

应用能量—Casimir 方法研究充液 卫星系统的运动稳定性

匡金炉 黄克累

(北京航空航天大学应用数理系, 北京, 100083)

THE NONLINEAR STABILITY OF THE LIQUID-FILLED SATELLITE WITH FOUR-FLEXIBLE-ATTACHMENTS USING THE ENERGY-CASIMIR METHOD

Kuang Jinlu, Huang Kelei

(Dept. of Appl. Math. and Mech., Beijing University of Aeronautics and Astronautics,
Beijing, 100083)

摘要 利用能量—Casimir 方法研究了带 4 个挠性梁的充液卫星系统在外力矩状态下, 关于绕铅垂轴稳态转动的非线性稳定性条件, 该条件考虑了液体的涡旋、弹性梁的振动、卫星主刚体的旋转以及流—弹—刚之间的耦合, 此外还考虑了离心力与 Coriolis 惯性力的影响。推广了 Rumjantsev 和 Marsden 的部分结果, 为带挠性梁的充液航天器的运动稳定性总体设计提供了可靠的理论依据。

关键词 充液卫星, 柔性附件, 能量—Casimir 方法

中图分类号 V474.2, V212.121

Abstract Nonlinear self-spinning stability criteria of liquid-filled satellite with four-flexible-appendages are investigated with the Energy-Casimir method. The stability conditions take into account the vorticity of the liquid, the vibration of the flexible appendages, rotations of the rigid satellite, the coupling of liquid-elasticity-rigid, and centrifugal and coriolis forces. These results which are the extension of Rumjantsev's and Marsden's are obtained for the first time.

Key words liquid-filled satellite, flexible appendages, Energy-Casimir method

随着航天高技术的发展, 卫星系统结构愈来愈复杂, 除主刚体外常设计为带有挠性附件(天线、太阳帆板等)和液体燃料。液体的涡旋、弹性附件的振动及流—弹—刚之间的耦合, 此外还有离心力与 Coriolis 惯性力等对航天器系统运动稳定性会产生不可忽视的直接影响, 因此, 该课题的研究具有重大的理论意义和工程价值^[1~13]。文献[1, 6]研究了带挠性附件的刚体的运动稳定性, 本文利用由 Arnold 和 Marsden 等人倡导的能量—Casimir 方法研究了带四个挠性附件充液卫星系统运动的非线性稳定性条件, 这里假设所研究的系统作定点运行, 因此, 带挠性附件的充液卫星系统可作为带挠性附件的陀螺系统来研究, 带多个挠性附件的充液陀螺系统的自旋稳定性条件要比带单个挠性附件的充液陀螺系统的自旋稳定性条件复杂得多。能量—Casimir 方法是基于 Arnold 的 Lie—Poisson 系统

1993年6月14日收到, 1993年10月9日收到修改稿

国家自然科学基金、国家教委博士点基金与航空基金资助课题

及其变异的系统化思想的发展。当系统的 Hamilton 结构具有足够多的 Casimir 函数时, 能量-Casimir 方法提供了一个算法, 能够求出系统的稳态运动稳定性的充分条件。从本质上说, 能量-Casimir 方法就是 Liapunov 定性方法的推广, 利用能量-Casimir 方法的关键在于寻求 Hamilton 函数与 Casimir 函数, 对于分布参数系统而言, 要研究其稳态运动的非线性稳定性条件还必须进行凸估计。有关能量-Casimir 方法的基本内容及其详细证明请参考 Krishnaprasad 和 Marsden^[1,6]的文章。

1 带挠性附件的充液卫星系统运动稳定性条件

系统构形如图 1, 随体坐标系 $OX_1X_2X_3$ 与过系统质心的主惯轴重合。假设: ① 系统静止时, 4 个挠性附件分别与坐标轴重合, 挠性附件均是线弹性剪切梁, 挠性附件的质量与系统总质量相比所占比例较小, 系统绕质心作定点运动; ② 所充液体为不可压缩理想流体, 该液体作均匀涡旋运动^[7,8]; ③ 系统处于无外力矩状态。

