

文章编号: 0253-9993(2009)12-1724-05

空心悬臂梁在 SMA 层驱动下的变形分析

杨树莲^{1,2}, 王晓辉³, 任勇生³, 王灿林²

(1. 山东工商学院 计算机系, 山东 烟台 264005; 2. 海军航空工程学院 研究生管理大队, 山东 烟台 264001; 3. 山东科技大学 机械电子工程学院, 山东 青岛 266510)

摘要: 基于经典的复合材料梁理论、Tanaka 的 SMA 应力应变关系以及 Lin 的线性相变动力模型, 研究了矩形空心悬臂梁在 SMA 驱动下的变形特性, 建立了结构应力、应变、位移求解的数学模型, 通过数值计算揭示了 SMA 层对该类结构的驱动作用, 分析了温度、壁厚度以及 SMA 残余应变的影响. 研究表明, 在马氏体向奥氏体转变过程中, 空心悬臂梁在 SMA 层的驱动下产生显著的横向位移, SMA 层厚度、残余应变是影响 SMA 的变形驱动性能的敏感参数.

关键词: 空心悬臂梁; 形状记忆合金 (SMA); 变形控制

中图分类号: V257 **文献标识码:** A

Induced deformation analysis of the cantilever box beam with SMA layers bonded to faces of wall

YANG Shu-lian^{1,2}, WANG Xiao-hui³, REN Yong-sheng³, WANG Can-lin²

(1. Computer Department, Shandong Institute of Business and Technology, Yantai 264005, China; 2. Graduate Students' Brigade, Naval Aeronautical Engineering Institute, Yantai 264001, China; 3. College of Mechanical and Electronic Engineering, Shandong University of Science & Technology, Qingdao 266510, China)

Abstract: Presented static deformation control of a cantilever box beam by using shape memory alloy (SMA) layers. A general analytical model applicable to explicit solution for strain, stress and displacements of the SMA composite thin-walled box section beams subjected to thermally-driven was developed. SMA layers model was based on Tanaka's constitutive equation and Lin's linear phase transformation kinetics. The force-deformation relationships equations were derived from the classical lamination theory. Numerical results show that significant transverse deflection can be induced in the thin-walled box section beam during the phase transformation due to SMA actuation. The effects of thickness of the beam wall and the martensitic residual strain of SMA layers are also addressed.

Key words: shape memory alloy (SMA); closed cross-sections beam; static deformation control

形状记忆合金 (SMA) 由于其优良的形状记忆效应, 已在结构振动、噪声控制中得到广泛的应用^[1]. 结构形状的控制也是 SMA 应用的一个方面. Baz 等^[2]采用 SMA 对玻璃环氧梁进行形状控制; Liang 等^[3]研究了利用 SMA 扭转元驱动结构扭转变形的问题; Gordaninejad 等^[4]提出一个二维 SMA/弹性体驱动器模型; Ghomshei 等^[5]研究了一个三维 SMA/弹性体变形驱动性能; Chandra^[6]研究了弯扭耦合复合材料梁在 SMA 弯曲元作用下的变形功能; 何富存研究了偏心 SMA 丝的复合材料悬臂梁的静变形^[7], 以及表面粘贴

收稿日期: 2009-01-27 责任编辑: 许书阁

基金项目: 国家安全生产监督管理总局安全生产科技发展指导性计划资助项目 (08-122, 07-383); 山东省自然科学基金资助项目 (Y2006F37); 山东工商学院 2008 年校内重点项目

作者简介: 杨树莲 (1966—), 女, 山西太原人, 副教授. Tel: 0535-6903909, E-mail: yy6654@163.com

SMA 薄层复合材料梁的弯曲变形^[8]。已有的研究主要是针对实心截面梁类结构^[2-3,6-9]，很少考虑薄壁空心截面梁结构^[5]，此外对 SMA 的变形驱动机制以及参数影响问题，尚待进行更加深入和系统地探讨。

悬臂梁结构在采煤机、液压支架、掘进机等煤矿设备中得到了广泛应用。本文研究一个薄壁表面粘贴 SMA 层的矩形空心截面复合材料悬臂梁在 SMA 回复应变驱动下的静变形特性，揭示了 SMA 层对该类结构的驱动机理，对 SMA 激励稳定温度、SMA 层厚度以及 SMA 残余应变等因素的影响进行了深入分析。

