

基于非线性几何场论求解热弹性板大挠度弯曲的 BEM 法

王元丰

(北京航空航天大学固体力学所, 北京, 100083)

BEM FOR FINITE DEFLECTION OF HEATED ELASTIC THIN PLATES BASED ON GEOMETRICALLY NONLINEAR FIELD THEORY

Wang Yuanfeng

(Research Center of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 100083)

摘 要 基于理性力学非线性几何场理论, 建立了热弹性薄板等效速率形式的 Karman 方程, 通过将热弹性薄板大挠度弯曲问题看成平板弯曲问题与平面大变形问题的耦合, 在固定坐标系及拖带坐标系上推导出两组边界积分方程, 从而建立起新的分析热弹性薄板大挠度弯曲的边界元法。算例表明本文方法理论可靠、精度高。

关键词 热弹性薄板, 边界元法, 大挠度, 拖带坐标, 瞬时位形

中图分类号 V214.35, V215.4

Abstract On the basis of geometrically nonlinear field theory of rational mechanics, the equivalent Karman equations in rate form of finite deflection of heated elastic thin plates are given. Transforming the equations into boundary integral equations in two different frames by considering that finite deflection is a coupled problem of small deflection of thin plate and planar finite deformation, a new boundary element method for the problem is set up. Numerical examples demonstrate that the method is accurate and reliable.

Key words heated elastic thin plate, BEM, finite deflection, co-moving coordinate, instantaneous configuration

求解板壳大挠度弯曲问题的常用方法有摄动法、差分法和有限元法等, 文献[1、2]对板壳大挠度问题的研究进展作了全面综述。近年来, 国内外很多学者致力于用边界元法求解板壳的几何非线性问题。对于热弹性薄板的大挠度弯曲问题, 一些研究者已通过各种途径建立了几种边界元分析法^[3~5]。这些方法都是以用 Green 应变、Kirchhoff 型应力描述几何非线性理论为基础。这种非线性理论的适用性问题已引起学术界的讨论。本文则在理性力学非线性几何场论的基础上来建立热弹性板大挠度弯曲问题的边界元分析法。

1 热弹性薄板大挠度弯曲的基本方程

Van Karman 于 1910 年采用直观几何投影法建立了薄板大挠度弯曲问题的基本方

1993 年 1 月 7 日收到, 1993 年 6 月 5 日收到修改稿

程。尽管 Karman 方程的可靠性已经被证明，但由于没有严格区分变形前后位形坐标的尺规差别，karman 方程仍有一定的近似性。文献[7]指出了 Karman 方程的 4 点近似。由文献[7]可知 Karman 方程的近似主要体现在平面内平衡方程与几何方程上。因而，基于文献[6]非线性几何场理论对于热弹性薄板的大挠度弯曲问题，更准确的等效速率形式的 Karman 方程为

$$D \nabla^i \dot{W} = \dot{q} + h(\tilde{\sigma}_{ij} \dot{W}_{,ij} + \dot{\sigma}_{ij} W_{,ij}) + \nabla^i \dot{M}_T \tag{1}$$

$$\dot{\sigma}_j^i|_i = 0 \tag{2}$$

$$\dot{S}_j^i = \frac{1}{2} [V^i|_j + V^j|_i] = \frac{1}{2} \left[(F^{-1})_k^i \frac{\partial \tilde{V}^k}{\partial x^j} + (F^{-1})_k^j \frac{\partial \tilde{V}^k}{\partial x^i} \right] \tag{3}$$

$$\dot{\sigma}_j^i = \frac{E}{1+\mu} \left[\dot{S}_j^i + \frac{\mu}{1-2\mu} \dot{S}_q^q \delta_j^i \right] - \frac{E\alpha \dot{T}}{1-2\mu} \delta_j^i \tag{4}$$

(i, j, q = 1, 2, k = 1, 2, 3)

$$\dot{M}_T = \frac{E\alpha}{1-\mu} \int_{-h/2}^{h/2} \dot{T}(x_1, x_2, z) z dz$$

这里重复角标代表 Einstein 求和约定； δ_j^i 为 Kronecker 符号； $(\cdot)|_j$ 表示在瞬时位形上对拖带坐标 x^i 的协变导数； $(F^{-1})_j^i$ 是变形梯度 F^i_j 的逆表示； V^i 是在拖带系上的速度分量

