and deformation within a poroelastic medium[J]. J Appl Mech, 1999, 66: 536-540.
- [11] Li P C, Lu D T. An analytical solution of two-dimensional flow and deformation coupling due to a point source within a finite poroelastic media[J]. J Appl Mech, 2011, 78 (6): 061260.
- [12] 李培超. 二维饱和和多孔介质因点汇诱发比奥固结的解析解[J]. 岩土力学, 2011, 32 (9): 2688-2691.
- [13] Mercer G N, Barry S I. Flow and deformation in poroelasticity—II numerical method [J]. Mathematical and Computer Modeling, 1999, 30: 31-38.
- [14] 李培超, 李贤桂. 二维有限饱和和多孔介质流动变形耦合数值模拟[J].

- 上海大学学报: 自然科学版, 2010, 16 (6): 655-660.
- [15] Schiffman R L, Fungaroli A A. Consolidation due to tangential loads[C]//Proceedings of the 13th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Montreal, Canada, 1965: 188-192.
- [16] Shah K R, Wong T F. Fracturing at contact surfaces subjected to normal and tangential loads[J]. *Int J Rock Mech Min Sci*, 1997, 34 (5): 727-739.
- [17] 龚士良. 上海城市建设对地面沉降的影响[J]. *中国地质灾害与防治学报*, 1998, 9 (2): 108-111.
- [18] Tang Y Q, Cui Z D, Wang J X, et al. Model test study of land subsidence caused by high-rise building group in Shanghai [J]. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 2008, 67: 173-179.
- [19] 李培超, 李贤桂, 龚士良. 承压含水层地下水开采流固耦合渗流数学模型[J]. *辽宁工程技术大学学报: 自然科学版*, 2009, 28 (S): 249-252.