第 29 卷　第 4 期　　应　用　力　学　学　报　　Vol.29 No.4
2012 年 8 月　　CHINESE JOURNAL OF APPLIED MECHANICS　　Aug. 2012

文章编号：1000- 4939(2012) 04-0386-07

射线寻迹法分析旋转不等截面圆环结构的动态响应

黄迪山　唐亮　曹睿　苏小石

（上海大学　200072　上海）

摘要：用射线寻迹法分析了旋转不等截面圆环的自由响应和受迫响应问题。首先，建立了单元局域坐标系，用行波、快衰和近场波动表示波在单元结构内的振动位移；其次，将激励力视为一种特殊的不连续节点，激励点两端为两个不同单元，考虑不同单元之间通过转递系数和转换矩阵耦合，并引入反射矩阵和透射矩阵处理行波在单元间的传播；再次，将结构的稳态响应表达为波动所有迹的叠加，而将自由振动表达为波幅矢量初始迹为零的情况；最后，根据波传递规则将弹性波动的反射矩阵和透射矩阵进行集成，对独立波动单元进行总装，从所得的动力学模型得到旋转不等截面圆环的响应。在给出了行波在该动态模型中传播特性的基础上，由数值算例可以发现旋转状态下圆环的各阶响应频率都高于静止状态下的响应频率。研究内容有助于高速轴承保持架、MEMS 转子等的动态特性的精确计算。

关键词：射线寻迹法；旋转圆环；自由响应；受迫响应

中图分类号：O327　　**文献标识码：**A

1　引　言

大量工程结构是由一系列的单元组成，这些单元可用波导部件的形式建模，如薄壁、直梁、弯曲梁等。迅速地根据计算几何参数和尺寸参数估计结构动力学性能（固有频率、模态振型、受迫响应等），可为结构设计和机构优化提供有效的手段[1-6]。

Chouvion 提出三维等截面圆环结构的射线寻迹法（Ray tracing method）[7]。文中将其方法拓宽至旋转圆环，建立了基于精确解的复杂二维旋转圆环结构的振动模型。对每个部件进行独立单元建模，然后，使用统一的方法将所有的独立单元进行总装，从而降低了计算模型的复杂性。

2 射线寻迹法

2.1　定义位移

本文使用行波法定义弯曲梁单元的位移。从梁的运动方程可推知，弯曲梁的位移可表达为若干正反方向传递行波的叠加[8]。对于弯曲梁单元，平面内径向位移记作 w，沿中心线的周向位移记作 u，具体形式为

$$w(s)=C_{w1}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_1 s}+C_{w2}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_2 s}+C_{w3}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_3 s}+C_{w4}^{-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_4 (s-L)}+C_{w5}^{-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_5 (s-L)}+C_{w6}^{-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_6 (s-L)} \tag{1a}$$

$$u(s)=\alpha_1 C_{w1}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_1 s}+\alpha_2 C_{w2}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_2 s}+\alpha_3 C_{w3}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_3 s}+\alpha_4 C_{w4}^{-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_4 (s-L)}+\alpha_5 C_{w5}^{-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_5 (s-L)}+\alpha_6 C_{w6}^{-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_6 (s-L)} \tag{1b}$$

来稿日期：2011-10-13　　**修回日期：**2012-06-21
第一作者简介：黄迪山，男，1957 年生，上海大学机电工程与自动化学院，副教授；研究方向——机械动力学。
E-mail：hdishan@shu.edu.cn

其中：$C_{wm}^{\pm}$ 表示径向波动在 s 正方向和 s 负方向的波幅系数；α_m 表示周向幅值与径向幅值的比例系数，这些系数可由运动方程求得[4]。这里 m=1,2,3,4,5,6。计算中不同的波数分别对应于行波、快衰和近场波动[5-6]。

2.2　射线寻迹

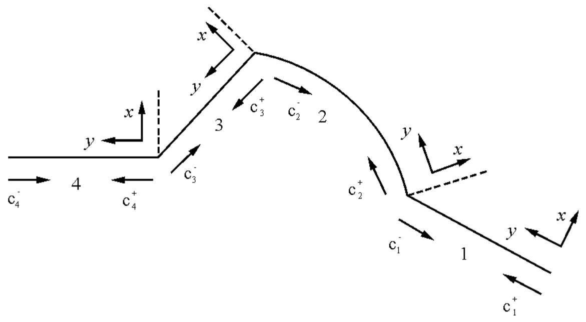

图 1　复杂波导结构示意图

如图 1 所示，每个单元包含两个方向上传播的波动，波动起点为单元边界处。假设具有 N 个单元组成，初始波幅矢量具有如下形式

$$\boldsymbol{c}_0=\begin{bmatrix} c_{1IN}^{+} & c_{1IN}^{-} & \cdots & c_{NIN}^{+} & c_{NIN}^{-} \end{bmatrix} \tag{2}$$

单元体波数和长度对传播的影响可用耗散矩阵 $\boldsymbol{D}$ 表示，其主对角元素均有 $\boldsymbol{D}_{pp}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_p L_q}$ 的形式。当波动传入不连续点时，将向其他单元产生一定比例散射，在本单元发生一定折射。例如，在边界处，入射的弯曲波动会激起一组由弯曲波、耗散波、纵波的混合波动。本文使用复系数形式表示这些波的不同传递特性，而这些复系数由单元联接处广义力的平衡条件和位移的连续性条件求得。结构整体波动的散射以全局传递矩阵 $\boldsymbol{T}$ 表示，其中 $\boldsymbol{c}_p=\boldsymbol{T}_{pq}\boldsymbol{c}_q$ 。

