

高压直流单极离子流场的有限元迭代计算

张宇¹, 魏远航², 阮江军¹

(1. 武汉大学电气工程学院, 湖北省 武汉市 430072; 2. 广东电网公司佛山供电局, 广东省 佛山市 528000)

Finite Element Iterative Computation of High Voltage Direct Current Unipolar Ionized Field

ZHANG Yu¹, WEI Yuan-hang², RUAN Jiang-jun¹

(1. School of Electrical Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, Hubei Province, China; 2. Foshan Electrical Power Company, Guangdong Power Grid Corporation, Foshan 528000, Guangdong Province, China)

ABSTRACT: Unipolar ionized field around high voltage direct current(HVDC) was solved iteratively with finite element method. Under certain approximate conditions, computation of the third-order nonlinear partial differential equation describing the field was separated into iterative calculation of both Poisson and current continuity equations. After providing an initial value of charge density throughout the interested region, results can be obtained by updating charge density after each iterative solution until convergence. Several problems related to the computation were discussed, Deutsch assumption was waived and Kaptzov assumption was replaced by an empirical formula, an update formula for charge density was presented. Both known analytical and experimental results were compared with those obtained by the method, and satisfactory agreement was obtained. The method presented is applicable for the analysis of HVDC unipolar ionized field.

KEY WORDS: high voltage direct current transmission line; ionized field; finite element method

摘要: 采用有限元方法对 HVDC 单极离子流场进行迭代求解, 在采取一定近似条件的情况下, 将描述高压直流线路周围场分布的三阶非线性偏微分方程分解为泊松方程和电流连续性方程的分别求解。在给定空间电荷密度初值后, 不断迭代求解并根据每一步结果对空间电荷密度修正直至收敛。讨论了计算中需要考虑的若干问题, 舍弃了 Deutsch 假设, 并用更符合实际的导体表面场强经验公式代替 Kaptzov 假设, 提出一种空间电荷密度更新公式。最后用具有解析解的同轴圆筒电极问题对该算法进行了验证, 并与相关 HVDC 模型实验数据进行比较, 得到了较满意的结果。该方法可适用于 HVDC 单极离子流场的计算分析。

关键词: 高压直流输电线路; 离子流场; 有限元法

0 引言

由于直流线路的电压极性是恒定的, 当输电线路导线表面的电场强度超过电晕起始场强时, 电晕

放电在电离区和极间区产生与导线同极性的电荷, 并在电场作用下不断向地面运动, 形成稳定的离子流。离子流场的计算和实验, 对已运行线路的性能评价及计划线路的设计均具有重要意义。

HVDC 线路的电晕损失、电磁环境干扰^[1]等问题的计算分析都以线路周围空间电场及离子流场计算的结果为基础。直流离子流场的严格解析解只有在求解区域规则对称的情况下才能获得, 如同轴圆筒电极^[2]和同心球壳电极^[3]。Sarma 等人首先提出用解析法计算直流输电线路下的离子流场, 但其中采用了 Deutsch 假设, 即认为空间电荷仅影响电场的大小而不影响其方向, 这样虽然把二维问题转化为一维问题^[4], 同时也引入了误差。Sunaga 等人通过有限差分法, 发现引入 Deutsch 假设可导致地面电场 10% 的误差和地面电流密度 40% 的误差^[5]。Janischewskyj 等人的工作^[2]首次将有限元法引入对直流离子流场的分析, 舍弃了 Deutsch 假设, 仅需 Kaptzov 假设。相继提出的数值方法除了有限元方法^[6-7]外, 还有模拟电荷法与加权余量法结合^[8], 边界元法^[9], 有限差分法^[10], 最优化方法与有限元法结合^[11], 有限元与有限体积法结合^[12]等。本文采用有限元法对离子流场进行求解, 分别计算泊松方程和电流连续性方程, 提出了一种空间电荷密度更新公式, 该公式同时考虑了 2 场电位求解的差别及电晕导体表面的场强边界条件对各次迭代的电荷密度更新的影响。为验证算法, 给出了该方法与解析结果和实验结果的对比。

1 简化条件及数学模型

虽然直流架空线路产生电晕的物理机理非常复杂, 但作为空间离子流场的计算, 可以采取一定

的近似处理。本文采用的近似条件有^[2,5,8,13]：①电晕导体周围电离层的厚度忽略不计；②对于高于电晕起始电压的外加电压，导体表面的电场强度与外加电压满足一定的经验公式关系；③离子的迁移率与场强无关，视为常数；④离子的扩散忽略不计。

对于近似条件②中导体表面场强的处理，多数研究者采用 Kaptzov 假设，即认为当导体电压高于电晕起始电压时，电晕导体表面的场强保持在电晕起始场强值。Waters、Popkov、Abdelsalam 等人分别通过实验和数值方法研究，认为导体表面场强并非常数，而是与过电压水平有关并且比起始场强低。其原因是导体表面电场不仅与电晕层的电荷有关，而且还受远处极间区的电荷影响。Aboelsaad 等人通过对前人实验及数值方法结果的平均拟合，得到导体表面场强 E_c 和所加电压 U 的函数如下^[5]：

$$E_c = E_0[1.1339 - 0.1678(U/U_0) + 0.03(U/U_0)^2] \quad (1)$$

其中： E_0 为电晕起始场强； U_0 为电晕起始电压。

高压直流离子流场的问题可看作在给定边界条件下的边值问题。以正极性为例，在不考虑风速影响的情况下，单极离子流场的控制方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{r}/\epsilon_0 \quad (2)$$

$$\mathbf{J} = k\mathbf{E} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (4)$$