以系统的总能量作为 Hamilton 函数, (这里采用由 Krishnaprasad 和 Marsden^[1,6]建议的可延长的线弹性梁模型, 且在假设①条件下忽略了挠性附件的牵连动能部分)即

$$\begin{aligned}
 H_a = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{m_i^2}{I_i} + \frac{G_i^2}{I'_i} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{L_a} \frac{\|\mathbf{M}(s)\|^2}{\rho_a} ds + \frac{1}{2} \int_0^{L_a} \left\langle A \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\rangle ds \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{L_b} \frac{\|\mathbf{N}(s)\|^2}{\rho_b} ds + \frac{1}{2} \int_0^{L_b} \left\langle B \frac{d\mathbf{R}}{ds}, \frac{d\mathbf{R}}{ds} \right\rangle ds + \frac{1}{2} \int_0^{L_c} \frac{\|\mathbf{P}(s)\|^2}{\rho_c} ds \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{L_c} \left\langle C \frac{d\mathbf{v}}{ds}, \frac{d\mathbf{v}}{ds} \right\rangle ds + \frac{1}{2} \int_0^{L_d} \frac{\|\mathbf{T}(s)\|^2}{\rho_d} ds + \frac{1}{2} \int_0^{L_d} \left\langle D \frac{d\mathbf{w}}{ds}, \frac{d\mathbf{w}}{ds} \right\rangle ds \quad (1)
 \end{aligned}$$

这里 $\mathbf{M}(s)$ 、 $\mathbf{N}(s)$ 、 $\mathbf{P}(s)$ 、 $\mathbf{T}(s)$ 分别为线弹性剪切梁 -1、梁 -2、梁 -3、梁 -4 上微元的相对动量密度矢量; $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ 、 $\mathbf{R} = \mathbf{R}(s)$ 、 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s)$ 、 $\mathbf{w} = \mathbf{w}(s)$ 分别为线弹性剪切梁 -1、梁 -2、梁 -3、梁 -4 上微元的相对位移矢量; L_a 、 L_b 、 L_c 和 L_d 分别为梁 -1、梁 -2、梁 -3 和梁 -4 的长度; ρ_a 、 ρ_b 、 ρ_c 和 ρ_d 分别为梁 -1、梁 -2、梁

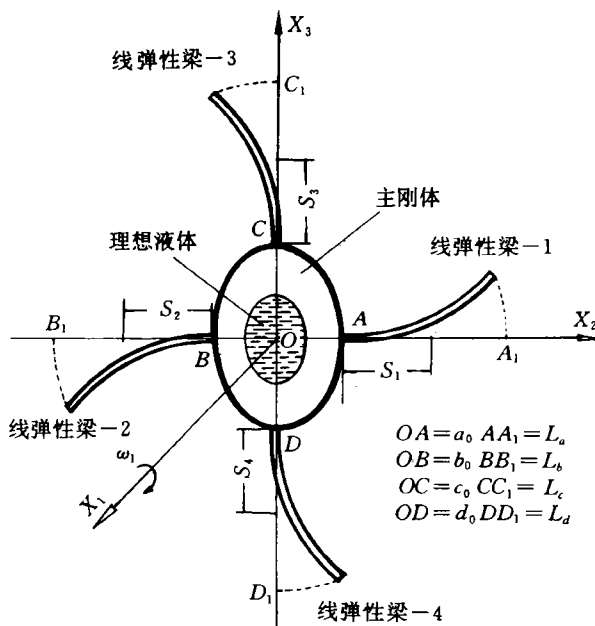


图 1 带挠性附件的充液卫星系统运动状态构形

—3 和梁 —4 的质量密度, 且 $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3]^T, \dots, \mathbf{T} = [T_1, T_2, T_3]^T$ 其中 $m_i = I_i \omega_i, G_i = I_i \Omega_i; I_i = I_{si} + I_{fi}, I'_i = I_{fi} - I'_{fi} (i = 1, 2, 3), I_{si}$ 为刚体惯性张量的分量; I_{fi} 为固化液体惯性张量的分量; I'_{fi} 为液体的等效刚体惯性张量的分量; ω_i 为主刚体角速度分量; Ω_i 为液体的均匀涡旋矢量的分量; A, B, C, D 分别为梁 —1、梁 —2、梁 —3 和梁 —4 的弹性常数对角矩阵, 即: $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3); \dots; D = \text{diag}(D_1, D_2, D_3)$ 。系统状态变量为 $U = (\mathbf{m}, \mathbf{G}, \mathbf{r}, \mathbf{M}, \mathbf{R}, \mathbf{N}, \mathbf{v}, \mathbf{P}, \mathbf{w}, \mathbf{T})$ 。