当所有波动在各自单元内完成传播并发生一次单元间传递，称为结构内波动的一次迹。从单元 $\boldsymbol{c}_q$ 到单元 $\boldsymbol{c}_p$，使用耗散矩阵 $\boldsymbol{D}$ 和传递矩阵 $\boldsymbol{T}$，波动迹的增加可表示为 $\boldsymbol{c}_{p+1}=\boldsymbol{TDc}_p$。矢量 $\boldsymbol{c}$ 表示最终在结构内的所有波幅系数，即结构体稳态响应，可表示为波动所有迹的叠加

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}_0+\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2+\cdots+\boldsymbol{c}_\infty=\sum_{i=0}^{\infty}(\boldsymbol{TD})^i\boldsymbol{c}_0 \tag{3}$$

耗散项反映了波动通过一个迹的衰减，有 $|\boldsymbol{TD}|<1$。因此式（3）右端为小于 1 的几何级数，可改写为

$$\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{TD})^{-1}\boldsymbol{c}_0 \tag{4}$$

2.3　受迫振动

由激励力造成的波动可考虑为 $\boldsymbol{c}_0$ 形式，如 $\boldsymbol{c}_0$ 出现在两单元之间，可表示为

$$\boldsymbol{c}_0=\begin{bmatrix} \underbrace{0\quad 0}_{单元1} & \cdots & \underbrace{0\quad q_{g-}}_{单元g} & \underbrace{q_{(g+1)+}\quad 0}_{单元g+1} & \cdots & \underbrace{0\quad 0}_{单元N} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

其中：q_{g-} 项和 $q_{(g+1)+}$ 与激励大小有关，可由激励点处广义位移连续性条件和广义力平衡条件计算。将 $\boldsymbol{c}_0$ 的值代入式(4)中，可解得稳态的波幅系数矢量 $\boldsymbol{c}$ 。将波幅系数代入位移式(1)可解出结构在特定激励频率下的位移响应。

2.4　自由振动

对于自由振动，结构中初始幅值为零，$\boldsymbol{c}_0$ 项此时为零向量。此时式（4）为

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{TD})\boldsymbol{c}=0 \tag{6}$$

方程(6)的形式与相位封闭原理[10]一致。为使 $\boldsymbol{c}$ 有非零解，令

$$\left|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{TD}\right|=0 \tag{7}$$

求得结构固有频率。各阶固有频率对应的模态振型可以将从式(7)解得的频率回带到 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 矩阵中，通过式(6)可解得波幅矢量 $\boldsymbol{c}$。振型可由波幅系数代入式（1）中解得。

2.5　结构的几何定义

每个单元的位移和波幅系数均在局域坐标系中定义。对于弯曲梁单元，局域坐标系为圆周坐标系统。所有的单元从 1 至 N 标号。如单元 j 的局域坐标系为$(x,y)^j$，该坐标系与相联接的其他单元有关，由该转动用坐标轴转动角 β 给出。则旋转的转换矩阵可表示为

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{rot}}^{k\to j}=\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

从坐标系 k 到坐标系 j 的旋转可表示为

$$\boldsymbol{U}_k^j=\boldsymbol{M}_{\mathrm{rot}}^{k\to j}\boldsymbol{U}_k^k \tag{9}$$

假定所有梁单元的局域坐标系都存在于同一全局坐标系中，通过连续使用式(9)，在同一全局坐

标系中表示。对于弯曲梁单元，需增加旋转矩阵来模拟局域坐标系沿弯曲梁的旋转。

2.6 传递矩阵

通过联立节点处的力平衡条件和位移连续性条件可得 6n 个方程，这些方程可用来求解每个波动的传递系数。每个单元中，位移可由一组正向和负向传播的波动表示。

单元 1 和单元 j 之间，位移和转角的连续性可表示为

$$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{M}_{\rm rot}^{f\to 1}\boldsymbol{X}_f \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 定义为

$$\boldsymbol{X}_f=\begin{bmatrix} w_i^f & u_i^f & \varphi_i^f\end{bmatrix}^{\rm T} \tag{11}$$

各单元中力和弯矩存在以下关系

$$\boldsymbol{F}_1=\sum_{f=2}^{n}\boldsymbol{M}_{\rm rot}^{f\to 1}\boldsymbol{X}_f+\boldsymbol{F}_{\rm ext} \tag{12}$$

力矢量和弯矩为

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} V & N & M\end{bmatrix}^{\rm T} \tag{13}$$

入射波组、传递/反射波组、传递矩阵分别表示为

$$\boldsymbol{c}_{\rm created}=\begin{bmatrix} c_1^- & c_2^+ & c_3^+ & \cdots & c_n^+\end{bmatrix}^{\rm T} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{c}_{\rm incident}=\begin{bmatrix} c_1^+ & c_2^- & c_3^- & \cdots & c_n^-\end{bmatrix}^{\rm T} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{T}_n=\begin{bmatrix} r_1^+ & t^{2\to 1} & \cdots & t^{n\to 1}\\ t^{1\to 2} & r_2^- & \cdots & t^{n\to 2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t^{1\to n} & t^{2\to 1} & \cdots & r_n^- \end{bmatrix} \tag{16}$$