1 基本理论

SMA 的应力应变关系^[9]采用 $\sigma = E_s(\varepsilon - \varepsilon_0) + \Theta(T - T_f) + \Omega(\xi - 1)$ ，其中， E_s ， Θ ， Ω 分别为 SMA 的弹性模量、热弹性张量和相变张量； ε_0 ， T_f ， ξ 分别为 SMA 的马氏体残余应变、复合材料梁的制备温度和马氏体含量。弹性体的应力应变关系为 $\sigma = E_c[\varepsilon - \alpha_c(T - T_f)]$ ，其中， E_c ， α_c 分别为弹性体的弹性模量和热膨胀系数。按照经典的 Euler - Bernoulli 理论，有

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2}, \tag{1}$$

式中， u ， w 分别为梁的轴向位移和横向位移。

复合材料梁的内力 - 位移关系可表示为

$$N = A \frac{du}{dx} - B \frac{d^2w}{dx^2} - N^T - N^s, M = B \frac{du}{dx} - D \frac{d^2w}{dx^2} - M^T - M^s, \tag{2}$$

式中， N ， M 分别为截面轴力和弯矩； A ， B ， D 为梁的刚度系数； N^T ， N^s 分别为温度、相变诱发的轴力； M^T ， M^s 分别为温度、相变诱发的弯矩。

当梁上无外载荷作用时，任意截面上 $N=0$ ， $M=0$ ，所以式 (2) 可变为

$$A \frac{du}{dx} - B \frac{d^2w}{dx^2} = N^T + N^s, B \frac{du}{dx} - D \frac{d^2w}{dx^2} = M^T + M^s, \tag{3}$$

$$(A, B, D) = \int_{A_T} E(1, z, z^2) dz = \int_{A_c} E_c(1, z, z^2) dz + \int_{A_s} E_s(1, z, z^2) dz,$$

式中， A_c ， A_s 分别为复合材料梁横截面当中弹性基体和 SMA 的面积。

$$(N^T, M^T) = \int_{A_T} E\alpha\Delta T(1, z) dz = \int_{A_c} E_c\alpha_c\Delta T(1, z) dz - \int_{A_s} \Theta\Delta T(1, z) dz,$$

式中， $\Delta T = T - T_f$ ； A_T 为箱梁截面的总面积。

含 SMA 层的复合材料矩形空心悬臂梁结构如图 1 所示。

假定 SMA 层相互之间热隔离，只有梁上下 SMA 层 2、4 能够同时被激活，相应的温度分布均匀，分别用 T_{n2} 和 T_{n4} 表示；梁上下弹性层的温度假定沿厚度线性分布，用 $T_{m2}(z)$ 和 $T_{m4}(z)$ 表示。不计加热层与其余部分之间的热传导，梁的最内层与一个具有常温 T_0 （热沉温度）的吸热器相接^[5]。当温度超过其玻璃转变温度时，基体材料的弹性模量随温度变化^[10]具有下列简化形式，即

$$E_c(T) = S(T - T_0) + E_{c0},$$

式中， S 为基体材料弹性模量 - 温度变化曲线的斜率； E_{c0} 为弹性基体在热沉温度 T_0 下的弹性模量。

由 SMA 相变诱发的轴力和弯矩 N^s ， M^s 为

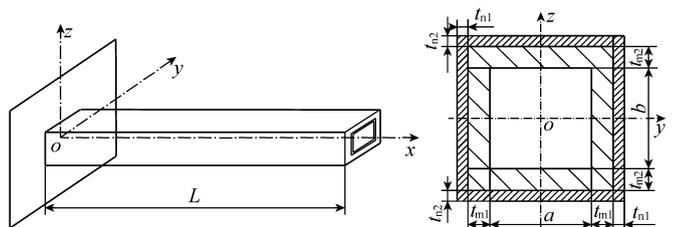


图 1 含 SMA 层的复合材料矩形空心悬臂梁结构截面
Fig.1 Cantilever box beam section schemes with SMA layers bonded to inter faces of wall

$$(N^s, M^s) = \int_{A_s} \Omega(1 - \xi)(1, z) dz. \tag{4}$$

低温马氏体相到高温奥氏体相 (M→A) 的相变动力学方程^[11]为

$$\xi = \begin{cases} 1 & \left(T \leq A_s + \frac{|\sigma|}{C_A}\right), \\ 1 - \frac{T - A_s}{A_f - A_s} + \frac{|\sigma|}{C_A(A_f - A_s)} & \left(A_s + \frac{|\sigma|}{C_A} \leq T \leq A_f + \frac{|\sigma|}{C_A}\right), \\ 0 & \left(T \geq A_f + \frac{|\sigma|}{C_A}\right). \end{cases} \tag{5}$$

由方程 (2), (4) 和 (5) 得

$$N^s = L_1 \frac{du}{dx} - L_2 \frac{d^2w}{dx^2} + L_3 E, M^s = L'_1 \frac{du}{dx} - L'_2 \frac{d^2w}{dx^2} + L'_3, \tag{6}$$

式中, C_A 为奥氏体转变开始温度与应力的等效转换系数; 系数 $L_1, L_2, L_3, L'_1, L'_2, L'_3$ 与驱动温度、基体弹性模量、截面几何尺寸等参数有关, 在方程 (5) 的 3 个不同的温度区间内, 它们的形式也不同^[5].

