第 32 卷第 6 期 系统工程理论与实践 Vol.32, No.6
2012 年 6 月 Systems Engineering — Theory & Practice June, 2012

文章编号: 1000-6788(2012)06-1314-10 中图分类号: O211.6 文献标志码: A

均值 - 方差模型下 DC 型养老金的随机最优控制

张初兵[1,2], 荣喜民[1a]

(1. 天津大学 a. 理学院, b. 管理与经济学部, 天津 300072; 2. 天津财经大学 商学院, 天津 300222)

摘 要 从 DB 型养老金转向 DC 型养老金已被越来越多的国家所考虑. 以均值 - 方差为目标研究风险资产符合 CEV 模型的 DC 型养老金最优投资问题. 利用随机控制建立了养老金最优投资的 HJB 方程, 通过 Legendre 变换和对偶理论求得养老金的最优投资策略, 最后推导出均值 - 方差下 DC 型养老金最优投资的有效前沿.

关键词 DC 型养老金; 均值 - 方差; 常方差弹性模型; 随机控制; 最优投资

Stochastic optimal control for DC pension under the mean-variance model

ZHANG Chu-bing[1,2], RONG Xi-min[1a]

(1. a. College of Science, b. College of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China;
2. School of Business, Tianjin University of Finance and Economics, Tianjin 300222, China)

Abstract More and more countries begin to consider changing from the DB type to DC type for pension. This paper researches the optimal investment problem for DC pension with the target of mean-variance and the risky asset derived by the CEV model. By the stochastic control theory, the paper establishes the HJB equation about the optimal investment of DC pension, obtains the optimal investment strategies through the Legendre transform and duality theory, and finally deduces the effective frontier of the optimal investment of DC pension under the mean-variance model.

Keywords defined-contribution pension; mean-variance; constant elasticity of variance model; stochastic control; optimal investment

1 引言

养老金也称退休金、退休费, 是一种最主要的养老保险待遇. 养老金管理作为保险精算、金融数学的重要研究内容得到了业界及学术界的广泛关注, 特别对老龄化严重或正趋于老龄化的国家, 更应重视养老金的管理. 养老金的保值、增值, 对于其自身发展及社会稳定非常重要, 因此必须高度重视养老金的最优投资研究. 有两种显著不同的养老金设计方法, 确定给付 (DB, defined-benefit) 型和确定缴费 (DC, defined-contribution) 型. 对于 DB 型养老金, 养老金给付额是由基金管理者提前确定的, 并且为了维持养老金的平衡, 缴费率可以随时调整, 因此相关金融风险由基金管理者承担. 而对于 DC 型养老金, 缴费率是提前确定的, 给付额的多少依赖于养老金的投资回报率, 所以相关金融风险由投保人承担, 投保人主要面临两种风险, 即养老金积累阶段的投资风险和退休时的年金风险. 然而, 在最近几年, 由于人口演化以及资本市场的发展, DC 型养老金在社会保障体系中扮演着越来越重要的角色, 越来越多的国家从 DB 型养老金转向 DC 型养老金.

对于 DC 型养老金最优投资的研究, 一般来说, 都是采用终端时刻财富的期望效用最大化为目标, 从而求得最优投资策略. 常用的效用函数主要有两种: 常相对风险厌恶 (CRRA) 效用函数, 即幂效用函数 (例如文献 [1–3]) 或对数效用函数 (例如文献 [4–5]); 常绝对风险厌恶 (CARA) 效用函数, 即指数效用函数 (例如文

收稿日期: 2010-12-16
资助项目: 天津市自然科学基金 (09JCYBLJC01800)
作者简介: 张初兵 (1984–), 男, 安徽六安人, 博士研究生, 研究方向: 金融数学与金融工程, E-mail: zcbhrj@139.com; 荣喜民 (1963–), 男, 黑龙江人, 教授, 研究方向: 金融数学与金融工程, E-mail: rongximin@tju.edu.cn.

献 [6–7]). 不过, 文献 [8] 指出以效用最大化为目标求得的最优投资策略通常是短视的, 同时在实际操作过程中, 很难针对不同的投资人挑选合适的效用函数, 更难了解投资人如何通过风险和收益的权衡来做投资决策. 然而, 以均值 - 方差为目标研究 DC 型养老金的最优投资问题就可解决以效用最大化为目标存在的缺陷. 但是, 很少有文献研究均值 - 方差下 DC 型养老金的最优投资问题. 在投资组合选择的研究中, 文献 [9] 首次提出了单周期离散时间的静态均值 - 方差模型. 这个模型最突出的贡献在于采用方差将风险定量化以至于投资人能够在可接受的风险水平下寻求最高的投资收益. 但是, 由于均值 - 方差双目标函数的不可分离性以及多周期或连续时间的求解困难, 所以在均值 - 方差下, 很难将单周期静态模型扩展到多周期或连续时间动态模型. 近来, 文献 [8] 和 [10] 做出了突破性贡献, 利用嵌入技术将均值 - 方差双目标规划问题转化为随机线性二次 (LQ) 控制问题, 并利用 Ricatti 方法分别将其推广到离散时间多周期和连续时间框架下. 此后, 很多学者在此基础上对动态投资选择问题做了进一步的研究 (例如文献 [4] 和 [11–13]).

在相关研究中, 一般都假定风险资产的价格服从经典的几何布朗运动 (geometric Brownian motion, GBM) 模型 (例如文献 [1–3]、[5] 和 [7]). 在这些研究中, 均假设风险资产价格的波动率为常数, 因此不能很好的描绘实际市场波动的不对称性. 而常方差弹性 (constant elasticity of variance, CEV) 模型是 GBM 模型的一个自然扩展, 它既包括 GBM 模型, 又能描述隐含波动率斜度 (微笑), 这与实际的波动率微笑曲线相似, 见文献 [14]. 与传统的 GBM 模型相比, CEV 模型假设波动率弹性为常数, 考虑了波动率和风险资产市场价格的关系, 更具有实际意义. 文献 [15] 首次提出了 CEV 模型, 文献 [16] 首次将其应用于期权定价, 随后, CEV 模型更多的被学者们应用于期权定价的研究 (例如文献 [17–21]). 然而, 文献 [4] 首次在 CEV 模型下分别研究了退休前和退休后的养老金最优投资问题, 并利用 Legendre 变换和对偶理论求得了对数效用函数下养老金最优投资策略. 此后, 在 CEV 模型下, 文献 [22] 利用随机控制、变量分离法等技术分别求得了常相对风险厌恶 (CRRA) 和常绝对风险厌恶 (CARA) 效用函数下退休前的养老金最优投资策略; 文献 [23] 利用 Legendre 变换和对偶理论分别求得了 CRRA 和 CARA 效用函数下退休前和退休后的养老金最优投资策略. 此外, 文献 [24] 将 CEV 模型应用于比例再保险的研究中去, 并分别求得 CRRA 和 CARA 效用函数下的最优投资策略和最优再保险比例; 文献 [25] 提出扩展的 CEV 模型, 研究了 DC 型养老金的最优投资问题, 但只得到相应的近似解.