所以 $c_{\rm created}=\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{c}_{\rm incident}$，也可整理为如下形式求解

$$\boldsymbol{T}_n=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{H} \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都是 6n×6n 的矩阵。为计算由外部矢量导致的波幅系数，式(10)和式(12)可改写为

$$\begin{bmatrix} q_1^- & q_2^+ & q_3^+ & \cdots & q_n^+\end{bmatrix}^{\rm T}=\boldsymbol{C}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{6(n-1)\times 1}\\ \boldsymbol{F}_{\rm ext}\\ \boldsymbol{M}_{\rm ext}\end{bmatrix} \tag{18}$$

通过式(17)可解得每个节点的传递函数。

3 不等截面圆环建模

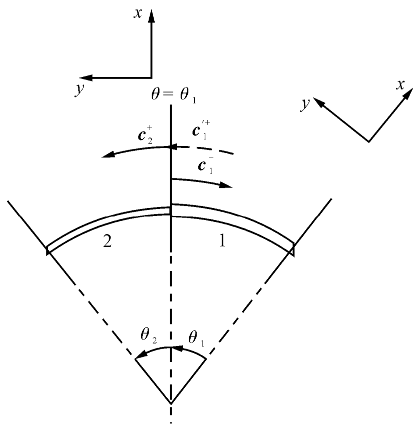

图 2 圆环几何不连续点

本节以几何不连续点为例说明反射矩阵 $\boldsymbol{r}^{1+}$、透射矩阵 $\boldsymbol{r}^{1\to 2}$、射线寻迹法的求解过程。该过程分为四个步骤：①定义位移；②联立位移连续条件；③联立力的平衡条件；④矩阵方程求解。

考虑旋转圆环的宽度改变，圆环的曲率半径和材料不变，即：$I_1\neq I_2$，$A_1\neq A_2$，此时，单元 1 的量纲为一的量变为

$$u_1=\frac{U}{R},\quad w_1=\frac{W}{R},\quad t_1=\frac{T}{T_{01}},\quad T_{01}=R^2\sqrt{\frac{\rho A_1}{EI_1}},$$

$$k_1^2=\frac{I_1}{A_1R^2},\quad \Omega_1=\sqrt{\frac{E}{\rho R^2}}\Omega_0 \tag{19a}$$

单元 2 的量纲为一的量变为

$$u_2=\frac{U}{R},\quad w_2=\frac{W}{R},\quad t_2=\frac{T}{T_{02}},\quad T_{02}=R^2\sqrt{\frac{\rho A_2}{EI_2}},$$

$$k_2^2=\frac{I_2}{A_2R^2},\quad \Omega_2=\sqrt{\frac{E}{\rho R^2}}\Omega_0 \tag{19b}$$

3.1 定义位移

定义图 2 单元 1 中位移和局域坐标系 1，单元 1 末端的位移可表示为

$$w_1^1(\theta_1)=C_{w1}^{'+}+C_{w2}^{'+}+C_{w3}^{'+}+C_{w1}^{-}+C_{w2}^{-}+C_{w3}^{-} \tag{20a}$$

$$u_1^1(\theta_1)=\alpha_{11}C_{w1}^{'+}+\alpha_{12}C_{w2}^{'+}+\alpha_{13}C_{w3}^{'+}+\alpha_{14}C_{w1}^{-}+\alpha_{15}C_{w2}^{-}+\alpha_{16}C_{w3}^{-} \tag{20b}$$

$$\varphi_1^1=\frac{{\rm d}w_1^1}{{\rm d}\theta}-u_1^1 \tag{20c}$$

其中 φ_1^1 为单元 1 上与单元 2 接触端弯曲转角。

记：$\boldsymbol{c}_1^{'+}=\begin{bmatrix}C_{w1}^{'+} & C_{w2}^{'+} & C_{w3}^{'+}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{c}_1^{-}=\begin{bmatrix}C_{w1}^{-} & C_{w2}^{-} & C_{w3}^{-}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。定义图 2 单元 2 中位移和局域坐标系 2，单元 2 起始端的位移可表示为

$$w_2^{2+}(0)=D_{w1}^{+}+D_{w2}^{+}+D_{w3}^{+} \tag{21a}$$

$$u_2^{2+}(0)=\alpha_{21}D_{w1}^{+}+\alpha_{22}D_{w2}^{+}+\alpha_{23}D_{w3}^{+} \tag{21b}$$

$$\varphi_2^{2+}=\frac{\mathrm{d}w_2^{2+}}{\mathrm{d}\theta}-u_2^{2+} \tag{21c}$$

其中：α_{21} 中第一个位置“2”表示单元 2；$\boldsymbol{D}^{+}$表示单元开始端；正传波动的波幅系数表示为

$$\boldsymbol{c}_2^{+}=\begin{bmatrix}D_{w1}^{+} & D_{w2}^{+} & D_{w3}^{+}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

量纲为一的力-位移关系式可以表达为

$$\boldsymbol{N}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\theta}+\boldsymbol{u} \tag{22a}$$

$$\boldsymbol{V}=\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^3\boldsymbol{w}}{\partial\theta^3} \tag{22b}$$

$$\boldsymbol{M}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\theta}-\frac{\partial^2\boldsymbol{w}}{\partial\theta^2} \tag{22c}$$

3.2　位移连续性条件

单元 1 末端的位移为

$$\boldsymbol{X}_1^1=\begin{bmatrix}w_1^1(\theta_1)\\ u_1^1(\theta_1)\\ \varphi_1^1(\theta_1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \mathrm{i}\gamma_{11}-\alpha_{11} & \mathrm{i}\gamma_{12}-\alpha_{12} & \mathrm{i}\gamma_{13}-\alpha_{13}\end{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^{'+}+$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16}\\ \mathrm{i}\gamma_{14}-\alpha_{14} & \mathrm{i}\gamma_{15}-\alpha_{15} & \mathrm{i}\gamma_{16}-\alpha_{16}\end{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^{-} \tag{23}$$