将式 (6) 代入式 (3), 化简得

$$(A - L_1) \frac{du}{dx} + (L_2 - B) \frac{d^2w}{dx^2} = N^T + L_3, (B - L'_1) \frac{du}{dx} + (L'_2 - D) \frac{d^2w}{dx^2} = M^T + L'_3. \tag{7}$$

由式 (7) 解得

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{(N^T + L_3)(L'_2 - D) - (M^T + L'_3)(L_2 - B)}{(A - L_1)(L'_2 - D) - (B - L'_1)(L_2 - B)} \equiv H, \\ \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{(M^T + L'_3)(A - L_1) - (N^T + L_3)(B - L'_1)}{(A - L_1)(L'_2 - D) - (B - L'_1)(L_2 - B)} \equiv V. \end{cases} \tag{8}$$

积分式 (8), 并且利用边界条件: $u(0) = 0, w(0) = w'(0) = 0$ 得 $u(x) = Hx, w(x) = Vx^2/2$. 代入式 (1), 得 $\varepsilon = H - Vx$; 代入式 (6), 得 $N^s = L_1H - L_2V + L_3, M^s = L'_1H - L'_2V + L'_3$.

当激励温度给定时, 为求得复合材料梁任意截面上任意点处的 $u, w, \varepsilon, \sigma$, 首先要计算马氏体含量 ξ , 但这又必须已知 σ , 所以要借助于迭代求解, 迭代过程如图 2 所示.

2 数值结果

考虑图 1 复合材料悬臂梁, 当激活位于上端的 SMA 层的情形. 结构几何尺寸选取: $b/a = 1, l/a = 15, t_{n1}/a = t_{n2}/a = 0.05, t_{m1}/a = t_{m2}/a = 0.3$. 复合材料中的 SMA 层采用 55 - NiTi, 连同基体所采用的材料性能参数见文献 [5]. 取 $\Omega = -1\ 762$ MPa,

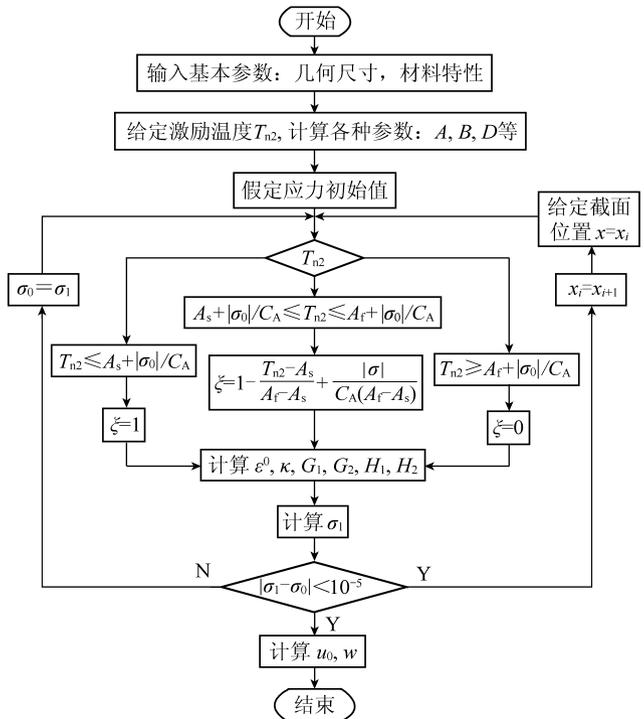


图 2 含 SMA 层的复合材料矩形空心悬臂梁响应求解流程
Fig. 2 Response solving flow of the cantilever box beam with SMA layers

