第15卷 第4期 航 空 学 报 Vol.15 No.4
1994年 4月 ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA Apr. 1994

多目标决策的交互式 maximin 方法及其在资源分配中的应用

石永恒 顾昌耀
(北京航空航天大学管理学院，北京，100083)

AN INTERACTIVE MAXIMIN METHOD FOR MULTIOBJECTIVE DECISION AND ITS APPLICATION TO RESOURCE ALLOCATION

Shi Yongheng, Gu Changyao
(School of Management, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 100083)

摘 要 多目标决策的交互式 maximin 方法一直没有解决如何根据决策者的愿望（特别是变化了的愿望）调整满意解。本文研究了调整原理，调整过程中所要调整的参数具有明确的实际意义。将交互式 maximin 方法应用到资源分配问题，建立了资源分配的多目标决策模型，并设计了系统分解协调的求解方法。

关键词 目标程序，相互作用，分配

中图分类号 F416.5，F124.5，O29:TB11

Abstract This paper studies the principles of adjustment ofter the maximin method is introduced. The parameters to be adjusted in interaction are similar to the DM (Decision Maker) and reflect the aspiration of the DM. This paper applies the method to resource allocation problem. The multiobjective decision model for resource allocation is built. And the method of system decomposition and coordination is designed. An algorithm of piecewise linearization is designed to solve the resource allocation problem. The algorithm is proved to be locally convergent. Finally a numerical example is given.

Key words objective programs, interactions, allocations

过去人们研究的模糊规划和切比雪夫方法都属于 maximin 或 minimax 方法[1~3]。在交互式 maximin 方法的人机交互过程中，通过调整一定的参数以求出新的调整后的满意解。但如果不遵守一定的调整原理，所求出的新解不一定能够满足决策者的要求。因此，本文在介绍了 maximin 方法以后，研究了调整原理；最后将 maximin 方法应用于资源分配问题。

1 maximin 方法

设多目标决策模型为

$$\max_{x\in S}[f_1(x), \cdots, f_n(x)]^t \tag{1}$$

1992 年 4 月 21 日收到，1992 年 11 月 12 日收到修改稿

决策者经常以下种方式表达自己的愿望：

"月收入不低于600元，尽可能接近620元" 这种形式的愿望可以表示为

$$\underline{f}_i \leqslant f_i(x) \rightarrow \bar{f}_i, \quad i=1, \cdots, n$$

这里$\bar{f}_i$ 是关于目标$f_i(x)$ 的期望点；$\underline{f}_i$ 是关于目标$f_i(x)$ 的容忍点。引入以下满意度函数

$$u_i(x, \bar{f}_i, \underline{f}_i)=\frac{f_i(x)-\underline{f}_i}{\bar{f}_i-\underline{f}_i}, \quad i=1, \cdots, n$$

多目标决策 maximin 方法就是求解以下 maximin 规划

$$\max_{x \in S} \min_{i=1}^{n} u_i(x, \bar{f}_i, \underline{f}_i) \tag{2}$$

通过增加一个新的变量，以上规划可以转换为一个一般规划问题[1]。但式 (2) 仅能保证解的弱有效性[2]。为求出多目标决策的有效解，可以求解以下摄动的 maximin 规划

$$\max_{x \in S}\left[\min_{i=1}^{n} u_i(x, \bar{f}_i, \underline{f}_i)+\alpha \sum_{j=1}^{n} u_j(x, \bar{f}_j, \underline{f}_j)\right] \tag{3}$$

求解式 (3) 即可得到式 (1) 的有效满意解[2]。

2　调整原理

在求出一个满意解以后，决策者会表示对这一结果的看法。例如，决策者认为$f_k(x)$ 有些小，这时就应该求出一个新的满意解，使得目标$f_k(x)$ 有所改善。提高参数$\bar{f}_k$ 和$\underline{f}_k$ 会使相应的满意度函数降低，在 maximin 方法中较小的满意度函数有利于改善相应的目标。但如果不遵守一定的参数调整规则，所求出的新的满意解不一定符合决策者的要求。下面的例子就说明了这一点。

例　设有以下多目标决策问题

$$\max f(x)=\begin{bmatrix} f_1(x)=x_1 \\ f_2(x)=x_1+x_2 \end{bmatrix}$$

s.t.

$$x_1+x_2 \leqslant 5$$
$$2x_1+x_2 \leqslant 8$$
$$x_1+2x_2 \leqslant 8$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