\tilde{V}^i 、 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 、 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 是在整体系上的速度分量、总应力分量和应力率分量。 D 、 μ 、 α 、 $\dot{T}(x_1, x_2, z)$ 分别是弯曲刚度、泊松比、线性热膨胀系数、温度速率的分布函数。

2 边界积分方程的推导

等效速率形式的 Karman 方程可看作方程(1)薄板弯曲问题与方程(2)、方程(3)、方程(4)平面大变形问题的耦合，分别建立这两种问题的边界积分方程。则可将 Karman 方程转化为边界积分方程。

式(2)可改写为如下形式

$$\dot{S}_j^i = \frac{1}{2} \left[(F^{-1})_k^i \frac{\partial \tilde{V}^k}{\partial x^j} + (K^{-1})_k^j \frac{\partial \tilde{V}^k}{\partial x^i} \right] + \frac{1}{2} \left[(F^{-1})_3^i \frac{\partial \dot{W}^k}{\partial x^j} + (F^{-1})_3^j \frac{\partial \dot{W}^k}{\partial x^i} \right] \tag{5}$$

(i, j, k = 1, 2)

式(5)右端第一项为普通平面大变形问题的应变速率 $\dot{S}_{(n)}^j$ ，则

$$\dot{S}_j^i = \dot{S}_{(n)}^j + \frac{1}{2} \left[(F^{-1})_3^i \frac{\partial \dot{W}}{\partial x_j} + (F^{-1})_3^j \frac{\partial \dot{W}}{\partial x^i} \right] \tag{6}$$

在瞬时位形上的速率形式的 Betti 互易定理为

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}^*_{ij} \dot{S}^i_j d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\sigma}^*_{ij} \dot{S}^*_{ij} d\Omega$$

由此可将方程(2)、方程(3)、方程(4)转化为边界积分方程，其增量形式为

$$\Delta u_i^j = \int_{\Gamma} (V^* \cdot {}^m \Delta P_m - \dot{P}_{ml}^* \Delta u^m) d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{\sigma}^* \cdot {}^n {}_l [(F^{-1})^n]_3 \frac{\partial \Delta W}{\partial x^m} + (F^{-1})_3^m \frac{\partial W}{\partial x^n}] d\Omega - \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ml}^* \alpha \Delta T d\Omega \quad (7)$$

$$\text{其中: } \Delta P_m = \sqrt{\frac{g}{g_0}} \frac{1}{\det(F_j^i)} [\Delta \tilde{P}_q F_q^m + \tilde{P} \Delta u^i]_j (F^{-1})_i^j F_q^j F_m^q \quad (8)$$

上式中 $\Delta \tilde{P}_i$ 、 \tilde{P}_i 分别为整体系中表面力分量的增量和总量; $g = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$; g_0 为初始位形下的 g 值; 以上各式中带 * 号的量为基本解, 具体表达式见文献 [8].

在整体系中的内点位移增量 $\Delta \tilde{u}_{(N)}^m$ 为

$$\Delta \tilde{u}_{(N)}^m = \Delta u_{(N)}^m F_{i(N)}^m \quad (9)$$

(下标 (N) 代表内点值, 以后均同.)

据几何方程及本构关系可得到内点的应力增量. 若选定整体系为 Cartesian 坐标, $\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\sigma}_j^i$, 这样

$$\Delta \tilde{\sigma}_{ij(N)} = \Delta \sigma_i^m F_m^i (F^{-1})_j^l \quad (10)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij(N)}^{(k+1)} = \tilde{\sigma}_{ij(N)}^{(k)} + \Delta \tilde{\sigma}_{ij(N)}^{(k+1)} \quad (11)$$

对方程(1), 令

$$\dot{q}_e = \dot{q} + h(\tilde{\sigma}_{ij} W_{,ij} + \tilde{\sigma}_{ij} \dot{W}_{,ij}) \quad (12)$$