热沉温度 $T_0 = 77 \text{ K}$ ，复合材料梁的制备温度 $T_f = 77 \text{ K}$ 。

图 3 为不同激励温度下上端 SMA 层厚度 $1/2$ 处的 σ 和 ξ 沿梁跨度上的分布规律。

由图 3 可见，在所给出的 5 个激励温度中，包含了低温马氏体相温度 $T_{n2} = 77 \text{ K}$ 、高温奥氏体相温度 $T_{n2} = 500 \text{ K}$ 以及 3 个产生马氏体相向奥氏体相转变的温度 $T_{n2} = 320, 360, 352 \text{ K}$ ，在 $T_{n2} = 77 \text{ K}$ 时，马氏体含量 $\xi = 1$ ，说明 SMA 层全部为马氏体相；在 $T_{n2} = 500 \text{ K}$ 时，马氏体含量 $\xi = 0$ ，说明 SMA 层全部为奥氏体相；在温度 $T_{n2} = 320, 360, 352 \text{ K}$ 时， $0 < \xi < 1$ ，说明 SMA 层中上述两种体相并存。由于复合材料悬臂梁上没有外载荷，在 ξ 沿 SMA 层内均匀分布假设下， ξ 显然沿着梁跨度均匀分布，而且在整个梁跨只有一种相变状态，即在方程(5)中仅满足一个关系式。事实上，如果梁受横向载荷作用，如文献[5]所考虑的情况，由于应力沿梁跨度非均匀分布，在整个梁跨至少有 2 种相变状态。由图 3 可见应力 σ 的分布也是均匀的，当 $T_{n2} = 77 \text{ K}$ 时，梁内不产生应力 σ ，应力 σ 随着温度的增加而增加。

图 4 为不同激励温度下上壁 SMA 层厚度的 $1/2$ 处的轴向位移和挠度沿梁跨度上的分布规律。当 $T_{n2} = 77 \text{ K}$ 时，SMA 层没有被激活，此时复合材料悬臂梁由 SMA 相变诱发的轴力和弯矩 N^s, M^s 均为零，图 4 中沿 x 轴正向微小的轴向位移以及沿 z 轴负方向微小的挠度是由于温度、相变诱发的轴力和弯矩 N^T, M^T 引起的。随着温度的增加 SMA 层被激活，轴向位移和挠度增加，由于 SMA 层的收缩产生了如图 4 所示沿 x 轴负方向轴向位移和沿 z 轴正方向的挠度。

图 5 为 SMA 层厚度变化对轴向位移和挠度的影响，轴向位移随着 SMA 层厚度的增加而增加；挠度随 SMA 层厚度的增加而减小。图 6 为 SMA 层残余应变对轴向位移和挠度的影响，SMA 层残余应变增加挠度随之增加；轴向位移随 SMA 层残余应变的增加不仅大小增加而且变形由沿 x 轴正向逐渐变为沿 x 轴负向。

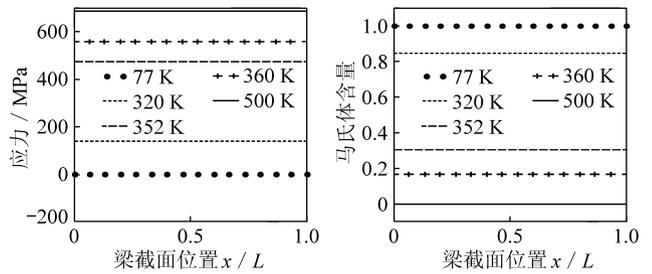


图 3 应力、马氏体含量沿梁跨度分布曲线
Fig. 3 Distribution curves of stress and martensite content along the beam span

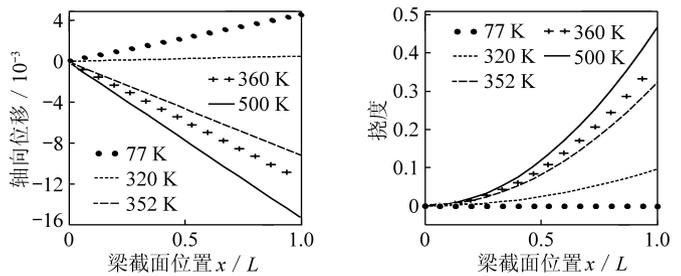


图 4 轴向位移和挠度沿梁跨度分布曲线
Fig. 4 Distribution curves of axial displacement and deflection along the beam span