单元 2 始端位移为

$$\boldsymbol{X}_2^2=\begin{bmatrix}w_2^2(0)\\ u_2^2(0)\\ \varphi_2^2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \mathrm{i}\gamma_{21}-\alpha_{21} & \mathrm{i}\gamma_{22}-\alpha_{22} & \mathrm{i}\gamma_{23}-\alpha_{23}\end{bmatrix}\boldsymbol{c}_2^{+} \tag{24}$$

由于单元 1 和单元 2 中位移的归一化常数相同，当截面的宽度改变时，故节点处的位移连续性条件可表示为

$$\boldsymbol{X}_1^1=\boldsymbol{M}_{\mathrm{rot}}^{2\to1}\boldsymbol{X}_2^2 \tag{25}$$

由于单元 1$\to$单元 2 的转角 $\beta=0$，有

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{rot}}^{2\to1}=\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta & 0\\ \sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{X}_1^1=\boldsymbol{X}_2^2 \tag{26}$$

将式(23)、式(24)代入连续性方程(26)中可得

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \mathrm{i}\gamma_{11}-\alpha_{11} & \mathrm{i}\gamma_{12}-\alpha_{12} & \mathrm{i}\gamma_{13}-\alpha_{13}\end{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^{'+}+$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16}\\ \mathrm{i}\gamma_{14}-\alpha_{14} & \mathrm{i}\gamma_{15}-\alpha_{15} & \mathrm{i}\gamma_{16}-\alpha_{16}\end{bmatrix}\boldsymbol{r}\boldsymbol{c}_1^{+}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \mathrm{i}\gamma_{21}-\alpha_{21} & \mathrm{i}\gamma_{22}-\alpha_{22} & \mathrm{i}\gamma_{23}-\alpha_{23}\end{bmatrix}\boldsymbol{t}\boldsymbol{c}_1^{+} \tag{27}$$

3.3　力平衡条件

将式(20)代入式(22)，可得单元 1 末端的力为

$$\boldsymbol{F}_1^1=\begin{bmatrix}V_1^1\\ N_1^1\\ M_1^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\gamma_{11}^2-\mathrm{i}\gamma_{11}^3 & \alpha_{12}\gamma_{12}^2-\mathrm{i}\gamma_{12}^3 & \alpha_{13}\gamma_{13}^2-\mathrm{i}\gamma_{13}^3\\ \mathrm{i}\alpha_{11}\gamma_{11}+1 & \mathrm{i}\alpha_{12}\gamma_{12}+1 & \mathrm{i}\alpha_{13}\gamma_{13}+1\\ \mathrm{i}\gamma_{11}\alpha_{11}+\gamma_{11}^2 & \mathrm{i}\gamma_{12}\alpha_{12}+\gamma_{12}^2 & \mathrm{i}\gamma_{13}\alpha_{13}+\gamma_{13}^2\end{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^{'+}+$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_{14}\gamma_{14}^2-\mathrm{i}\gamma_{14}^3 & \alpha_{15}\gamma_{15}^2-\mathrm{i}\gamma_{15}^3 & \alpha_{16}\gamma_{16}^2-\mathrm{i}\gamma_{16}^3\\ \mathrm{i}\alpha_{14}\gamma_{14}+1 & \mathrm{i}\alpha_{15}\gamma_{15}+1 & \mathrm{i}\alpha_{16}\gamma_{16}+1\\ \mathrm{i}\gamma_{14}\alpha_{14}+\gamma_{14}^2 & \mathrm{i}\gamma_{15}\alpha_{15}+\gamma_{15}^2 & \mathrm{i}\gamma_{16}\alpha_{16}+\gamma_{16}^2\end{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^{-} \tag{28}$$

将式(21)代入式(22)，可得单元 2 始端的力为

$$\boldsymbol{F}_2^2=\begin{bmatrix}V_2^2\\ N_2^2\\ M_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{21}\gamma_{21}^2-\mathrm{i}\gamma_{21}^3 & \alpha_{22}\gamma_{22}^2-\mathrm{i}\gamma_{22}^3 & \alpha_{23}\gamma_{23}^2-\mathrm{i}\gamma_{23}^3\\ \mathrm{i}\alpha_{21}\gamma_{21}+1 & \mathrm{i}\alpha_{22}\gamma_{22}+1 & \mathrm{i}\alpha_{23}\gamma_{23}+1\\ \mathrm{i}\gamma_{21}\alpha_{21}+\gamma_{21}^2 & \mathrm{i}\gamma_{22}\alpha_{22}+\gamma_{22}^2 & \mathrm{i}\gamma_{23}\alpha_{23}+\gamma_{23}^2\end{bmatrix}\boldsymbol{c}_2^{+} \tag{29}$$

由于截面的宽度改变时单元 1 与单元 2 中力的量纲化常数不同，故力的平衡条件写为

$$\boldsymbol{F}_1^1=\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{M}_{\mathrm{rot}}^{2\to1}\boldsymbol{F}_2^2 \tag{30}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为归一化矩阵。由于单元 1$\to$单元 2 的转角 $\beta=0$，有

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{rot}}^{2\to1}=\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta & 0\\ \sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{F}_1^1 = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{F}_2^2 \tag{31}$$