为等效荷载, 这样方程 (1) 化为

$$D \nabla^4 \dot{W} = \dot{q}_e + \nabla^2 \dot{M}_T \quad (13)$$

双调和算子方程的基本解为

$$W_1^* = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r \quad (14a)$$

引入两个辅助权函数

$$W_2^* = \frac{\partial W_1^*}{\partial t_p} = \frac{1}{8\pi} r(2 \ln r + 1) \frac{\partial r}{\partial t_p} \quad (14b)$$

$$W_3^* = \frac{\partial W_1^*}{\partial n_p} = \frac{1}{8\pi} r(2 \ln r + 1) \frac{\partial r}{\partial n_p} \quad (14c)$$

由加权余量法可将式(13)转换成 3 个边界积分方程, 其增量形式为

$$\int_{\Gamma} \left\{ \Delta W(q) V_n(W_k^*) - \Delta V_n(\Delta W(q) W_k^* + \Delta M_n(\Delta W(q)) \frac{\partial W_k^*}{\partial n_q} - \frac{\partial W(q)}{\partial n_q} M_n(W_k^*) \right\} d\Gamma(q) + \sum_{j=1}^m \left(\Delta W(q_j) [T(W_k^*)] - W_k^*(p, q_j) [\Delta T(\Delta W(q_j))] \right) = \int_{\Omega} \Delta q_e(Q) W_k^*(p, Q) d\Omega(Q) + \int_{\Omega} M_T \nabla^2 W_k^*(p, Q) d\Omega(Q) \quad k=1, 2, 3 \quad (15)$$

由式(15)可得域内点的挠度增量

$$\begin{aligned}
D\Delta W_k(p) &= \int_{\Omega} \Delta q_e(Q) W_k^*(p, Q) d\Omega(Q) + \int_{\Omega} \Delta M_T \gamma^2 W_k^*(p, Q) d\Omega(Q) \\
&+ \int_{\Gamma} \{ \Delta V_n(\Delta W(q)) W_k^*(p, q) - \Delta W(q) V_n(W_k^*) \frac{\partial \Delta W(q)}{\partial n_q} M_n(W_k^*) \\
&- \Delta M_n(\Delta W(q)) \frac{\partial W_k^*}{\partial n_q} \} d\Gamma(q) + \sum_{j=1}^m \{ W_k^*(p, Q) [\Delta T(\Delta W(q_j))] \\
&- \Delta W(q_j) [T(W_k^*(p, q_j))] \} \quad k=1, 2, 3 \quad (16)
\end{aligned}$$

由文献 [9] 有关奇异积分的积分定理, 有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \int_{\Omega} \Delta M_T (\gamma^2 W_1^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Omega} \Delta M_T \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \gamma^2 W_1^* d\Omega + \frac{1}{2} \Delta M_T(p) \delta_{ij} \quad (17)$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Delta W(p)}{\partial x_i \partial x_j} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)_p W_1^*(p, Q) \Delta q_e(Q) d\Omega(Q) \\
&+ \int_{\Omega} \Delta M_T \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) W_1^*(p, Q) d\Omega(Q) + \frac{1}{2} \Delta M_T(p) \delta_{ij} \\
&- \int_{\Gamma} \{ \Delta W(q) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)_p V_n(W_1^*) - \Delta V_n(\Delta W(q)) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)_p \\
&+ \Delta M_n(\Delta W(q)) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)_p \frac{\partial W_1^*}{\partial n_q} - \frac{\partial \Delta W(q)}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 W_1^*}{\partial x_i \partial x_j} \right)_p M_n(W_1^*) \} d\Gamma(q) \\
&+ \sum_{l=1}^m (\Delta W(q_l)) \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)_p T(w_1^*) \right] - [\Delta T(\Delta W(q_l))] \left(\frac{\partial^2 W_1^*}{\partial x_i \partial x_j} \right)_p \quad i, j=1, 2 \quad (18)
\end{aligned}$$

式 (15)、式 (17)、式 (18) 中 $[\cdot]$ 代表扭矩量在角点的跳跃; p 、 q 分别为域内点和边界点; $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)_p$ 表示对内点 p 求偏导数; 各式中带 * 号表示基本解, 具体表达式见文献 [10]。

3 求解过程及算例

热弹性板大挠度弯曲问题需要迭代求解。在迭代过程中, 将上一步的 $\Delta \tilde{\sigma}_{ij}^{(N)}$ 、

$\tilde{\sigma}_{ij}^{(N)}$ 、 $\Delta W_{,ij}^{(N)}$ 、 $W_{,ij}^{(N)}$ 、 F_j^i 作为迭代的初始值。