基于上述分析, 所构建的以均值 - 方差为目标有 CEV 模型的 DC 型养老金最优投资问题在现有文献中并没有被报告过. 其特点主要有: 1) 不以效用最大化为目标, 而是采用均值 - 方差为目标, 能够较好地了解投资人风险和收益相权衡的决策过程; 2) 假定风险资产 (即股票) 的价格服从常方差弹性 (CEV) 模型, 更符合实际的金融市场; 3) 养老金模型既考虑了退休前基金积累阶段, 也考虑了退休后基金支付阶段; 4) 采用了 Legendre 变换、对偶理论和随机控制的方法.

本文内容安排如下: 第 2 节建立了数理模型, 包括金融市场模型、养老金模型以及养老金的财富过程; 第 3 节提出了最优控制问题, 包括均值 - 方差模型的提出及转化, 以及将最优化问题转化为 HJB 方程, 并利用 Legendre 变换和对偶理论, 将非线性二次偏微分方程转化为线性二次偏微分方程; 第 4 节求出在均值方差下 DC 型养老金最优投资策略的显性解; 第 5 节导出均值 - 方差下 DC 型养老金的有效前沿; 第 6 节总结相应结论, 并提出未来研究方向.

2 数理模型

在本节, 分别介绍了金融市场和养老金的结构特点. 其中, 定义了金融资产的价格, 并结合所假定的养老金结构, 给出了养老金的财富过程.

2.1 金融市场结构

本文假定金融市场包括两种金融资产, 一种无风险资产 (债券) 和一种风险资产 (股票). 定义 t 时刻无风险资产的价格为 $B(t)$, 它满足下面的微分方程,

$$\mathrm{d}B(t) = r_0 B(t)\mathrm{d}t, \quad B(0) = B_0, \quad r_0 > 0 \tag{1}$$

参数 r_0 是短期利率, 是一个正常数.

假定风险资产 (股票) 的价格是一个连续时间随机过程. 正如前文所提到的, 风险资产的价格都被假定为服从几何布朗运动 (geometric Brownian motion, GBM), 而在模拟股票价格波动方面, 常方差弹性 (constant elasticity of variance, CEV) 模型优于几何布朗运动, 因此, 本文假定股票价格服从 CEV 模型, 以期更符合

实际. 定义 t 时刻风险资产 (股票) 的价格为 $S(t)$, 它满足下面的 CEV 模型 (例如文献 [4]、[22–24]):

$$\mathrm{d}S(t) = r_1 S(t)\mathrm{d}t + \sigma S^{\beta+1}(t)\mathrm{d}W(t), \quad S(0) = S_0 \tag{2}$$

参数 r_1 是股票的期望瞬时回报率, 并满足条件 $r_1 > r_0$. $\sigma S^{\beta}(t)$ 是股票的瞬时波动率, 其中 β 是常弹性系数, 但一般认为 $\beta < 0$. 定义一个完备的概率空间 (Ω, F, P), Ω 是实空间, P 是概率测度. $\{W_s(t): t \geq 0\}$ 是一个被定义在该空间的标准布朗运动. $F = \{F_t\}$ 是一个定义在该空间的右连续的 σ- 代数域流, 并且信息结构是由这个标准布朗运动生成的.

评述 1 在式 (2) 中, 如果常弹性系数 $\beta = 0$, 那么股票价格的随机过程就退化为几何布朗运动. 如果常弹性系数 $\beta = -1$, 那么股票价格的随机过程就退化为 Ornstein-Uhlenbeck 过程. 如果 $\beta < 0$, 那么股票价格的瞬时波动率 $\sigma S(t)^{\beta}$ 就是股票价格的减函数. 然而, 当 $\beta > 0$ 时, 瞬时波动率是股票价格的增函数, 这显然与实际不符.

2.2 养老金的财富过程

本文研究的是 DC 型养老金的最优投资问题. 与文献 [4]、[6]、[23] 和 [25] 的研究一致, 将养老金最优投资问题划分为两个阶段进行考虑, 即退休前和退休后, 并假定退休后养老金的给付采用年金形式, 且给付额是由基金管理者提前确定的. 其中, 在退休后年金支付期内, 本文不考虑投保人死亡的情况. 所以, 养老金的财富过程可以被划分为两个阶段. 定义 T 为退休时刻, N 为退休后年金的支付周期.

1) 退休前 $[0, T]$ 的财富过程

在退休前, 养老金被允许投资于一种无风险资产 (债券) 和一种风险资产 (股票). 定义 $V(t)$ 是 t 时刻养老基金的财富价值, π_t 和 $1 - \pi_t$ 分别是投资于风险资产和无风险资产的比例. 为便于分析且不丧失一般性, 继续假设缴费率 c 是正常数, 工资是单位 1. 那么退休前养老金的财富过程可以用下面的随机微分方程表示,

$$\mathrm{d}V(t) = (1 - \pi_t) V(t) \frac{\mathrm{d}B(t)}{B(t)} + \pi_t V(t) \frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} + c\mathrm{d}t, \quad V(0) = V_0 \tag{3}$$

$V(0) = V_0$ 代表养老基金的初始财富.

将式 (1) 和 (2) 代入上式, 退休前养老金财富过程的演化可重写为下式,

$$\mathrm{d}V(t) = \left((1 - \pi_t) V(t) r_0 + \pi_t V(t) r_1 + c\right) \mathrm{d}t + \pi_t V(t) \sigma S^{\beta}(t) \mathrm{d}W(t) \tag{4}$$

2) 退休后 $[T, T+N]$ 的财富过程

在退休时刻 $(t = T)$, 所积累的养老金被用于购买支付年金, 其中利率是提前确定的. 定义 D 为购买 N 期年金时所支付的资金, 很显然必须满足 $D \leq V_T$. 而剩余资金又重新回到养老基金账户或支付给养老金计划持有人. 定义退休后 $t \in [T, T+N]$ 时刻的给付额为 B, 满足 $B = D/\overline{a}_{\overline{N|}}$, 这里 $\overline{a}_{\overline{N|}} = \left(1 - \mathrm{e}^{-\delta N}/\delta\right)$, δ 是一个连续技术率.