将式(29)、式(30)代入连续性方程(31)中可得

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}\gamma_{11}^2 - \mathrm{i}\gamma_{11}^3 & \alpha_{12}\gamma_{12}^2 - \mathrm{i}\gamma_{12}^3 & \alpha_{13}\gamma_{13}^2 - \mathrm{i}\gamma_{13}^3 \\ \mathrm{i}\alpha_{11}\gamma_{11} + 1 & \mathrm{i}\alpha_{12}\gamma_{12} + 1 & \mathrm{i}\alpha_{13}\gamma_{13} + 1 \\ \mathrm{i}\gamma_{11}\alpha_{11} + \gamma_{11}^2 & \mathrm{i}\gamma_{12}\alpha_{12} + \gamma_{12}^2 & \mathrm{i}\gamma_{13}\alpha_{13} + \gamma_{13}^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^{'+} +$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{14}\gamma_{14}^2 - \mathrm{i}\gamma_{14}^3 & \alpha_{15}\gamma_{15}^2 - \mathrm{i}\gamma_{15}^3 & \alpha_{16}\gamma_{16}^2 - \mathrm{i}\gamma_{16}^3 \\ \mathrm{i}\alpha_{14}\gamma_{14} + 1 & \mathrm{i}\alpha_{15}\gamma_{15} + 1 & \mathrm{i}\alpha_{16}\gamma_{16} + 1 \\ \mathrm{i}\gamma_{14}\alpha_{14} + \gamma_{14}^2 & \mathrm{i}\gamma_{15}\alpha_{15} + \gamma_{15}^2 & \mathrm{i}\gamma_{16}\alpha_{16} + \gamma_{16}^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^-$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{21}\gamma_{21}^2 - i\gamma_{21}^3 & \alpha_{22}\gamma_{22}^2 - i\gamma_{22}^3 & \alpha_{23}\gamma_{23}^2 - i\gamma_{23}^3 \\ i\alpha_{21}\gamma_{21} + 1 & i\alpha_{22}\gamma_{22} + 1 & i\alpha_{23}\gamma_{23} + 1 \\ i\gamma_{21}\alpha_{21} + \gamma_{21}^2 & i\gamma_{22}\alpha_{22} + \gamma_{22}^2 & i\gamma_{23}\alpha_{23} + \gamma_{23}^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{c}_2^+ \tag{32}$$

3.4 矩阵方程求解

写成矩阵形式

$$\begin{cases} \boldsymbol{m}_{11} \cdot \boldsymbol{t}^{1\to 2} + \boldsymbol{m}_{12} \cdot \boldsymbol{r}^{1-} = \boldsymbol{m}_{13} \\ \boldsymbol{m}_{21} \cdot \boldsymbol{t}^{1\to 2} + \boldsymbol{m}_{22} \cdot \boldsymbol{r}^{1-} = \boldsymbol{m}_{23} \end{cases} \tag{33}$$

$$\boldsymbol{m}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \mathrm{i}\gamma_{21} - \alpha_{21} & \mathrm{i}\gamma_{22} - \alpha_{22} & \mathrm{i}\gamma_{23} - \alpha_{23} \end{bmatrix} \tag{34a}$$

$$\boldsymbol{m}_{12} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \mathrm{i}\gamma_{14} - \alpha_{14} & \mathrm{i}\gamma_{15} - \alpha_{15} & \mathrm{i}\gamma_{16} - \alpha_{16} \end{bmatrix} \tag{34b}$$

$$\boldsymbol{m}_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \mathrm{i}\gamma_{11} - \alpha_{11} & \mathrm{i}\gamma_{12} - \alpha_{12} & \mathrm{i}\gamma_{13} - \alpha_{13} \end{bmatrix} \tag{34c}$$

$$\boldsymbol{m}_{21} = \begin{bmatrix} \alpha_{21}\gamma_{21}^2 - \mathrm{i}\gamma_{21}^3 & \alpha_{22}\gamma_{22}^2 - \mathrm{i}\gamma_{22}^3 & \alpha_{23}\gamma_{23}^2 - \mathrm{i}\gamma_{23}^3 \\ \mathrm{i}\alpha_{21}\gamma_{21} + 1 & \mathrm{i}\alpha_{22}\gamma_{22} + 1 & \mathrm{i}\alpha_{23}\gamma_{23} + 1 \\ \mathrm{i}\gamma_{21}\alpha_{21} + \gamma_{21}^2 & \mathrm{i}\gamma_{22}\alpha_{22} + \gamma_{22}^2 & \mathrm{i}\gamma_{23}\alpha_{23} + \gamma_{23}^2 \end{bmatrix} \tag{34d}$$

$$\boldsymbol{m}_{22} = -\begin{bmatrix} \alpha_{14}\gamma_{14}^2 - \mathrm{i}\gamma_{14}^3 & \alpha_{15}\gamma_{15}^2 - \mathrm{i}\gamma_{15}^3 & \alpha_{16}\gamma_{16}^2 - \mathrm{i}\gamma_{16}^3 \\ \mathrm{i}\alpha_{14}\gamma_{14} + 1 & \mathrm{i}\alpha_{15}\gamma_{15} + 1 & \mathrm{i}\alpha_{16}\gamma_{16} + 1 \\ \mathrm{i}\gamma_{14}\alpha_{14} + \gamma_{14}^2 & \mathrm{i}\gamma_{15}\alpha_{15} + \gamma_{15}^2 & \mathrm{i}\gamma_{16}\alpha_{16} + \gamma_{16}^2 \end{bmatrix} \tag{34e}$$