系统的Casimir函数选为

$$C_r = \frac{1}{2} \Phi(\mu\mu) + \frac{1}{2} \Gamma(Z_f) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } \mu = \mathbf{m} + \int_0^{L_a} (\mathbf{r}(s) \times \mathbf{M}(s)) ds + \int_0^{L_b} (\mathbf{R}(s) \times \mathbf{N}(s)) ds \\ + \mathbf{G} + \int_0^{L_c} (\mathbf{v}(s) \times \mathbf{P}(s)) ds + \int_0^{L_d} (\mathbf{w}(s) \times \mathbf{T}(s)) ds \end{aligned}$$

$Z_f = A_{f1} G_1^2 + A_{f2} G_2^2 + A_{f3} G_3^2$ 。这里 $A_{fi} (i = 1, 2, 3)$ 为与充液腔的形状有关的常数^[6]。

下面研究系统关于稳态运动

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m}^e &= [m_1^e, 0, 0]^T, \mathbf{G}^e = [G_1^e, 0, 0]^T, \mathbf{r}^e = [0, r_2^e, 0]^T, \mathbf{M}^e = [0, 0, M_3^e]^T, \\ \mathbf{R}^e &= [0, R_2^e, 0]^T, \mathbf{N}^e = [0, 0, N_3^e]^T, \mathbf{v}^e = [0, 0, v_3^e]^T, \mathbf{P}^e = [0, P_2^e, 0]^T, \\ \mathbf{w}^e &= [0, 0, w_3^e]^T, \mathbf{T}^e = [0, T_2^e, 0]^T \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

的稳定性。设挠性梁的质量密度 $\rho_a, \rho_b, \rho_c, \rho_d$ 为常数^[1], 附加的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(s)|_{s=0} = a_0 \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}|_{s=L_a} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{R}(s)|_{s=0} = -b_0 \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{R}(s)}{ds}|_{s=-L_b} = -\mathbf{j}, \\ \mathbf{v}(s)|_{s=0} = c_0 \mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{v}(s)}{ds}|_{s=L_c} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{w}(s)|_{s=0} = -d_0 \mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{w}(s)}{ds}|_{s=L_d} = -\mathbf{k} \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

这里 \mathbf{j}, \mathbf{k} 分别为坐标轴 OX_2, OX_3 的基矢量, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)^T, \mathbf{k} = (0, 0, 1)^T$ 。

据 $H_a + C_r$ 的一阶变分在平衡点式 (3) 为零, 即

$$\delta (H_a + C_r) |_{U^e} = 0, \mathbf{U}^e = (\mathbf{m}^e, \mathbf{G}^e, \mathbf{r}^e, \mathbf{M}^e, \mathbf{R}^e, \mathbf{N}^e, \mathbf{v}^e, \mathbf{P}^e, \mathbf{w}^e, \mathbf{T}^e).$$

由此推得

$$\alpha \Phi'(\alpha^2) = -\frac{m_1^e}{I_1}; \quad \Gamma'(Z_f^e) = -\frac{1}{A_{f1} G_1^e} \left(\alpha \Phi'(\alpha^2) + \frac{G_1^e}{I_1} \right) \tag{5a}$$

$$\frac{1}{\rho_a} M_3^e(s) + \alpha \Phi'(\alpha^2) r_2^e(s) = 0; \quad \frac{1}{\rho_b} N_3^e(s) + \alpha \Phi'(\alpha^2) R_2^e(s) = 0 \tag{5b}$$

$$\frac{1}{\rho_c} P_2^e(s) - \alpha \Phi'(\alpha^2) v_3^e(s) = 0; \quad \frac{1}{\rho_d} T_2^e(s) - \alpha \Phi'(\alpha^2) w_3^e(s) = 0 \quad (5c)$$

$$-A_2 \frac{d^2 r_2^e(s)}{ds^2} + \alpha \Phi'(\alpha^2) M_3^e(s) = 0; \quad -B_2 \frac{d^2 R_2^e(s)}{ds^2} + \alpha \Phi'(\alpha^2) N_3^e(s) = 0 \quad (5d)$$

$$-C_3 \frac{d^2 v_3^e(s)}{ds^2} - \alpha \Phi'(\alpha^2) P_2^e(s) = 0; \quad -D_3 \frac{d^2 w_3^e(s)}{ds^2} - \alpha \Phi'(\alpha^2) T_2^e(s) = 0 \quad (5e)$$

式中: $Z_f^e = A_{f1}(G_1^e)^2$; $\alpha = m_1^e + G_1^e + \int_0^{L_a} r_2^e(s) M_3^e(s) ds + \int_0^{L_b} R_2^e(s) N_3^e(s) ds$
 $-\int_0^{L_c} v_2^e(s) P_3^e(s) ds - \int_0^{L_d} w_2^e(s) T_3^e(s) ds$.