令$\bar{f}_1=2$，$\underline{f}_1=0$，$\bar{f}_2=5$，$\underline{f}_2=0$。根据式 (2) 求出的解为 $x^*=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $f(x^*)=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$。

设决策者认为 $f_1(x)$ 有点小，调整 $\bar{f}_1$ 到 $\bar{f}_1+\Delta=3$、$\underline{f}_1$ 到 $\underline{f}_1+\Delta=1$，则根据式 (2) 求出的解保持不变。

为了满足决策者的要求，有必要研究参数 $\bar{f}_i$ 和 $\underline{f}_i$，$i=1$，…，n，是如何影响满意解的。设决策者希望改善目标 $f_1(x)$，…，$f_k(x)$，$k<n$。将参数 $\underline{f}_i$，f_i，$i=1$，…，k，增加到 $\bar{f}_i+\Delta i$，$\underline{f}_i+\Delta_i$，$i=1$，…，k。于是式 (2) 变为

$$\max_{x\in S}\quad \min\left[\min_{i=1}^{k} u_i(x,\ \bar{f}_i+\Delta_i,\ \underline{f}_i+\Delta_i),\ \min_{i=k+1}^{n} u_i(x,\ \bar{f}_i,\ \underline{f}_i)\right] \tag{4}$$

定理 1　设 x^* 是式 (2) 的最优解，存在 $y\in S$ 满足

$$f_i(y)=f_i^*>f_i(x^*),\qquad i=1,\cdots,k;\ k<n$$

如果 Δ_i，$i=1$，…，k，充分大且满足

$$u_1(x^*,\ \bar{f}_1+\Delta_1,\ \underline{f}_1+\Delta_1)=\cdots=u_k(x^*,\ \bar{f}_k+\Delta_k,\ \underline{f}_k+\Delta_k)<\min_{i=1}^{m} u_i(x^*,\ \bar{f}_i,\ \underline{f}_i)$$

则式(4)的最优解 z 满足

$$f_i(z)>f_i(x^*),\qquad i=1,\cdots,k$$

由以上定理可知，如果决策者想改善某些目标，只须充分协调地增加相应目标的期望点和容忍点。决策过程中所要调整的参数具有明确的实际意义，对决策者很直观。

3　资源分配中的应用

研究的资源分配问题中包括一个上级决策者 DM。和多个下级决策者 DM_1，…，DM_n。下级 DM_j 要向上级 DM_0 汇报必要的信息；根据汇报信息，DM_0 决定分配给 DM_j 的资源量。

上级决策者要分配的资源包括资金和一些物质资源，其中资金由 DM_0 直接控制，其它物质资源是一些下级的产品，这些产品由 DM_0 有计划地分配到另一些下级部门。这里 DM_0 仅考虑重要的因素和重要的联系，所要分配的资源是具有不可替换性的重要资源，即生产中各下级部门所需要的各种资源是成比例的。用 R_0 代表资金；用 R_i，$i=1$，…，m，代表 m 种不同的物质资源。假定 DM_j 需要 R_0 及 R_k，$k\in J_j$，J_j 是 DM_j 所需资源的集合，$J_j\subset M=\{1,\cdots,n\}$。若 DM_0 分配给 DM_j 一些资金，DM_j 将用这些资金按生产中所需的比例去购买不同的资源，并要求 DM_0 给以相应的指标。设若 DM_j 得到的资金量为 x_j 时，对 R_k 的需求量为 $\alpha_{jk}x_j$，同时能生产总量为 $h_{jp}(x_j)$ 的资源 R_p。于是可以用 $x=(x_1,\cdots,x_n)'$ 表示一个分配方案。当分配方案为 x 时，下级

决策者所生产的资源 R_k 总量为 $\sum_{j\in P_k}\alpha_{jk}(x_j)$，这里 P_k 是生产 R_k 的下级部门集合；对 R_k 的需求总量为 $\sum_{j\in Q_k}h_{jk}x_j$，这里 Q_k 是需求 R_k 的下级部门的集合，P_k，$Q_k\subset N=\{1,\cdots,n\}$。

设DM_0的目标是

$$\max[f_1(x),\cdots,f_l(x)]^t$$

这里认为 DM_0 的目标具有可分性，即

$$f_i(x)=\sum_{j\in E_i}f_{ij}(x_j),\qquad i=1,\cdots,l$$

这里$f_{ij}(x_j)$是 DM_j 对第 i 个目标的贡献；E_i 是对第 i 个目标有贡献的下级决策者集合，$E_i\subset N$。

假定:

①$f_{ij}(x_j)$和 $h_{jk}(x_j)$是连续、二次可微的增函数;

② 一阶微分函数$f'_{ij}(x_j)$和 $h'_{jk}(x_j)$是 x_j 的减函数；

③ 二阶微分函数$f''_{ij}(x_j)$和 $h''_{jk}(x_j)$是有界的，即边际收益的变化是有限的。

下面引入几个满意度函数。

① 引入 $\mu_i(x)$ 表达上级决策者“$f_i(x)$不低于$\underline{f}_i$、尽可能接近$\bar{f}_i$”的愿望，

$$\mu_i(x)=\frac{f_i(x)-\underline{f}_i}{\bar{f}_i-\underline{f}_i},\qquad i=1,\cdots,l$$

② 引入 $\eta_0(x)$ 表达上级决策者“总资金用量不超过$\bar{b}$，尽可能接近$\underline{b}$”的愿望，

$$\eta_0(x)=\frac{\bar{b}-\sum_{j=1}^{n}x_j}{\bar{b}-\underline{b}}$$

③ 引入 $\eta_k(x)$ 表达上级决策者希望资源 R_k 的供求不发生冲突且没有过多剩余的愿望，

$$\eta_k(x)=\begin{cases}\dfrac{2[\sum_{j\in P_k}h_{jk}(x_j)-\sum_{j\in Q_k}\alpha_{jk}x_j]}{d_k}, & \text{如果}\sum_{j\in P_k}h_{jk}(x_j)-\sum_{j\in Q_k}\alpha_{jk}x_j\leqslant\dfrac{d_k}{2}\\[2ex] \dfrac{2[d_k-\sum_{j\in P_k}h_{jk}(x_j)-\sum_{j\in Q_k}\alpha_{jk}x_j]}{d_k}, & \text{如果}\sum_{j\in P_k}h_{jk}(x_j)-\sum_{j\in Q_k}\alpha_{jk}x_j>\dfrac{d_k}{2}\end{cases}$$

$$k=1,\cdots,m$$

以上满意度函数的含义是使资源 R_k 的剩余落在$[0,\ d_k]$之内，且尽可能接近 $d_k/2$。

资源分配的 maximin 决策模型如下

$(P1)$

$$\max_{x\geqslant 0}\min[\mu_i(x),\ i=1,\ \cdots,\ l;\ \eta_k(x),\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ m]$$

这里给出一个求解 $(P1)$ 的逐点线性化算法，包括以下步骤：

①选择一个初始可行解$y=(y_1,\ \cdots,\ y_n)'$做为初始解;

②下级决策者汇报必要的信息;

③将函数$f_{ij}(x_j)$和$h_{jk}(x_j)$在y点附近线性化;

④在约束$y-\delta\leqslant x\leqslant y+\delta$的条件下，求解线性化后的规划，得到一个新解$x^*$；

⑤如果$\|y-x^*\|\leqslant\varepsilon$，则停止计算；否则，令$y=x^*$，回到步骤⑤。

以上算法显然是系统分解协调的方法。

定理2 逐点线性化算法求出的解收敛于$(P1)$的局部最优解。

算例 设上级 DM_0 下属两个部门 DM_1 和 DM_2，DM_0 分配给下级的资金分别为 x_1 和 x_2；DM_1 的生产产量为 $y_1(x_1)$，收入为 $g_1(x_1)$；DM_2 对 DM_1 的产品需求量为 $y_2(x_2)$，收入为 $g_2(x_2)$;

$$y_1(x_1)=90+\sqrt{x_1+10},\quad y_2(x_2)=60+2x_2$$
$$g_1(x_1)=50+\sqrt{x_1+10},\quad g_2(x_2)=20\sqrt{x_2+10}$$

DM_0 的目标是$f_1(x)=g_1(x_1)+g_2(x_2)$，$f_2(x)=y_1(x_1)$。取$\bar{f}_1=164$，$\underline{f}_1=115$，$\bar{f}_2=100$，$\underline{f}_2=79$，$\bar{b}=46$，$\underline{b}=20$，$d=21$。则有

$$\mu_1(x)=[g_1(x_1)+g_2(x_2)-115]/49$$
$$\mu_2(x)=[y_1(x_1)-79]/21$$
$$\eta_0(x)=[46-x_1-x_2]/26$$
$$\eta_1(x_1)=\begin{cases}[y_1(x_1-y_2(x_2)]/10.5, & y_1(x_1)-y_2(x_2)\leqslant 10.5\\ [21-y_1(x_1)+y_2(x_2)]/10.5, & y_1(x_1)-y_2(x_2)>10.5\end{cases}$$