在退休后, 养老金必须用于支付确定的年金, 并被允许投资于一种无风险资产 (债券) 和一种风险资产 (股票). 同样定义 $V(t)$ 是 t 时刻养老基金的财富价值, π_t 和 $1 - \pi_t$ 分别是投资于风险资产和无风险资产的比例. 那么退休后养老金的财富过程可以用下面的随机微分方程表示,

$$\mathrm{d}V(t) = \left((1 - \pi_t) V(t) r_0 + \pi_t V(t) r_1 - B\right) \mathrm{d}t + \pi_t V(t) \sigma S^{\beta}(t) \mathrm{d}W(t) \tag{5}$$

3 最优控制问题

3.1 最优化标准

无论是退休前还是退休后, 养老金投资人的最优化目标都是由两个相冲突的目标组成, 也就是, 既要最大化终端时刻财富的期望, 以获取最高的收益, 又要最小化终端时刻财富的方差, 以保留最低的风险. 在数理金融研究中, 该问题即为均值 - 方差问题. 因此, 养老金投资人的最优化标准是在预先给定终端时刻财富的期望值的前提下最小化终端时刻财富的方差.

1) 退休前的最优化标准

定义 1 如果 $\pi_t \in L_F^2(0, T; R)$, 那么就认为投资策略 π_t 是可行的 (admissible). 同时, 将可行的投资策略 π_t 代入线性随机微分方程 (4), 求解得到唯一的养老金财富 $V(t)$. 那么, $(V(t), \pi_t)$ 被称作一个可行的 (养老金财富, 投资策略) 组合.

命题 1 均值 - 方差下退休前养老金的随机最优控制问题为

$$\min \qquad \mathrm{Var}V(T) \equiv E(V(T) - K)^2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} EV(T)=K \\ (V(t),\pi_t)\quad \text{is}\quad \text{admissible} \end{cases} \tag{6}$$

评述 2 养老金投资人之所以选择投资于股票市场, 是因为希望养老金资产能够得到较高增值, 从而获取更高的收益. 因此, 养老金投资人所期望的投资收益一定高于将资产完全投资于无风险资产后所得到的投资收益. 那么, 当 $\pi_t=0$ 时, 相应的财富过程满足 $\mathrm{d}V(t)=(V(t)r_0+c)\,\mathrm{d}t$, $V(0)=V_0$, 所以, $V(T)=\big((c+r_0V_0)\,\mathrm{e}^{r_0T}-c\big)/r_0$. 这将导致如下的自然假设 $EV(T)=K\geq\big((c+r_0V_0)\,\mathrm{e}^{r_0T}-c\big)/r_0$.

给定 K, 命题 1 中所求得的最优投资策略 π_t^* 即为一个有效投资策略, 这将得到一个终端财富 $V(T)$, 那么 $(K,\mathrm{Var}V(T))$ 被称作一个有效点. 所有的有效点组成的集合被定义为有效前沿, 当

$$K\in\big[\big((c+r_0V_0)\,\mathrm{e}^{r_0T}-c\big)/r_0,\infty\big)\,.$$

由于模型 (6) 是一个动态二次凸最优化问题, 所以有唯一解. 为找到满足 $EV(T)=K$ 约束条件的最优投资策略, 引入一个拉格朗日乘子 $2\mu\in R$(系数 2 的引入是为了简化计算), 同时得到一个新的目标函数

$$\widehat{J}\,(\pi_t,\mu)=E\left((V(T)-K)^2+2\mu\,(V(T)-K)\right)=E(V(T)-(K-\mu))^2-\mu^2.$$

定义 $\gamma=K-\mu$, 得到下面的随机最优控制问题

$$\begin{cases} \min\quad \overline{J}\,(\pi_t,\gamma)=E(V(T)-\gamma)^2-(K-\gamma)^2 \\ \text{s.t.}\qquad (V(t),\pi_t)\qquad \text{is}\quad \text{admissible} \end{cases} \tag{7}$$

注意到, $\max\limits_{\mu\in R}\min\limits_{\pi_t}\widehat{J}\,(\pi_t,\mu)=\max\limits_{\gamma\in R}\min\limits_{\pi_t}\overline{J}\,(\pi_t,\gamma)\,.$

评述 3 根据拉格朗日对偶定理 (参见文献 [13]), 模型 (6) 和模型 (7) 之间存在等价关系, 即

$$\min\mathrm{Var}V(T)=\max_{\mu\in R}\min_{\pi_t}\widehat{J}\,(\pi_t,\mu)=\max_{\gamma\in R}\min_{\pi_t}\overline{J}\,(\pi_t,\gamma)\,.$$

很显然, 当 γ 给定时, 模型 (7) 等价于下面的最优化问题

$$\begin{cases} \min\qquad\qquad \overline{J}\,(\pi_t,\gamma)=E(V(T)-\gamma)^2 \\ \text{s.t.}\qquad (V(t),\pi_t)\qquad \text{is}\quad \text{admissible},\qquad t\in\ [0,T] \end{cases} \tag{8}$$

2) 退休后的最优化标准

命题 2 正如退休前的转化思路, 退休后养老金的随机最优控制问题可被转化为

$$\begin{cases} \min\qquad\qquad \overline{J}\,(\pi_t,\widetilde{\gamma})=E(V(T+N)-\widetilde{\gamma})^2 \\ \text{s.t.}\qquad (V(t),\pi_t)\quad \text{is}\quad \text{admissible},\quad t\in[T,T+N] \end{cases} \tag{9}$$

在这里, $\widetilde{\gamma}=\widetilde{K}-\mu,EV(T+N)=\widetilde{K}$.

综上可见, 无论是退休前还是退休后, 均值 - 方差下 DC 型养老金最优控制问题的结构十分相似, 因此模型 (8) 和模型 (9) 的求解过程极为相近. 为便于下文的讨论, 将退休前和退休后的最优化目标中的数学表达式一般化为

$$U(v)=(v-\gamma^\tau)^2 \tag{10}$$

在退休前, $\gamma^\tau=\gamma$, 在退休后, $\gamma^\tau=\widetilde{\gamma}$.

因此, 模型 (8) 和模型 (9) 中的最优化目标分别等价于最小化 $\overline{J}\,(\pi_t,\gamma)=EU\,(V(T))$ 和最小化 $\overline{J}\,(\pi_t,\widetilde{\gamma})=EU\,(V(T+N))$.

3.2 一般框架

在本节, 通过运用随机控制理论, 将最优化问题 (8) 和 (9) 分别转化为相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程, 进一步得到很难求解的非线性二次偏微分方程. 所以, 采用 Legendre 变换和对偶理论将非线性二次偏微分方程转化为二次线性偏微分方程, 以便于对最优化问题求得显性解.

1) 退休前的一般框架

定义价值函数

$$H(t,s,v)=\inf_{\pi_t\in\pi}E\left\{U\left(V(T)\right)|S(t)=s,V(t)=v\right\},\ \ 0<t<T \tag{11}$$

在这里, $H(T,s,v)=U(v)$.