方程(5a)~式(5e)及边界条件式(4)为: $M_3^e(s)$, $r_2^e(s)$, $N_3^e(s)$, $R_2^e(s)$, $v_3^e(s)$, $P_2^e(s)$, $w_3^e(s)$, $T_2^e(s)$ (定常解) 应该满足的方程。

二阶变分 $\delta^2 H_c = \delta^2 (H_a + C_r)$ 的一般性表达式为

$$\begin{aligned} \delta^2 H_c = & \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\delta m_i^2}{I_i} + \frac{\delta G_i^2}{I_i} \right) + \int_0^{L_a} \frac{\|\delta \mathbf{M}(s)\|^2}{\rho_a} ds + \int_0^{L_a} \left\langle \mathbf{A} \frac{d\delta \mathbf{r}}{ds}, \frac{d\delta \mathbf{r}}{ds} \right\rangle ds \\ & + \int_0^{L_b} \frac{\|\delta \mathbf{N}(s)\|^2}{\rho_b} ds + \int_0^{L_b} \left\langle \mathbf{B} \frac{d\delta \mathbf{R}}{ds}, \frac{d\delta \mathbf{R}}{ds} \right\rangle ds + \int_0^{L_c} \frac{\|\delta \mathbf{P}(s)\|^2}{\rho_c} ds \\ & + \int_0^{L_c} \left\langle \mathbf{C} \frac{d\delta \mathbf{v}}{ds}, \frac{d\delta \mathbf{v}}{ds} \right\rangle ds + \int_0^{L_d} \frac{\|\delta \mathbf{T}(s)\|^2}{\rho_d} ds + \int_0^{L_d} \left\langle \mathbf{D} \frac{d\delta \mathbf{w}}{ds}, \frac{d\delta \mathbf{w}}{ds} \right\rangle ds \\ & + \frac{1}{2} \Gamma''(Z_f) (\delta Z_f)^2 + \frac{1}{2} \Gamma'(Z_f) \delta^2 Z_f + \|\delta \mu\|^2 \Phi'(\mu\mu) \\ & + 2\Phi''(\mu\mu) (\mu\delta\mu)^2 + \Phi'(\mu\mu) (\mu\delta^2\mu) \end{aligned} \quad (6)$$

这里 $\delta\mu$, δZ_f , $\delta^2 Z_f$, $\delta^2 \mu$ 的表达式请参看附录。

将二阶变分 $\delta^2 H_c$ 在稳态运动状态式(3)处取值, 且取定

$$2\Phi''(\alpha^2)\alpha^2 \geq -\Phi'(\alpha^2); \quad 2(A_{f1}^e)^2 \Gamma''(Z_f^e)(G_1^e)^2 \geq \Gamma'(Z_f^e) A_{f1} \quad (7)$$

通过演算, 且利用 Cauchy-Schwartz 不等式及 4 个类似的二次型正定的条件推知二阶变分 $\delta^2 H_c$ 正定的充分条件为

$$\beta_i > 0 \quad (i=1, \dots, 4); \quad \lambda_i > 0 \quad (i=1, \dots, 8) \quad (8a)$$

$$\frac{1}{\rho_a} > \lambda_1; \quad A_1 C_a > \lambda_2; \quad \frac{1}{\rho_a} A_2 C_a > [\alpha \Phi'(\alpha^2)]^2; \quad \frac{1}{\rho_a} A_3 C_a > [\alpha \Phi'(\alpha^2)]^2 \quad (8b)$$

$$\frac{1}{\rho_b} > \lambda_3; \quad B_1 C_b > \lambda_4; \quad \frac{1}{\rho_b} B_2 C_b > [\alpha \Phi'(\alpha^2)]^2; \quad \frac{1}{\rho_b} B_3 C_b > [\alpha \Phi'(\alpha^2)]^2 \quad (8c)$$