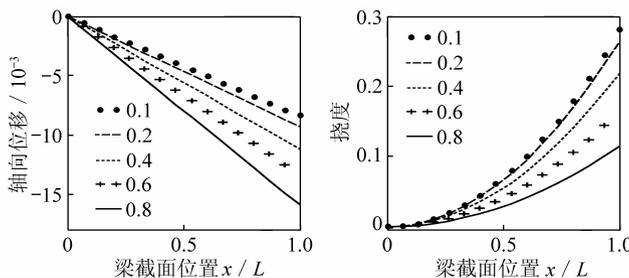


图 5 SMA 层厚度变化对位移和挠度的影响
Fig. 5 Influence of SMA layer thickness variation on displacement and deflection

3 结 论

基于经典的复合材料梁理论、Tanaka 的 SMA 应力应变关系以及 Lin 的线性相变动力模型，研究了含

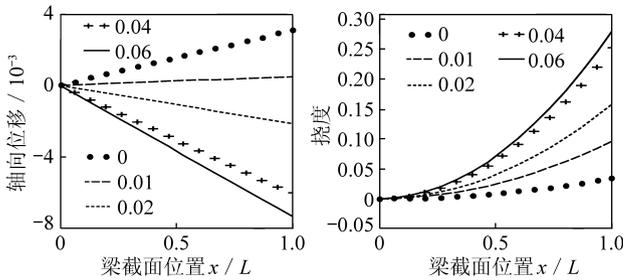


图 6 SMA 层残余应变对位移和挠度的影响

Fig. 6 Influence of SMA layer residual strain on displacement and deflection

SMA 层的复合材料矩形空心悬臂梁结构在 SMA 激励温度下的变形特性. 建立了结构应力、应变、位移求解的数学模型, 通过数值计算揭示了 SMA 层对该类结构的驱动作用, 分析了温度、壁厚度以及 SMA 残余应变的影响. 研究表明, 在马氏体向奥氏体转变阶段, 空心悬臂梁在 SMA 层的驱动下产生的横向挠度很明显, 调节壁厚度或者改变其残余应变都能有效地改善 SMA 的变形驱动性能.

参考文献:

- [1] 王益槐, 赵子龙, 任勇生, 等. 用于振动、冲击和噪声控制的 SMA 智能复合材料结构 [J]. 力学与实践, 1999, 21 (2): 1-13.
Wang Yihuai, Zhao Zilong, Ren Yongsheng, et al. SMA intelligent composite structures and their applications in vibration, noise and impact control of engineering structures [J]. Mechanics in Engineering, 1999, 21 (2): 1-13.
- [2] Baz A. Shape control of SMA-reinforced composite beams [A]. Proc. SPIE North American Conf. on Smart Structures and Materials [C]. 1994.
- [3] Liang C, Frank M Davidson, Lawrence M Schetky, et al. Applications of torsional shape memory alloy actuators for active rotor blade control-opportunities and limitations [A]. Proc. SPIE North American Conf. on Smart Structures and Materials [C]. 1994.
- [4] Gordaninejad F, Wu W. A two-dimensional shape memory alloy/elastomer actuator [J]. Int. J. Solids Struct., 2001, 38: 3 393-3 409.
- [5] Ghomshei M M, Tabandeha N, Ghazavi A, et al. A three-dimensional shape memory alloy/elastomer actuator [J]. Composites Part B: Engineering, 2001, 32: 441-449.
- [6] Chandra R. Active shape control of composite blades using shape memory actuation [J]. Smart Mater. Struct., 2001, 10: 1 018-1 024.
- [7] 何存富. 形状记忆合金驱动梁的变形分析及实验研究 [J]. 机械工程学报, 2001, 37 (4): 73-77.
He Cunfu. Theoretical and experimental study of static deformations of a beam with shape memory alloy layers [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2001, 37 (4): 73-77.
- [8] 何存富. 偏心埋入 SMA 丝的悬臂梁弯曲变形分析及实验研究 [J]. 北京工业大学学报, 2000, 26 (1): 59-62.
He Cunfu. Theoretical and experimental study of bending deformation of a cantilevered beam with off-centred embedded SMA wires [J]. Journal of Beijing Polytechnic University, 2000, 26 (1): 59-62.
- [9] Tanaka K, Nagaki S. Thermomechanical description of material with internal variables in the process of phase transformation [J]. Ingenieur Archiv., 1982, 51: 287-299.
- [10] Yuji Matsuzaki, Tadashige Ikeda, Christian Boller. New technological development of passive and active vibration control: analysis and test [J]. Smart Mater. Struct., 2005, 14: 343-348.
- [11] Lin M W, Rogers C A. Analysis of stress distribution in a shape memory alloy composite beam [A]. AIAA-91-1164-CP, Structural Dynamics, and Materials Conference, 32nd [C]. Baltimore, MD, United States, 1991: 169-177.