将以上各式代入到模型 $(P1)$ 中，经算法求解，可得

$$x_1=13.12,\quad x_2=13.44$$
$$f_1(x)=151.6,\quad f_2(x)=94.8$$

参 考 文 献

1 Zimmermann H J. Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. Fuzzy Sets and Systems, 1978; (1):45-55

2 Sakawa M, Yano H. An interactive fuzzy satisficing method using augmented minimax problem and its application to environment systems. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 1985; SMC-15(6): 720-729

3 Steuer R E, Choo E U. An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming. Mathematical Programming, 1983; (26): 326-344

4 石永恒. 多目标决策问题的字典序极大极小解. 王光谦等编: 中国博士后论文集, 北京: 北京大学出版社, 1991: 366–373

附　录

定理 1 的证明可参阅文献 [4], 这里给出定理 2 的证明。

将 $f_{ij}(x_j)$ 和 $h_{jk}(x_j)$ 在 y_j 点附近线性化, 分别记 $\tilde{f}_{ij}(x_j)$ 和 $\tilde{h}_{jk}(x_j)$ 为 $f_{ij}(x_j)$ 和 $h_{jk}(x_j)$ 线性化后的函数。假设 $f_{ij}(x_j)$ 和 $h_{jk}(x_j)$ 线性化后, 函数 $\mu_i(x)$ 变为 $\tilde{\mu}_i(x)$, $\eta_k(x)$ 变为 $\tilde{\eta}_k(x)$。于是 $(P1)$ 变为

$(P2)$

$$\max\ \min[\tilde{\mu}_i(x),\ i=1,\cdots,l;\ \tilde{\eta}_k(x),\ k=0,1,\cdots,m]$$

s.t.

$$x \geqslant 0$$
$$y-\delta \leqslant x \leqslant x+\delta$$

很明显, 如果 x 对 $(P2)$ 是可行的, 则对 $(P1)$ 也是可行的, 且有

$$\min[\mu_i(x),\ i=1,\cdots,l;\ \eta_k(x),\ k=0,1,\cdots,m]$$
$$=\min[\tilde{\mu}_i(x),\ i=1,\cdots,l;\ \tilde{\eta}_k(x),\ k=0,1,\cdots,m]+(x-y)^t O(x-y)$$

这里 $O(x-y)$ 满足 $\lim\limits_{x-y\to 0} O(x-y)=0$。从上式可知, 如果 y 是 $(P2)$ 的最优解, 则 y 也是 $(P1)$ 在 y 点附近的局部最优解。

令 $\varepsilon=0$。设逐点线性化算法的初始迭代点为 $y^{(0)}$, 经过 r 次迭代后的解为 $y^{(r)}$。令

$$x_{n+1}^{(r)}=\min[\mu_i(y^{(r)}),\ i=1,\cdots,l;\ \eta_k(y^{(r)}),\ k=0,1,\cdots,m]$$
$$r=0,1,\cdots,\cdots$$

于是就得到序列 $\{y^{(0)}, y^{(1)}, \cdots, y^{(r)}, \cdots\}$ 及序列 $\{x_{n+1}^{(0)}, x_{n+1}^{(1)}, \cdots, x_{n+1}^{(r)}, \cdots\}$。如果 δ 充分小, 就有

$$x_{n+1}^{(0)} \leqslant x_{n+1}^{(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{n+1}^{(r)} \leqslant \cdots$$

$$x_{n+1}^{(r)} \leqslant \frac{\bar{b}-\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}{\bar{b}-\underline{b}} \leqslant \frac{\bar{b}}{\bar{b}-\underline{b}}$$

$x_{n+1}^{(r)}$ 随 r 递增且有界, 因此极限 $\lim\limits_{r\to\infty} x_{n+1}^{(r)}=x_{n+1}^{(\infty)}$ 存在。对应于 $x_{n+1}^{(\infty)}$ 的 $y^{(\infty)}$ 是 $(P1)$ 的局部最优解。