$$\frac{1}{\rho_c} > \lambda_5; \quad C_1 C_c > \lambda_6; \quad \frac{1}{\rho_c} C_2 C_c > [\alpha \Phi'(\alpha^2)]^2; \quad \frac{1}{\rho_c} C_3 C_c > [\alpha \Phi'(\alpha^2)]^2 \quad (8d)$$

$$\frac{1}{\rho_d} > \lambda_7; \quad D_1 C_d > \lambda_8; \quad \frac{1}{\rho_d} D_2 C_d > [\alpha \Phi'(\alpha^2)]^2; \quad \frac{1}{\rho_d} D_3 C_d > [\alpha \Phi'(\alpha^2)]^2 \quad (8e)$$

式中 β_i 、 λ_i 、 C_a 、 C_b 、 C_c 、 C_d 的表达式请看附录。

不等式 (8a) ~ 式 (8e) (共 28 个) 给出了带 4 个挠性梁的充液卫星系统绕铅垂轴稳态转动的形式稳定性条件, 该条件反映了刚—弹—液之间的耦合对系统运动稳定性的直接影响。为了研究系统关于绕铅垂轴稳态转动的 Liapunov 意义下的稳定性条件, 还必须进行凸性估计。

考虑到

$$\begin{aligned} & H_a(\mathbf{U}) - H_a(\mathbf{U}_e) - \Delta H_a(\mathbf{U}_e) d\mathbf{U} \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dm_i^2}{I_i} + \frac{dG_i^2}{I_i} \right) + \int_0^{L_a} \frac{\|d\mathbf{M}(s)\|^2}{\rho_a} ds + \int_0^{L_b} \frac{\|d\mathbf{N}(s)\|^2}{\rho_b} ds + \int_0^{L_c} \frac{\|d\mathbf{P}(s)\|^2}{\rho_c} ds \\ &+ \int_0^{L_d} \frac{\|d\mathbf{T}(s)\|^2}{\rho_d} ds + \int_0^{L_a} \left\langle \mathbf{A} \frac{d\delta\mathbf{r}}{ds}, \frac{d\delta\mathbf{r}}{ds} \right\rangle ds + \int_0^{L_b} \left\langle \mathbf{B} \frac{d\delta\mathbf{R}}{ds}, \frac{d\delta\mathbf{R}}{ds} \right\rangle ds \\ &+ \int_0^{L_c} \left\langle \mathbf{C} \frac{d\delta\mathbf{v}}{ds}, \frac{d\delta\mathbf{v}}{ds} \right\rangle ds + \int_0^{L_d} \left\langle \mathbf{D} \frac{d\delta\mathbf{w}}{ds}, \frac{d\delta\mathbf{w}}{ds} \right\rangle ds \\ &= Q_1(d\mathbf{m}, d\mathbf{G}, d\mathbf{r}, d\mathbf{M}, d\mathbf{R}, d\mathbf{N}, d\mathbf{v}, d\mathbf{P}, d\mathbf{w}, d\mathbf{T}) \end{aligned} \quad (9a)$$

这里: Q_1 为其变量的正定二次型。而

$$\begin{aligned} & C_r(\mathbf{U}) - C_r(\mathbf{U}_e) - \Delta C_r(\mathbf{U}_e) d\mathbf{U} = 2\Phi'(\mu_e \mu_e)(\mu_e d\mu)^2 + \Phi'(\mu_e \mu_e) \|d\mu\|^2 \\ &+ \Phi'(\mu_e \mu_e)(\mu_e d^2\mu) + \frac{1}{2} \Gamma''(Z_f^e)(dZ_f)^2 + \frac{1}{2} \Gamma'(Z_f^e) d^2 Z_f + \text{高次项} \end{aligned} \quad (9b)$$

式中 $\mu_e = [0, 0, \alpha]^T$; Δ 表示对 \mathbf{U} 的全导数。当 $\|d\mathbf{U}\| = \|\mathbf{U} - \mathbf{U}_e\|$ 充分小时, 忽略高次项, 根据式 (7)、式 (9b) 得