$$\boldsymbol{m}_{21} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\gamma_{11}^2 - \mathrm{i}\gamma_{11}^3 & \alpha_{12}\gamma_{12}^2 - \mathrm{i}\gamma_{12}^3 & \alpha_{12}\gamma_{13}^2 - \mathrm{i}\gamma_{13}^3 \\ \mathrm{i}\alpha_{11}\gamma_{11} + 1 & \mathrm{i}\alpha_{12}\gamma_{12} + 1 & \mathrm{i}\alpha_{13}\gamma_{13} + 1 \\ \mathrm{i}\gamma_{11}\alpha_{11} + \gamma_{11}^2 & \mathrm{i}\gamma_{12}\alpha_{12} + \gamma_{12}^2 & \mathrm{i}\gamma_{13}\alpha_{13} + \gamma_{13}^2 \end{bmatrix} \tag{34f}$$

利用以上两个线性代数方程，可以求得透射矩阵 $\boldsymbol{t}^{1\to 2}$ 和反射矩阵 $\boldsymbol{r}^{1+}$的值。

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{m}_{21}^{-1}\boldsymbol{m}_{22} - \boldsymbol{m}_{11}^{-1}\boldsymbol{m}_{12})^{-1}(\boldsymbol{m}_{21}^{-1}\boldsymbol{m}_{23} - \boldsymbol{m}_{11}^{-1}\boldsymbol{m}_{13}) \\ \boldsymbol{t} = (\boldsymbol{m}_{22}^{-1}\boldsymbol{m}_{21} - \boldsymbol{m}_{12}^{-1}\boldsymbol{m}_{11})^{-1}(\boldsymbol{m}_{22}^{-1}\boldsymbol{m}_{23} - \boldsymbol{m}_{12}^{-1}\boldsymbol{m}_{13}) \end{cases}$$

同理，可推反射矩阵 $\boldsymbol{r}^{2+}$和透射矩阵 $\boldsymbol{t}^{2\to 1}$ 。

4 具体算例

4.1 建模

如图 3 所示，内径 r=0.0495m；外径 R=0.505m；截面高度 h=0.001 m；圆弧 1 和 3 的截面宽度分别为 b_1=0.01m 和 b_2 =0.005m；整个圆弧材料相同，质量密度 ρ=7800kg/m^3，弹性模量 E=207MPa、泊松比 $\nu = 0.3$；转速 Ω = 523.55rad/s。

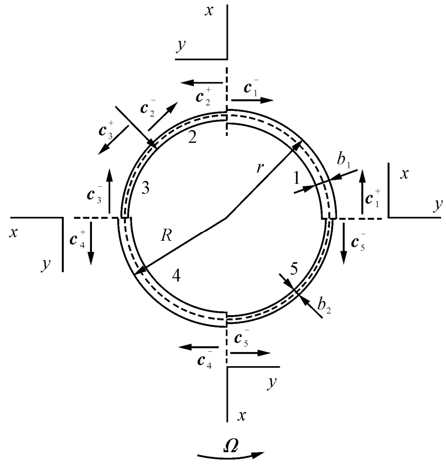

图 3 不等截面圆环示意图

只考虑(x，y)平面内振动，用六个波幅系数定义每个梁单元的位移。弯曲梁单元的编号为 1~5，不同单元之间构成几何不连续节点。在单元 2 和 3 联接点上施加外力。

使用圆周坐标系，使用旋转角定义单元 j 和单元 j+1 之间的联接，单元 i 到单元 j 的旋转角为

$$\beta^{1\to 2} = \beta^{2\to 3} = \beta^{3\to 4} = \beta^{4\to 5} = \beta^{5\to 1} = 0 \tag{35}$$

波幅矢量定义如下

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1^+ & c_1^- & \cdots & c_5^+ & c_5^- \end{bmatrix} \tag{36}$$

全局传递矩阵 $\boldsymbol{T}$ 大小为 30×30，每个单元的分量可以用 3×3 的矩阵块表示，波动在单个单元上沿一个方向传播。$\boldsymbol{T}$ 在除下列位置以外全为零元素

$$\boldsymbol{T}(1,2)=\boldsymbol{r}^{1+},\quad \boldsymbol{T}(1,9)=\boldsymbol{t}^{5\to1} \tag{37a}$$

$$\boldsymbol{T}(2,1)=\boldsymbol{r}^{1-},\quad \boldsymbol{T}(2,4)=\boldsymbol{t}^{2\to1} \tag{37b}$$

$$\boldsymbol{T}(3,4)=\boldsymbol{r}^{2+},\quad \boldsymbol{T}(3,1)=\boldsymbol{t}^{1\to2} \tag{37c}$$

$$\boldsymbol{T}(4,6)=\boldsymbol{I} \tag{37d}$$

$$\boldsymbol{T}(5,3)=\boldsymbol{I} \tag{37e}$$

$$\boldsymbol{T}(6,5)=\boldsymbol{r}^{3-},\quad \boldsymbol{T}(6,8)=\boldsymbol{t}^{4\to3} \tag{37f}$$

$$\boldsymbol{T}(7,8)=\boldsymbol{r}^{4+},\quad \boldsymbol{T}(7,5)=\boldsymbol{t}^{3\to4} \tag{37g}$$

$$\boldsymbol{T}(8,7)=\boldsymbol{r}^{4-},\quad \boldsymbol{T}(8,10)=\boldsymbol{t}^{5\to4} \tag{37h}$$

$$\boldsymbol{T}(9,0)=\boldsymbol{r}^{5+},\quad \boldsymbol{T}(9,7)=\boldsymbol{t}^{4\to5} \tag{37i}$$

$$\boldsymbol{T}(10,2)=\boldsymbol{t}^{1\to5} \tag{37j}$$

全局对角耗散矩阵 $\boldsymbol{D}$ 可写为

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} T^{+}(\theta_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & T^{-}(-\theta_1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T^{+}(\theta_5) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & T^{-}(\theta_5) \end{bmatrix} \tag{38}$$