那么, 与该最优化问题相对应的 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程可以被描述为

$$H_t + r_1 s H_s + (r_0 v + c) H_v + \frac{1}{2}\sigma^2 s^{2\beta+2} H_{ss} + \min_{\{\pi_t\}} \left\{ \frac{1}{2}{\pi_t}^2 \sigma^2 s^{2\beta} v^2 H_{vv} + \pi_t (r_1 - r_0) v H_v + \pi_t \sigma^2 s^{2\beta+1} v H_{sv} \right\} = 0 \tag{12}$$

$H_t, H_s, H_v, H_{sv}, H_{ss}$ 和 H_{vv} 分别是对于时间、股票价格和养老金财富的一阶和二阶偏导数.

对最优投资策略 π_t^* 求导, 并令其等于零, 得到最优投资策略

$$\pi_t^* = -\frac{(r_1 - r_0) H_v + \sigma^2 s^{2\beta+1} H_{sv}}{v \sigma^2 s^{2\beta} H_{vv}} \tag{13}$$

将最优投资策略表达式代入到式 (12), 得到价值函数的一个偏微分方程

$$H_t + r_1 s H_s + (r_0 v + c) H_v + \frac{1}{2}\sigma^2 s^{2\beta+2} H_{ss} - \frac{\left((r_1 - r_0) H_v + \sigma^2 s^{2\beta+1} H_{sv}\right)^2}{2\sigma^2 s^{2\beta} H_{vv}} = 0 \tag{14}$$

注意到, 所研究的随机控制问题已经被转化为一个偏微分方程. 通过求解方程 (14), 可以得到价值函数的表达式, 将其代入到式 (13) 即可得到最优投资策略. 然而, 上述偏微分方程是非线性二次的, 求解比较困难, 因此, 我们将采用 Legendre 变换和对偶理论, 将上述非线性二次偏微分方程转化为线性偏微分方程, 以便于此问题的求解.

定义 2 设 $R^n \to R$ 是一个凸函数, 给定 $z > 0$, 定义 Legendre 变换为

$$L(z) = \max_x \{f(x) - zx\} \tag{15}$$

$L(z)$ 被称作的 Legendre 对偶函数 (参见文献 [4–5] 和 [23]).

如果 $f(x)$ 是严格凸的, 上式存在唯一的最大值点, 将其定义为 x_0. 对上式 x 求一阶导数, 得到 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - z = 0$. 因此, 可以得到 $L(z) = f(x_0) - zx_0$.

根据定义 2, 利用价值方程 $H(t, s, v)$ 的凸性, 可以定义其 Legendre 变换为

$$\widehat{H}(t, s, z) = \sup_{v>0} \{H(t, s, v) - zv | 0 < v < \infty\}, \quad 0 < t < T,$$

$z > 0$ 是 v 的对偶变量, 参见文献 [4–5] 和 [23].

变量 v 的最优化可以由 $g(t, s, z)$ 获得, 满足下式

$$g(t, s, z) = \inf_{v>0} \left\{ v | H(t, s, v) \geq zv + \widehat{H}(t, s, z) \right\}, \quad 0 < t < T.$$

函数 $g(t, s, z)$ 和 $\widehat{H}(t, s, z)$ 是高度相关的, 它们都是 H 的对偶函数. 由于函数 g 更便于推导, 所以本文将运用函数 g 来研究最优投资组合策略.

通过以上分析得到

$$\widehat{H}(t, s, z) = H(t, s, g) - zg, \quad g(t, s, z) = v, \quad H_v = z \tag{16}$$

显然, 函数 $\widehat{H}$ 和 g 满足 $g = -\widehat{H}_z$.

在终端时刻, 定义 $\widehat{U}(z) = \sup_{v>0} \{U(v) - zv | 0 < v < \infty\}, G(z) = \sup_{v>0} \left\{ v | U(v) \geq zv + \widehat{U}(z) \right\}$.

显然, $G(z) = (U')^{-1}(z)$.

一般来说, G 被看作边际效用的反函数. 注意到 $H(T, s, v) = U(v)$, 那么在终端时刻 T, 有

$$g(T, s, z) = \inf_{v>0} \left\{ v | U(v) \geq zv + \widehat{H}(T, s, z) \right\}, \quad \widehat{H}(T, s, z) = \sup_{v>0} \{U(v) - zv\}.$$

且, $g(T, s, z) = (U')^{-1}(z)$.

式 (16) 分别对变量 t, s 和 z 求导, 得到价值函数 H 和对偶函数 $\widehat{H}$ 之间的导数转换规则如下列所示,

$$H_v = z, \quad H_t = \widehat{H}_t, \quad H_s = \widehat{H}_s, \quad H_{ss} = \widehat{H}_{ss} - \frac{\widehat{H}_{sz}^2}{\widehat{H}_{zz}}, \quad H_{sv} = -\frac{\widehat{H}_{sz}}{\widehat{H}_{zz}}, \quad H_{vv} = -\frac{1}{\widehat{H}_{zz}} \tag{17}$$

将式 (17) 代入式 (14), 对所得式关于 z 求偏导, 并结合 $v = g = -\widehat{H}_z$, 得到关于 g 的偏微分方程

$$g_t + r_0 s g_s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^{2\beta+2} g_{ss} - r_0 g - c + \left(\frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2 s^{2\beta}} - r_0 \right) z g_z + \frac{(r_1 - r_0)^2}{2\sigma^2 s^{2\beta}} z^2 g_{zz} - (r_1 - r_0) s z g_{sz} = 0 \tag{18}$$

类似地, 可以用对偶函数 g 表示最优投资策略如下

$$\pi_t^* = \frac{-(r_1 - r_0) z g_z + \sigma^2 s^{2\beta+1} g_s}{g \sigma^2 s^{2\beta}} \tag{19}$$

现在的问题就是求解关于函数 g 的线性偏微分方程 (18), 并将求解所得代入到式 (19) 中, 从而获得养老金的最优投资策略.