$$\begin{aligned} & C_r(\mathbf{U}) - C_r(\mathbf{U}_e) - \Delta C_r(\mathbf{U}_e) d\mathbf{U} \geq - \frac{\Phi'(\alpha^2)(\mu_e d\mu)^2}{\alpha^2} + \Phi'(\alpha^2) \|d\mu\|^2 \\ &+ 2\Phi'(\alpha^2) \mu_e \left[\int_0^{L_a} (d\mathbf{r} \times d\mathbf{M}) ds \int_0^{L_b} (d\mathbf{R} \times d\mathbf{N}) ds + \int_0^{L_c} (d\mathbf{v} \times d\mathbf{P}) ds + \int_0^{L_d} (d\mathbf{w} \times d\mathbf{T}) ds \right] \\ &+ \Gamma'(Z_f^e) \sum_{i=1}^3 [A_{f_i} (dG_i)^2] \\ &= Q_2(d\mathbf{m}, d\mathbf{G}, d\mathbf{r}, d\mathbf{M}, d\mathbf{R}, d\mathbf{N}, d\mathbf{v}, d\mathbf{P}, d\mathbf{w}, d\mathbf{T}) \end{aligned} \quad (9c)$$

据二阶变分的有关估计式知 Q_2 也为其变量的正定二次型, 因此, 下述不等式 $Q_1(d\mathbf{U}) + Q_2(d\mathbf{U}) > 0$ (当 $d\mathbf{U} \neq 0$ 时) 成立, 又考虑到 $H_a + C_r$ 关于范数 $\|\mathbf{U}\|^2 = Q_1(\mathbf{U}) + Q_2(\mathbf{U})$ 是连续的, 故带 4 个挠性梁的充液卫星系统关于稳态运动式 (3) 是 Liapunov 稳定的。

2 结 论

利用由 Arnold、Marsden 等人倡导的能量—Casimir 方法研究了带 4 个挠性梁的充液卫星系统关于绕铅垂轴稳态自旋的稳定性条件, 该条件考虑了液体的涡旋、弹性梁的振动、刚体的旋转以及流—弹—刚之间的耦合, 此外还考虑了离心力与 Coriolis 惯性力的影响。不难验证, 带 4 个挠性梁的充液卫星系统关于绕铅垂轴稳态转动的稳定性条件式(8a)~式(8e)可退化为只带挠性梁的刚体绕铅垂轴稳态转动的稳定性条件^[1]; 也可以退化为充液刚体绕铅垂轴稳态转动的稳定性条件^[7]。若充液复杂结构航天器作定点运动, 则能量—Casimir 方法是一种研究其运动稳定性的有效方法。

在本研究过程中曾得到清华大学王照林教授和北京航空航天大学陆启韶教授的鼓励与帮助, 在此表示衷心感谢!

参 考 文 献

- 1 Krishnaprasad P S, Marsden J E. Hamiltonian structures and stability for rigid bodies with flexible attachments. Arch Rat Mech Anal., 1987; 98(1):71-93
- 2 Kane T, Likins P, Levinson D. Spacecraft dynamics. New York: McGraw-Hill, 1983:100-121
- 3 Arnold V I. On an a Priori estimate in the theory of hydrodynamics stability. English Transl: Am Math Soc Transl 1969; (19):267-269
- 4 Arnold V I. Mathematical methods of classical mechanics. Springe-Verlag, 1978: 123-154
- 5 Holm D D, Marsden J E, Ratiu T, Weinstein A. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria. Phys Rep. 1985; (123): 1-116
- 6 Posbergh T A, Krishnaprasad P S, Marsden J E. Stability analysis of a rigid body with a flexible attachment using the Energy-Casimir method. Cont Math AMS, 1987; (68):253-273
- 7 Rumjantsev V V. Liapunov's methods in the study of stability of motions of rigid bodies with fluid-filled cavities. Advances in Applied Mechanics, 1964; 8: 183-231
- 8 Pfeiffer F. Problems of contained rotating fluids with respect to aerospace applications. ESA SP-129; 1979:51-62
- 9 王照林, 廖敏, 邓重平. 部分充液球形偏置贮箱的旋转卫星系统的运动分析. 力学学报, 1989;21(3):336-343
- 10 王照林. 运动稳定性与卫星姿态动力学. 力学进展, 1980;10(4):15-30
- 11 刘延柱. 轴对称充液刚体的自旋稳定性. 上海交通大学学报, 1984; 18(5):1-8
- 12 李骧. 旋转充液腔体的有限扰动稳定问题. 应用数学和力学, 1983; 4(5):609-620
- 13 朱如曾. 充液腔体旋转运动的稳定性理论. 中国科学, A辑, 1984; (7): 624-633