假定 $\Delta W_{,ij}^{(k)}$ 、 $W_{,ij}^{(k)}$ 、 $\Delta \tilde{\sigma}_{,ij}^{(k)}$ 、 $\tilde{\sigma}_{,ij}^{(k)}$ 代表这些量的第 k 步值。它们的初始值

假定为 0, 另外令初始位形 $F_j^i = \delta_j^i$, 则具体迭代过程可表示如下:

(1) 用第 k 步内点的 $\Delta W_{,ij}^{(k)}$ 、 $W_{,ij}^{(k)}$ 、 $\Delta \tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}$ 、 $\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}$ 代入式 (12) 求得 Δq_e ,

由此求解方程 (15) 得所有边界未知量信息, 进一步计算可得边界点的 $\partial \Delta W_{(1)}^{(k+1)} / \partial x$,

$\partial \Delta W_{(1)}^{(k+1)} / \partial y$ 。

(2) 根据已求得的边界量求解方程 (16)、方程 (18) 可得到内点的 $\Delta W_{(1)(N)}^{(k+1)}$ 、 $\partial \Delta W_{(1)(N)}^{(k+1)} / \partial x$ 、 $\partial \Delta W_{(1)(N)}^{(k+1)} / \partial y$ 、 $\partial W_{(1)(N)}^{(k+1)} / \partial x$ 、 $\partial W_{(1)(N)}^{(k+1)} / \partial y$ 、 $\Delta W_{.ij(1)(N)}^{(k+1)}$ 、 $W_{.ij(1)(N)}^{(k+1)}$ 。

(3) 将 $\partial \Delta W_{(1)}^{(k+1)} / \partial x$ 、 $\partial \Delta W_{(1)}^{(k+1)} / \partial y$ 、 $\partial W_{(1)}^{(k+1)} / \partial x$ 、 $\partial W_{(1)}^{(k+1)} / \partial y$ 及 $F_j^{(k)}$ 代入式 (7)。采用修正的 Lagrange 法进行迭代, 可求解式 (7), 其步骤为:

(a) 使用 k 步瞬时位形求 $k+1$ 步的位移增量, 此时由式 (7) 可得 $\Delta u_{(i)}^i$

(b) 修正位形的尺规

$$u_{(k+1)}^i = u_{(k)}^i + \Delta u_{(i)}^i, \quad F_j^i = \delta_j^i + u_{(k+1)}^i |_{.j}, \quad g_{ij} = F_i^{kT} F_j^k$$

由此修正 $\Delta P_m(F_j^i)$ 及基本解 $P_{ml}^*(F_j^i)$ 和 $V_l^{*m}(F_j^i)$, 然后重新求解积分方程 (7)

得 $\Delta u_{(i+1)}^i$ 。

(c) 类似地可得到 $\Delta u_{(1)}^i$, $\Delta u_{(2)}^i$, ..., $\Delta u_{(n-1)}^i$, $\Delta u_{(n)}^i$ 。当 $\left| \Delta u_{(n)}^i - \Delta u_{(n-1)}^i \right|$

$< \varepsilon_1$ (ε_1 为给定误差) 时, 取 $\Delta u_{(k+1)}^i = \Delta u_{(n)}^i$ 进一步可得 $\Delta \tilde{\sigma}_{ij(1)(N)}^{(k+1)}$ 、 $\tilde{\sigma}_{ij(1)(N)}^{(k+1)}$ 。

(4) 将 $\Delta W_{.ij(1)(N)}^{(k+1)}$ 、 $W_{.ij(1)(N)}^{(k+1)}$ 、 $\Delta \tilde{\sigma}_{ij(1)(N)}^{(k+1)}$ 、 $\tilde{\sigma}_{ij(1)(N)}^{(k+1)}$ 代入式 (15) 重新求解得新的边界量。

将这些量代入式 (16)、式 (18) 得内点值 $\Delta W_{(2)(N)}^{(k+1)}$ 、 $\partial \Delta W_{(2)(N)}^{(k+1)} / \partial x$ 、 $\partial \Delta W_{(2)(N)}^{(k+1)} / \partial y$ 、 $\partial W_{(2)(N)}^{(k+1)} / \partial x$ 、 $\partial W_{(2)(N)}^{(k+1)} / \partial y$ 、 $\Delta W_{.ij(2)(N)}^{(k+1)}$ 、 $W_{.ij(2)(N)}^{(k+1)}$ 。