2) 退休后的一般框架

定义价值函数

$$H(t,s,v)=\inf_{\pi_t\in\pi}E\left\{U\left(V(T+N)\right)|S(t)=s,V(t)=v\right\},\ \ T\le t\le T+N \tag{20}$$

那么, 与该最优化问题相对应的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程可描述为

$$\begin{aligned}&H_t+r_1sH_s+\left(r_0v-B\right)H_v+\frac{1}{2}\sigma^2s^{2\beta+2}H_{ss}\\&+\min_{\{\pi_t\}}\left\{\frac{1}{2}{\pi_t}^2\sigma^2s^{2\beta}v^2H_{vv}+\pi_t\left(r_1-r_0\right)vH_v+\pi_t\sigma^2s^{2\beta+1}vH_{sv}\right\}=0\end{aligned} \tag{21}$$

则可得到最优投资策略

$$\pi_t^*=-\frac{(r_1-r_0)H_v+\sigma^2s^{2\beta+1}H_{sv}}{v\sigma^2s^{2\beta}H_{vv}} \tag{22}$$

将最优投资策略表达式代入到式 (21), 得到价值函数 H 的一个偏微分方程

$$H_t+r_1sH_s+\left(r_0v-B\right)H_v+\frac{1}{2}\sigma^2s^{2\beta+2}H_{ss}-\frac{\left((r_1-r_0)H_v+\sigma^2s^{2\beta+1}H_{sv}\right)^2}{2\sigma^2s^{2\beta}H_{vv}}=0 \tag{23}$$

将式 (17) 代入上式, 并结合等式 $v=g=-\widehat{H}_z$, 且 $\widehat{H}$ 对 z 求偏导, 得到关于 g 的偏微分方程

$$g_t+r_0sg_s+\frac{1}{2}\sigma^2s^{2\beta+2}g_{ss}-r_0g+B+\left(\frac{\left(r_1-r_0\right)^2}{\sigma^2s^{2\beta}}-r_0\right)zg_z+\frac{\left(r_1-r_0\right)^2}{2\sigma^2s^{2\beta}}z^2g_{zz}-\left(r_1-r_0\right)szg_{sz}=0 \tag{24}$$

类似地, 可以用对偶函数表示最优投资策略如下

$$\pi_t^*=\frac{-\left(r_1-r_0\right)z\mathrm{g}_z+\sigma^2s^{2\beta+1}g_s}{g\sigma^2s^{2\beta}} \tag{25}$$

现在的问题就是求解关于函数 g 的线性偏微分方程 (24), 并将求解所得代入到式 (25) 中, 从而获得养老金的最优投资策略.

4　最优化问题的求解

4.1　退休前最优化问题的解

根据 $g(T,s,z)=\left(U'\right)^{-1}(z)$ 和式 (10), 得到 $g(T,s,z)=\frac{1}{2}z+\gamma$.

猜测式 (18) 解的形式为 $g(t,s,z)=zh(t,s)+a(t)$, 并且满足边界条件, $a(T)=\gamma,h(T,s)=1/2$.

将其代入到式 (18), 得到

$$\left\{h_t+\left(2r_0-r_1\right)sh_s+\frac{1}{2}\sigma^2s^{2\beta+2}h_{ss}+\frac{\left(r_1-r_0\right)^2}{\sigma^2s^{2\beta}}h-2r_0h\right\}z+a'(t)-r_0a(t)-c=0 \tag{26}$$

从而可以将式 (26) 拆分成两个方程

$$a'(t)-r_0a(t)-c=0 \tag{27}$$

$$h_t+\left(2r_0-r_1\right)sh_s+\frac{1}{2}\sigma^2s^{2\beta+2}h_{ss}+\frac{\left(r_1-r_0\right)^2}{\sigma^2s^{2\beta}}h-2r_0h=0 \tag{28}$$

代入边界条件 $a(T)=\gamma$, 式 (27) 的解为

$$a(t)=\left(\gamma+c/r_0\right)\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}-c/r_0 \tag{29}$$

由于式 (28) 是非线性二次偏微分方程, 求解比较困难, 所以采用幂变换和变量替换技术, 将非线性二次偏微分方程转化为线性二次偏微分方程.

定义 $h(t,s)=f(t,y)$, $y=s^{-2\beta}$, 边界条件为 $f(T,y)=1/2$.

将其代入式 (28), 得到

$$f_t+\beta\left(\left(2\beta+1\right)\sigma^2+2\left(r_1-2r_0\right)y\right)f_y+2\sigma^2\beta^2yf_{yy}+\frac{\left(r_1-r_0\right)^2yf}{\sigma^2}-2r_0f=0 \tag{30}$$

定义 $f(t,y)=A(t)\mathrm{e}^{B(t)y}$, 边界条件为 $A(T)=1/2,B(T)=0$.

将其代入式 (30), 得到

$$\frac{A_t}{A}+\beta\left(2\beta+1\right)\sigma^2B-2r_0+y\left\{B_t+2\beta\left(r_1-2r_0\right)B+2\sigma^2\beta^2B^2+\frac{\left(r_1-r_0\right)^2}{\sigma^2}\right\}=0 \tag{31}$$

上式可拆分成两个方程

$$B_t+2\beta\left(r_1-2r_0\right)B+2\sigma^2\beta^2B^2+\left(r_1-r_0\right)^2/\sigma^2=0,\quad B(T)=0 \tag{32}$$

$$\frac{A_t}{A}+\beta\left(2\beta+1\right)\sigma^2B-2r_0=0,\quad A(T)=1/2 \tag{33}$$

分别求解带有边界条件的常微分方程 (32) 和 (33), 得到

$$B(t)=\sigma^{-2}I(t) \tag{34}$$

$$A(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\lambda_1\beta(2\beta+1)-2r_0)(T-t)}\left\{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1\mathrm{e}^{2\beta^2(\lambda_1-\lambda_2)(T-t)}}\right\}^{\frac{2\beta+1}{2\beta}} \tag{35}$$

其中, $I(t)=\frac{\lambda_1-\lambda_1\mathrm{e}^{2\beta^2(\lambda_1-\lambda_2)(T-t)}}{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathrm{e}^{2\beta^2(\lambda_1-\lambda_2)(T-t)}},\lambda_{1,2}=\frac{(2r_0-r_1)\mp\sqrt{2r_0^2-r_1^2}}{2\beta}$.

命题 3 在均值 - 方差下, 退休前 DC 型养老金的最优投资策略为

$$\pi_t^*=K(t)\left(1+\frac{a(t)}{v}\right)M(\sigma_t) \tag{36}$$

其中, $a(t)=\left(\gamma+\frac{c}{r_0}\right)\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}-\frac{c}{r_0},\ \ K(t)=-1-\frac{2\beta I(t)}{r_1-r_0},\ \ M(\sigma_t)=\frac{r_1-r_0}{\sigma^2s^{2\beta}},\sigma_t=\sigma s^\beta$.

评述 4 均值 - 方差下, 退休前 DC 型养老金投资于风险资产的最优比例由三部分组成. 第一部分 $K(t)$, 主要受参数 β 的影响, 这是由 CEV 模型导致的; 第二部分 $(1+a(t)/v)$, 主要受参数 γ 的影响; 第三部分 $M(\sigma_t)$, 即为默顿比率, 反映了投资人的风险偏好, 但这里的风险资产的波动率不是常数而是与股票价格有关.