附 录

公式(6)中的有关中间变量的变分表达式为

$$\begin{aligned} \delta\mu = & (\delta\mathbf{m} + \delta\mathbf{G} + \int_0^{L_a} (\delta\mathbf{r}(s) \times \mathbf{M}(s) + \mathbf{r}(s) \times \delta\mathbf{M}(s)) \, ds + \int_0^{L_b} (\delta\mathbf{R}(s) \times \mathbf{N}(s) \\ & + \mathbf{R}(s) \times \delta\mathbf{N}(s)) \, ds + \int_0^{L_c} (\delta\mathbf{v}(s) \times \mathbf{P}(s) \\ & + \mathbf{v}(s) \times \delta\mathbf{P}(s)) \, ds + \int_0^{L_d} (\delta\mathbf{w}(s) \times \mathbf{T}(s) + \mathbf{w}(s) \times \delta\mathbf{T}(s)) \, ds \\ \delta Z_f = & 2 (A_{f_1} G_1 \delta G_1 + A_{f_2} G_2 \delta G_2 + A_{f_3} G_3 \delta G_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^2 Z_f = & 2 (A_{f_1} \delta G_1^2 + A_{f_2} \delta G_2^2 + A_{f_3} \delta G_3^2) \\ \delta^2 \mu = & 2 \int_0^{L_a} (\delta \mathbf{r}(s) \times \delta \mathbf{M}(s)) \, ds + 2 \int_0^{L_b} (\delta \mathbf{R}(s) \times \delta \mathbf{N}(s)) \, ds \\ & + 2 \int_0^{L_c} (\delta \mathbf{v}(s) \times \delta \mathbf{P}(s)) \, ds + 2 \int_0^{L_d} (\delta \mathbf{w}(s) \times \delta \mathbf{T}(s)) \, ds \end{aligned}$$

公式 (8a)~(8e) 中的符号 β_i, λ_i 的表达式为:

$$\beta_1 = \left[\Phi'(\alpha^2) \right]^2 / \left(\Phi'(\alpha^2) + \frac{1}{I_2} \right); \quad \beta_2 = \left[\Phi'(\alpha^2) \right]^2 / \left(\Phi'(\alpha^2) + \frac{1}{I_3} \right)$$

$$\beta_3 = (1 - \beta_1)^2 \left[\Phi'(\alpha^2) + \frac{1}{I_2} + \Gamma'(Z_f^e) A_{f_2} - \beta_1 \right]$$

$$\beta_4 = (1 - \beta_2)^2 \left[\Phi'(\alpha^2) + \frac{1}{I_3} + \Gamma'(Z_f^e) A_{f_3} - \beta_2 \right]$$

$$\lambda_1 = 4[-\Phi'(\alpha^2) + \beta_1 + \beta_3] \int_0^{L_a} (M_3^e(s))^2 \, ds;$$

$$\lambda_2 = 4[-\Phi'(\alpha^2) + \beta_2 + \beta_4] \int_0^{L_a} (r_2^e(s))^2 \, ds$$

$$\lambda_3 = 4[-\Phi'(\alpha^2) + \beta_1 + \beta_3] \int_0^{L_b} (N_3^e(s))^2 \, ds;$$

$$\lambda_4 = 4[-\Phi'(\alpha^2) + \beta_2 + \beta_4] \int_0^{L_b} (R_2^e(s))^2 \, ds$$

$$\lambda_5 = 4[-\Phi'(\alpha^2) + \beta_1 + \beta_3] \int_0^{L_c} (v_3^e(s))^2 \, ds;$$

$$\lambda_6 = 4[-\Phi'(\alpha^2) + \beta_2 + \beta_4] \int_0^{L_c} (P_2^e(s))^2 \, ds$$

$$\lambda_7 = 4[-\Phi'(\alpha^2) + \beta_1 + \beta_3] \int_0^{L_d} (w_3^e(s))^2 \, ds;$$

$$\lambda_8 = 4[-\Phi'(\alpha^2) + \beta_2 + \beta_4] \int_0^{L_d} (T_2^e(s))^2 \, ds$$

公式 (9a)~(9e) 中的部分符号的表达式如下

$$C_a = \pi^2 / (4L_a^2), \quad C_b = \pi^2 / (4L_b^2), \quad C_c = \pi^2 / (4L_c^2),$$

$$C_d = \pi^2 / (4L_d^2)$$