其中单元 j 的长度为 θj 。对于弯曲梁单元：$\theta_1=\theta_4=\theta_5=\pi/2$；$\theta_2=\theta_3=\pi/4$。$\boldsymbol{T}^{\pm}$ 都是 30×30 的矩阵，将各单元长度代入，可解得所有单元传递矩阵 $\boldsymbol{T}^{\pm}$。

施加外力于单元 3 和单元 4 之间，将引起波动 $\boldsymbol{c}^{2-}$ 和 $\boldsymbol{c}^{3+}$，所以在 $\boldsymbol{c}_0$ 中第 4 行与第 5 行为非零元素

$$\boldsymbol{c}_0=\left[\underbrace{0\quad 0}_{\text{单元1}}\quad \underbrace{0\quad q_{2-}}_{\text{单元2}}\quad \underbrace{q_{3+}\quad 0}_{\text{单元3}}\quad \underbrace{0\quad 0}_{\text{单元4}}\quad \underbrace{0\quad 0}_{\text{单元5}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{39}$$

数值计算程序的求解过程为：①将式(37)、式(38)、式(39)代入 $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{TD})^{-1}\boldsymbol{c}_0$ 求得波幅矢量 $\boldsymbol{c}$；②将 $\boldsymbol{c}$ 代入位移式（2）可解得任意单元中的位移响应；③将式(37)和式(38)分别代入 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{TD})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 和 $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{TD}|=0$ 求解自由响应；④对频谱的实部进行偶拓展，虚部进行奇拓展，重构时域响应。

4.2　数值仿真

4.2.1　自由振动

图 4 是特征方程的数值解图，其中：横坐标为量纲为一的频率；纵坐标为扫频势特征方程的幅值。经归一化可得固有频率(Hz)分别为 224.34、269.86、687.42、725.97、1325.60、1379.02、2194.17、3045.55、3165.39。

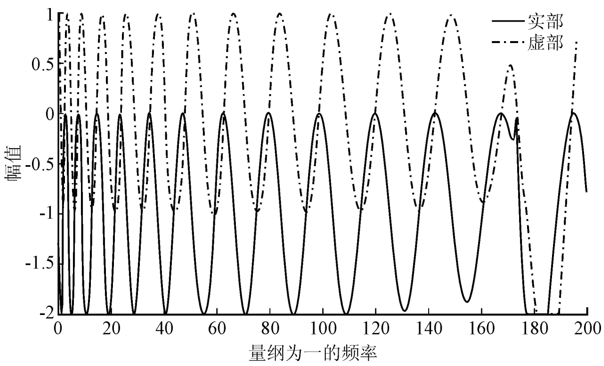

图 4　频率方程的幅频曲线

图 5 为圆环转速在 0~1×10^{6}r/m 范围内使用扫频方法求得的所有固有频率。由图 5(a)~5(e)可知：变截面圆环在静止时有两个非常接近的固有频率；随着转速的增加，第一、三阶固有频率存在局部区域低于静止圆环固有频率。