4.2 退休后最优化问题的解

与 4.1 节相似, 猜测式 (24) 解的形式为 $g(t,s,z)=zf(t,y)+a(t),\ \ y=s^{-2\beta}$, 其边界条件为 $f(T+N,y)=1/2,\ \ a(T+N)=\widetilde{\gamma}$.

将其代入到式 (24), 得到

$$\begin{aligned}&\left\{f_t+\beta\left(\left(2\beta+1\right)\sigma^2+2\left(r_1-2r_0\right)y\right)f_y+2\sigma^2\beta^2yf_{yy}+\frac{\left(r_1-r_0\right)^2yf}{\sigma^2}-2r_0f\right\}z\\&+a'(t)-r_0a(t)+B=0\end{aligned} \tag{37}$$

可将式 (37) 拆分成两个方程

$$a'(t)-r_0a(t)+B=0 \tag{38}$$

$$f_t+\beta\left(\left(2\beta+1\right)\sigma^2+2\left(r_1-2r_0\right)y\right)f_y+2\sigma^2\beta^2yf_{yy}+\frac{\left(r_1-r_0\right)^2yf}{\sigma^2}-2r_0f=0 \tag{39}$$

代入边界条件 $a(T+N)=\widetilde{\gamma}$, 式 (38) 的解为

$$a(t)=\left(\widetilde{\gamma}-B/r_0\right)\mathrm{e}^{-r_0(T+N-t)}+B/r_0 \tag{40}$$

由于除了边界条件不同以外, 式 (39) 和 (30) 的表达式完全一样, 所以其求解过程也相似, 其解为

$$B(t)=\sigma^{-2}I(t) \tag{41}$$

$$A(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\lambda_1\beta(2\beta+1)-2r_0)(T+N-t)}\left\{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1\mathrm{e}^{2\beta^2(\lambda_1-\lambda_2)(T+N-t)}}\right\}^{\frac{2\beta+1}{2\beta}} \tag{42}$$

其中, $I(t)=\frac{\lambda_1-\lambda_1\mathrm{e}^{2\beta^2(\lambda_1-\lambda_2)(T+N-t)}}{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathrm{e}^{2\beta^2(\lambda_1-\lambda_2)(T+N-t)}},\lambda_{1,2}=\frac{(2r_0-r_1)\mp\sqrt{2r_0^2-r_1^2}}{2\beta}$.

命题 4 在均值 - 方差下, 退休后 DC 型养老金的最优投资策略为

$$\pi_t^*=K(t)\left(1+\frac{a(t)}{v}\right)M(\sigma_t) \tag{43}$$

其中, $a(t)=\left(\widetilde{\gamma}-\frac{B}{r_0}\right)\mathrm{e}^{-r_0(T+N-t)}+\frac{B}{r_0},\ \ K(t)=-1-\frac{2\beta I(t)}{r_1-r_0},\ \ \ M(\sigma_t)=\frac{r_1-r_0}{\sigma^2s^{2\beta}}$.

评述 5 对比命题 3 和命题 4, 可以看出退休前和退休后 DC 型养老金最优投资策略之间主要的差别在于 $a(t)$ 的表达式不同. 这是由于退休前缴费增加了养老基金价值, 而退休后给付减少了养老基金价值.

5 有效前沿

本节讨论养老金最优投资问题的有效前沿, 即计算有效投资策略下终端时刻养老金财富的方差与期望的关系.

5.1 退休前的有效前沿

为简化计算, 令 $\rho(t)=K(t)M(\sigma_t),\ \delta(t)=\rho(t)\sigma S^{\beta}(t),\ \eta(t)=\rho^2(t)\sigma^2 S^{2\beta}(t)$.

将退休前的最优投资策略 (36) 代入退休前养老金财富方程 (4), 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V(t)=&\left(\left(r_0+\left(r_1-r_0\right)\rho(t)\right)V(t)+\left(r_1-r_0\right)a(t)\rho(t)+c\right)\mathrm{d}t\\&+\left(V(t)+a(t)\right)\delta(t)\mathrm{d}W(t),\quad V(0)=V_0\end{aligned}\tag{44}$$

对 $V^2(t)$ 运用伊藤公式, 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V^2(t)=&\left[\left(2r_0+2\left(r_1-r_0\right)\rho(t)+\eta(t)\right)V^2(t)+a^2(t)\eta(t)+2\left(c+a(t)\eta(t)\right.\right.\\&\left.\left.+a(t)\rho(t)\left(r_1-r_0\right)\right)V(t)\right]\mathrm{d}t+2V(t)\left(V(t)+a(t)\right)\delta(t)\mathrm{d}W(t),\quad V^2(0)=V_0^2\end{aligned}\tag{45}$$

对 (44) 和 (45) 两边分别求期望, 得到 $m_1(t)=EV(t)$ 和 $m_2(t)=EV^2(t)$ 满足下列两个线性常微分方程

$$\dot{m}_1(t)=\left(r_0+\left(r_1-r_0\right)\rho(t)\right)m_1(t)+\left(r_1-r_0\right)a(t)\rho(t)+c,\quad m_1(0)=V_0\tag{46}$$

$$\begin{aligned}\dot{m}_2(t)=&\left(2r_0+2\left(r_1-r_0\right)\rho(t)+\eta(t)\right)m_2(t)+a^2(t)\eta(t)+2\left(c+a(t)\eta(t)\right.\\&\left.+a(t)\rho(t)\left(r_1-r_0\right)\right)m_1(t),\quad m_2(0)=V_0^2\end{aligned}\tag{47}$$

代入 $a(t)$ 的表达式, 从 (46) 可以得到 $EV(T)$ 的表达式

$$EV(T)=\alpha_T\mathrm{e}^{r_0T}V_0+\left(\alpha_T-1\right)\gamma+\varepsilon_1\tag{48}$$

其中,

$$\alpha_t=\exp\left(\int_0^t\left(r_1-r_0\right)\rho(s)\mathrm{d}s\right),\quad \varepsilon_1=\alpha_T\left(\left(c/r_0-\mathrm{e}^{r_0T}\right)+2c\mathrm{e}^{r_0T}\int_0^T\alpha_t^{-1}\mathrm{e}^{-r_0t}\mathrm{d}t\right).$$

同样地, 对 (47) 可以得到 $EV^2(T)$ 的表达式

$$EV^2(T)=\alpha_T\lambda_T\mathrm{e}^{2r_0T}V_0^2+\phi\gamma^2+\varphi\gamma+\varepsilon_2\tag{49}$$

其中, 参数 $\phi,\ \varphi,\ \varepsilon_2$ 分别是十分复杂的含有多个定积分的常数 (参见附录).