(5) 类似可得 $\Delta W_{(1)(N)}^{(k+1)}$ 、 $\Delta W_{(2)(N)}^{(k+1)}$ 、...、 $\Delta W_{(n-1)(N)}^{(k+1)}$ 、 $\Delta W_{(n)(N)}^{(k+1)}$ 。若 $|\max(\Delta W_{(n)(N)}^{(k+1)}) - \max(\Delta W_{(n-1)(N)}^{(k+1)})| < \varepsilon_2$ (ε_2 为给定误差), 则可进行下一个步长的计算, 否则继续迭代直到得到满足精度要求的解为止。

在第(4)步迭代中取

$$\Delta W_{.ij(i+1)(N)}^{(k+1)} = \beta \Delta W_{.ij(i+1)(N)}^{(k+1)} + (1 - \beta) \Delta W_{.ij(i)(N)}^{(k+1)}$$

$$W_{.ij(i+1)(N)}^{(k+1)} = \beta W_{.ij(i+1)}^{(k+1)} + (1 - \beta) W_{.ij(i)(N)}^{(k+1)}$$

其中 β 为松弛因子。

算例 图 1 是一个周边固定的圆板, 受温度变化的作用, 温度分布函数为

$$T(R, Z) = [T_0 + T_1(1 - R^2/a^2)](1 + 2z/h), \quad R^2 = x^2 + y^2$$

采用上述方法计算所得的最大挠度 W_{\max} 与温度载荷的关系示于图 1 中。由此可以看出当 W_{\max}/h 比较小时, 本文解与文献 [4] 的解吻合很好; 但当 W_{\max}/h 较大时, 本文解

与文献 [4] 的解略有差别 (计算中划分 24 个边界单元, 36 个内部网格)。

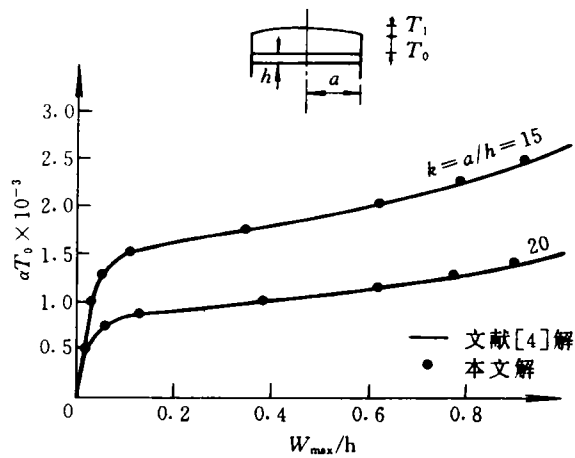


图 1 圆板及其挠度与温度的关系

参 考 文 献

- 1 沈亚鹏等. 板壳理论当前的研究进展. 应用力学学报, 1988; 5(2): 1-16
- 2 叶开源. 柔韧构件研究在中国的进展. 力学进展, 1983; 13(2): 125-133
- 3 Kamiya N, *et al.* An approximate finite deflection analysis of a heated elastic plate by the boundary element method. Appl Math Modelling, 1982; 6(2): 23-27
- 4 Ye T Q, *et al.* Finite deflection analysis of heated elastic plates by the boundary element method. In: Du Qinghua ed. Boundary Elements: Oxford: Pergamon Press, 1986: 365-374
- 5 秦荣. 样条边界元法. 南宁: 广西科学技术出版社, 1989: 305-322
- 6 陈至达. 板壳有限变形分析. 力学进展, 1983; 13(2): 19-124
- 7 陈至达. 有理力学. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1988: 63-132
- 8 谢和平. 非线性大变形问题的边界元分析法. 应用数学和力学, 1988; 9(12): 1087-1095
- 9 米赫林 G P, 李明忠, 吴立鹏译. 多维奇异积分和积分方程. 上海: 上海科学技术出版社, 1964: 1-218
- 10 杜庆华等. 边界积分方程方法——边界元法. 北京: 高等教育出版社, 1989: 126-153