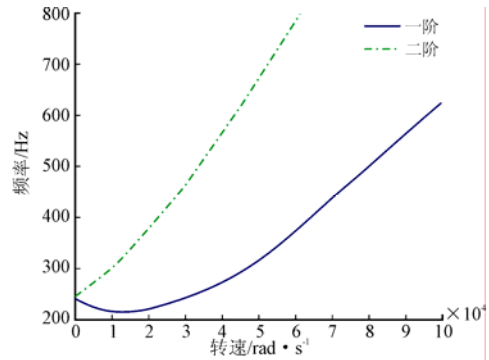

图5(a) 一、二阶固有频率

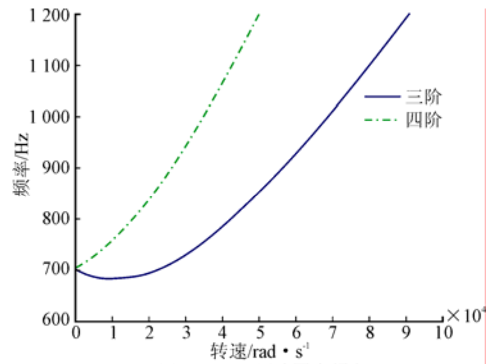

图5(b) 三、四阶固有频率

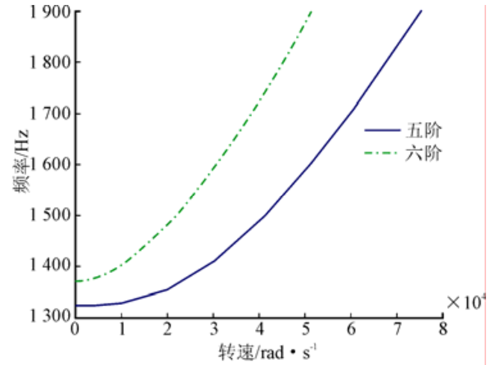

图5(c) 五、六阶固有频率

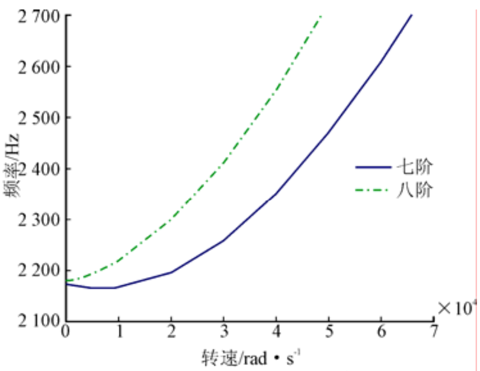

图5(d) 七、八阶固有频率

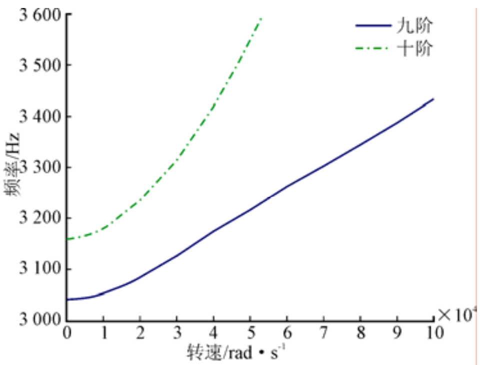

图5(e) 九、十阶固有频率

图 5 转速影响固有频率

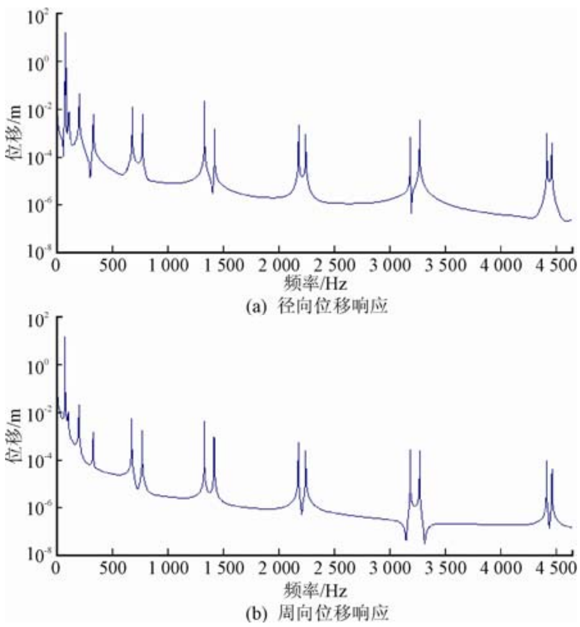

图 6 频域位移响应

4.2.2 受迫振动

使用式(25)~式(27)定义的几何关系，可用射线寻迹法计算作用于单元 2 和单元 3 之间的集中力 $\boldsymbol{F}$ 所引起的 A 点两个方向的位移。为激起所有模态，设外力为：$\boldsymbol{V}_{\mathrm{ext}}=\boldsymbol{N}_{\mathrm{ext}}=1\mathrm{N}$、$\boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}=1\mathrm{N{\cdot}m}$。

A 点径向和周向的位移响应如图 6 所示。A 点处位移响应的最大共振峰位于转动特征频率处。各阶固有频率都有两个共振峰，这与本节自由响应的结果一致。

5 结束语

射线寻迹法以波动传播的观点，使用传播和散射来描述扰动在结构中的传播；文中应用射线寻迹法研究不等截面圆环的自由、受迫响应。其表达式与相位封闭原理结果一致，这对于复杂结构而言，建模相对容易。

在计算结果中，旋转不等截面圆环分支的起点不是同一点，而旋转等截面圆环固有频率分支的起点为同一点[9]。

本文方法的优点在于建立局部坐标，叠加每个单元波动所有迹，得到特征方程，简化建模过程。射线寻迹法可以解决复杂环类的动力学建模问题。

参 考 文 献

[1] Mead D J．Waves and modes in finite beams: application of the phase-closure principle[J]．Journal of Sound and Vibration，1994，171: 695-702．

[2] Cremer L，Heckl M，Ungar E E．Structure-borne sound[M]．Berlin：Springer-Verlag，2005．

[3] Chouvion B，Popov A A，McWilliam S，et al．Vibration modeling of complex waveguide structures[J]．Computers and Structure，2011，89：1253-1263．

[4] Graff K F．Wave motion in elastic solids[M]．Belfast：Oxford University Press，1975．

[5] Lee S K，Mace B R，Brennan M J．Wave propagation，reflection and transmission in curved beams[J]．Journal of Sound and Vibration，2007，306： 636-656．

[6] Kang B，Riedel C H，Tan C A．Free vibration analysis of planar curved beams by wave propagation[J]．Journal of Sound and Vibration，2003，260：19-44．

[7] Chouvion B，Fox C H J，McWilliam S，et al．In-plane free vibration analysis of combined ring-beam structural systems by wave propagation[J]． Journal of Sound and Vibration，2010，329：5087-5104．

[8] Miller D W，Vonflotow A．A traveling wave approach to power flow in structural networks[J]. Journal of Sound and Vibration，1989，128：145-162．

[9] 唐亮，黄迪山，朱晓锦．旋转圆环动态特性的行波解[J]．应用力学学报，2011，28（3）：259-265．

[10] Huang S C，Soedel W．Effects of coriolis acceleration on the free and forced in-plane vibrations of rotating rings on elastic foundation[J]．Journal of Sound and Vibration，1987，115：253-274．