利用 (48) 和 (49), 可以得到问题 (7) 的确切表达式, 其中将参数 γ 看作变量, 那么

$$\begin{aligned}\overline{J}\left(\pi_t^*,\gamma\right)=&EV^2(T)-2\gamma EV(T)+2\gamma K-K^2=\gamma^2\left(\phi-2\alpha_T+2\right)\\&+\gamma\left(\varphi-2\alpha_T\mathrm{e}^{r_0T}V_0+2K-2\varepsilon_1\right)+\alpha_T\lambda_T\mathrm{e}^{2r_0T}V_0^2-K^2+\varepsilon_2\end{aligned}\tag{50}$$

关于式 (50), 对 γ 求导并令其等于 0, 得到 γ 的最优值

$$\gamma^*=\frac{\varphi-2\alpha_T\mathrm{e}^{r_0T}V_0+2K+2\varepsilon_1}{2\left(2\alpha_T-\phi+2\right)}\tag{51}$$

因此, 根据评述 3 的观点, 得到 $\mathrm{Var}V(T)$ 的最小值, 满足

$$\min\mathrm{Var}V(T)=\min_{\pi_t\in\pi}\ \overline{J}\left(\pi_t,\gamma^*\right)=\frac{\left(\varphi-2\alpha_T\mathrm{e}^{r_0T}V_0+2K+2\varepsilon_1\right)^2}{4\left(2\alpha_T-\phi+2\right)}+\alpha_T\lambda_T\mathrm{e}^{2r_0T}V_0^2-K^2+\varepsilon_2.$$

命题 5　在均值 - 方差下, 问题 (6) 退休前 DC 型养老金的有效前沿为

$$\mathrm{Var}V(T)=\frac{\left(\varphi-2\alpha_T\mathrm{e}^{r_0T}V_0+2EV(T)+2\varepsilon_1\right)^2}{4\left(2\alpha_T-\phi+2\right)}+\alpha_T\lambda_T\mathrm{e}^{2r_0T}V_0^2-EV^2(T)+\varepsilon_2\tag{52}$$

评述 6　式 (52) 清晰地展示了退休时刻养老金财富的期望与其方差之间的二次关系. 只有当 $EV(T)=\frac{2\alpha_T\mathrm{e}^{r_0T}V_0-\varphi-2\varepsilon_1}{2-2(2\alpha_T-\phi+2)}$ 时, 退休时刻养老金财富的方差才会达到最小.

5.2 退休后的有效前沿

与 5.1 节相似, 将退休后最优投资策略 (43) 代入退休后养老金财富方程 (5), 并进行相应推导, 最终得到 $EV(T+N)$ 和 $EV^2(T+N)$ 的表达式,

$$EV(T+N)=\alpha_{T+N}\mathrm{e}^{r_0(T+N)}V_T+\left(\alpha_{T+N}-1\right)\widetilde{\gamma}+\varepsilon_1\tag{53}$$

$$EV^2(T+N)=\alpha_{T+N}\lambda_{T+N}\mathrm{e}^{2r_0(T+N)}V_T^2+\phi\widetilde{\gamma}^2+\varphi\widetilde{\gamma}+\varepsilon_2\tag{54}$$

在这里, 所有的参数都与 5.1 节相似, 只是将其中的 c,V_0,T 等参数分别替换成 $-B,V_T,T+N$ 等.

利用 (53) 和 (54), 可以得到问题 (9) 的确切表达式, 其中将参数 $\widetilde{\gamma}$ 看作变量, 由此得到最优值 $\widetilde{\gamma}^*$ 和 $\mathrm{Var}V(T+N)$ 的最小值

$$\widetilde{\gamma}^* = \frac{\varphi - 2\alpha_{T+N}\mathrm{e}^{r_0(T+N)}V_T + 2K + 2\varepsilon_1}{2\left(2\alpha_{T+N} - \phi + 2\right)} \tag{55}$$

$$\min \mathrm{Var}V(T+N) = \frac{\left(\varphi - 2\alpha_{T+N}\mathrm{e}^{r_0(T+N)}V_T + 2K + 2\varepsilon_1\right)^2}{4\left(2\alpha_{T+N} - \phi + 2\right)} + \alpha_{T+N}\lambda_T\mathrm{e}^{2r_0(T+N)}V_T^2 - K^2 + \varepsilon_2 \tag{56}$$

命题 6 在均值 - 方差下, 问题 (9) 退休后 DC 型养老金的有效前沿为

$$\mathrm{Var}V(T+N) = \frac{\left(\varphi - 2\alpha_{T+N}\mathrm{e}^{r_0(T+N)}V_T + 2EV(T+N) + 2\varepsilon_1\right)^2}{4\left(2\alpha_{T+N} - \phi + 2\right)} + \alpha_{T+N}\lambda_T\mathrm{e}^{2r_0(T+N)}V_T^2 - EV^2(T+N) + \varepsilon_2 \tag{57}$$

评述 7 同样, 式 (57) 也揭示了退出时刻养老金财富的期望与其方差之间的二次关系. 只有当 $EV(T+N) = \frac{2\alpha_{T+N}\mathrm{e}^{r_0(T+N)}V_T - \varphi - 2\varepsilon_1}{2-2(2\alpha_{T+N}-\phi+2)}$ 时, 退出时刻养老金财富的方差才会达到最小.

6 结论

本文研究了退休前和退休后 DC 型养老金的最优投资问题. 针对以效用最大化为目标的研究的不足, 本文采用均值 - 方差模型, 更能了解投资人风险和收益相权衡的决策过程. 由于常方差弹性 (CEV) 模型是几何布朗运动 (GBM) 的自然扩展, 因此风险资产价格服从常方差弹性 (CEV) 模型的研究更具实际意义. 利用随机控制理论, 建立均值 - 方差下养老金的最优投资问题, 通过 Legendre 变换和对偶理论得到了退休前和退休后 DC 型养老金的最优投资策略, 导出了均值 - 方差下 DC 型养老金投资的有效前沿.

今后还可在如下方面进行更深入的研究, 如: 引入随机性利率, 引入随机性工资, 以及将投资扩展到多个服从 CEV 模型的风险资产等. 然而, 值得注意的是, 这些扩展研究的难点在于对所建立模型的求解.

参考文献

[1] Boulier J F, Huang S, Taillard G. Optimal management under stochastic interest rates: The case of a protected defined contribution pension fund[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2001, 28: 173–189.

[2] Cairns A J G, Blake D, Dowd K. Stochastic lifestyling: Optimal dynamic asset allocation for defined contribution pension plans[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2006, 30: 843–877.

[3] Deelstra G, Grasselli M, Koehl P F. Optimal investment strategies in the presence of a minimum guarantee[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2003, 33: 189–207.

[4] Xiao J, Zhai H, Qin C. The constant elasticity of variance (CEV) model and the Legendre transform-dual solution for annuity contracts[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2007, 40: 302–310.

[5] Gao J. Stochastic optimal control of DC pension funds[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42: 1159–1164.

[6] Devolder P, Bosch Princep M, Dominguez Fabian I. Stochastic optimal control of annuity contracts[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2003, 33: 227–238.

[7] Battocchio P, Menoncin F. Optimal pension management in a stochastic framework[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2004, 34: 79–95.

[8] Zhou X, Li D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: A stochastic LQ framework[J]. Applied Mathematics and Optimization, 2000, 42: 19–33.

[9] Markowitz H. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7: 77–91.

[10] Li D, Ng W L. Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation[J]. Mathematical Finance, 2000, 10(3): 387–406.

[11] Chiu M, Li D. Asset and liability management under a continuous-time mean-variance optimization framework[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 39: 330–355.

[12] Wang Z, Xia J, Zhang L. Optimal investment for an insurer: The martingale approach[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2007, 40: 322–334.

[13] Fu C, Lari-Lavassani A, Li X. Dynamic mean-variance portfolio selection with borrowing constraint[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 200(1): 312–319.

[14] Dennis P, Mayhew S. Risk-neutral skewness: Evidence from stock options[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2002, 37(3): 471–493.

[15] Cox J C. Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions[R]. Working Paper, Stanford University, 1975.

[16] Cox J C, Ross S A. The valuation of options for alternative stochastic processes[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 4: 145–166.
[17] Cox J C. The constant elasticity of variance option pricing model[J]. The Journal of Portfolio Management, 1996, 22: 16–17.
[18] Yuen K C, Yang H, Chu K L. Estimation in the constant elasticity of variance model[J]. British Actuarial Journal, 2001(7): 275–292.
[19] Jones C. The dynamics of the stochastic volatility: Evidence from underlying and options markets[J]. Journal of Econometrics, 2003, 116: 181–224.
[20] Widdicks M, Duck P, Andricopoulos A, et al. The Black-Scholes equation revisited: Symptotic expansions and singular perturbations[J]. Mathematical Finance, 2005, 15: 373–391.
[21] Hsu Y L, Lin T I, Lee C F. Constant elasticity of variance (CEV) option pricing model: Integration and detailed derivation[J]. Mathematics and Computer in Simulation 2008, 79: 60–71.
[22] Gao J. Optimal portfolios for DC pension plans under a CEV model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 44: 479–490.
[23] Gao J. Optimal investment strategy for annuity contracts under the constant elasticity of variance (CEV) model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 45: 9–18.
[24] Gu M, Yang Y, Li S, et al. Constant elasticity of variance model for proportional reinsurance and investment strategies[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2010, 46: 580–587.
[25] Gao J. An extended CEV model and the Legendre transform-dual-asymptotic solutions for annuity contracts[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2010, 46: 511–530.

附录

$$
\begin{aligned}
&\lambda_t = \exp\left(\int_0^t (r_1 - r_0)\,\rho(s) + \eta(s)\mathrm{d}s\right),\\
&\phi = \alpha_T\left(\lambda_T - 1 - \lambda_T \exp\left(\int_0^T \left(2\,(r_1 - r_0)\,\rho(t) + \eta(t)\right)\alpha_{_t}^{-1}\lambda_{_t}^{-1}\mathrm{d}t\right)\right),\\
&\varphi = \frac{2c\alpha_T\lambda_T}{r_0}\int_0^T \Big[\eta(t)\left(1 - \mathrm{e}^{r_0(T-t)}\right) - \left(r_0 - 2\,(r_1 - r_0)\,\rho(t) - 2\eta(t)\right)\mathrm{e}^{r_0(T-t)}\\
&\qquad\qquad -2\left((r_1 - r_0)\,\rho(t) + \eta(t)\right)\mathrm{e}^{-r_0T}\Big]\alpha_{_t}^{-1}\lambda_{_t}^{-1}\mathrm{d}t - 4c\alpha_T\lambda_T\int_0^T \mathrm{e}^{r_0(T-t)}\lambda_{_t}^{-1}\mathrm{d}t\\
&\qquad\qquad -\frac{2c\alpha_T}{r_0}\mathrm{e}^{r_0T}\left(\frac{r_0V_0}{c} + \mathrm{e}^{-r_0T} + 1\right) + \frac{2c\alpha_T\lambda_T}{r_0}\mathrm{e}^{r_0T}\left(\frac{r_0V_0}{c} + 2\mathrm{e}^{-r_0T}\right),\\
&\varepsilon_2 = \frac{c^2\alpha_T\lambda_T}{r_{_0}^2}\int_0^T \Big[\eta(t)\left(1 + \mathrm{e}^{2r_0(T-t)} - 2\mathrm{e}^{r_0(T-t)}\right) - 2\left(r_0 - 2\,(r_1 - r_0)\,\rho(t) - 2\eta(t)\right)\mathrm{e}^{r_0(T-t)} - 2\,(r_1 - r_0)\,\rho(t)\\
&\qquad\qquad -2\eta(t) + 2\left(r_0 - (r_1 - r_0)\,\rho(t) - \eta(t)\right)\mathrm{e}^{2r_0(T-t)}\Big]\,\alpha_{_t}^{-1}\lambda_{_t}^{-1}\mathrm{d}t\\
&\qquad +4c\alpha_T\lambda_TV_0\int_0^T \mathrm{e}^{r_0(2T-t)}\lambda_{_t}^{-1}\mathrm{d}t - \frac{4c^2\alpha_T\lambda_T}{r_0}\int_0^T \mathrm{e}^{r_0(T-t)}\lambda_{_t}^{-1}\mathrm{d}t\\
&\qquad +\frac{4c^2\alpha_T\lambda_T}{r_{_0}^2}\int_0^T \Big[\left(r_0 - (r_1 - r_0)\,\rho(t) - \eta(t)\right)\mathrm{e}^{2r_0(T-t)} + \left((r_1 - r_0)\,\rho(t) + \eta(t)\right)\mathrm{e}^{2r_0T}\Big]\lambda_{_t}^{-1}\\
&\qquad \int_0^t \mathrm{e}^{-r_0\omega}\alpha_{_\omega}^{-1}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t - \frac{3c^2\alpha_T}{r_{_0}^2}\mathrm{e}^{r_0T} + \frac{2c\alpha_T\lambda_TV_0}{r_0}\left(1 - \mathrm{e}^{r_0T}\right)\mathrm{e}^{r_0T} + \frac{2c^2\alpha_T\lambda_T}{r_{_0}^2}\left(1 + \mathrm{e}^{2r_0T}\right).
\end{aligned}
$$