其中： \mathbf{E} 为电场强度，V/m； \mathbf{J} 为离子流密度，A/m²； \mathbf{r} 为空间电荷密度，C/m³； ϵ_0 为空气的介电常数，F/m； k 为正离子迁移率，m²/(V·s)。设电位为 j ，由于

$$\mathbf{E} = -\nabla j \quad (5)$$

并考虑到近似条件③，即 k 视为常数，式(2)~(4)可化为

$$\nabla \cdot (\nabla j \nabla^2 j) = 0 \quad (6)$$

这是一个三阶的非线性偏微分方程，目前没有已知的方法可以在不加假设的情况下直接求解该方程^[5]，这种情况下通常可将复杂方程分解进行迭代求解^[14]。从控制方程可以看出，电场和电荷密度是相互耦合作用的，外加电压和电荷密度决定空间电场，而空间电场反过来又影响电荷密度和离子流密度，式(6)可以等效地分解为 2 组微分方程

$$-\nabla \cdot (\nabla j) = \mathbf{r}/\epsilon_0 \quad (7)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{r}\nabla j) = 0 \quad (8)$$

从而转化为在一定边界条件下，对 2 个微分方程的分别求解。其中方程(7)的求解变量为 j ，方程(8)或者以 j 为求解变量，或者以 \mathbf{r} 为求解变量，但后者的边界条件往往难于确定，其方程中由于一次导数

的出现使得数值解可能出现伪振荡，相应需要采用迎风格式的有限元法^[15]或有限体积法^[16-18]等方式来处理。

对于离子流场的边界条件的选取，研究者多采用导体表面电位及电晕导体表面场强，还有研究者给定为常数的导体表面电荷密度，或为常数的电流密度，但这些常数的确定需要依据实验测定并进行反推。本文对 2 个方程均以 j 为求解对象，采用的边界条件为：对于高压直流线路，在导体表面边界条件为运行电压和由式(1)确定的导体表面电场强度，地面的边界条件为 0 电位。

2 计算方法

方程(7)和(8)在给定 \mathbf{r} 的情况下，形式上均属于泊松方程，其中方程(7)即为常见的静电场方程，而方程(8)中可将 \mathbf{r} 看作材料参数，在一定边界条件下，均可以采用常规 Galerkin 有限元方法进行求解^[19]。设方程(7)对应 A 场，方程(8)对应 B 场，在对几何模型进行网格剖分后，首先在每一节点上假定初始 \mathbf{r} 值，同时求解 A 场和 B 场，设结果分别为 j_A 和 j_B ，此时可根据 2 场 j 的差值和导体表面的计算电场强度与给定的场强边界条件的差别来修正 \mathbf{r} 。将修正后的 \mathbf{r} 重新代入方程(7)和(8)中继续计算，其结果再次用来修正 \mathbf{r} 。如此反复迭代，最后当 2 场所解得的 j 的差值和连续 2 次计算的 \mathbf{r} 的差值满足给定容许误差即停止迭代。

从数值方法的角度看，问题为找到各网格节点上 j 和 \mathbf{r} 的离散值，使其同时满足方程(7)、(8)及给定边界条件，从而满足方程(6)。由于假定的 \mathbf{r} 初始值并不是真实解，2 方程所解得的电位必然不一致，故给定 \mathbf{r} 与真实解之间的差别与 2 场电位差别 $dj = j_A - j_B$ 有关。当修正电荷密度趋近于真实值时， dj 也趋近于零。对于 \mathbf{r} 的修正公式，研究者之间没有统一的定论，文献[2]中的公式仅与 2 场计算的电位有关，文献[5]中的公式则较为复杂，包含了 4 个待确定的参数。在参考上述公式的基础上，通过不断计算对比，本文提出的修正公式为

$$\mathbf{r}^{\text{new}} = \mathbf{r}^{\text{old}} + d\mathbf{r} \quad (9)$$

$$d\mathbf{r} = a \frac{E_{\text{cal}}}{E_c} \frac{-dj}{\frac{1}{2}(j_A + j_B)} \mathbf{r}^{\text{old}} \quad (10)$$

其中： \mathbf{r}^{new} 为电荷密度更新值； \mathbf{r}^{old} 为上一迭代步的电荷密度值； E_c 为导体表面场强，当模型为高压直流线路时由式(1)给出； E_{cal} 为上一迭代步 2 个场计

算所得的导线表面场强平均值； a 为待定参数，其取值的方法是通过不断尝试选取使误差下降最快的值，对不同的问题可能取不同的值(本文取为1.02)。对于边界上的节点，由于 Dirichlet 边界条件已将电位固定，每次迭代后 dj 均为 0，故通过内部节点上的 dj 值采取外插值的方法得到^[2]。

3 同轴圆筒电极离子流场计算

为了验证算法，编制了二维计算程序，采用解析解已知的同轴圆筒电极作为计算例子，将计算结果与解析结果进行比较。该问题的几何尺寸及边界条件如图 1 所示，其解析结果最早由 Townsend 给出，其表达式见文献[2]。

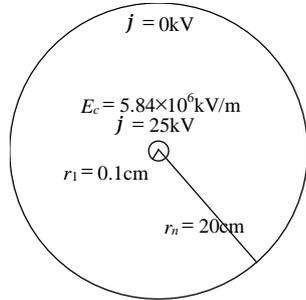


图 1 同轴圆筒电极示意图
Fig.1 Diagram of coaxial cylindrical pole

从迭代过程中可见，由于初值的任意性，第 1 次迭代后 2 场的求解结果一般会有较大偏差，通过不断修正求解区域 r 的分布，使 2 场数值解 j_A 与 j_B 逐渐接近。经过多次迭代后，2 场数值解之差已小于容许误差，此时 j 与 E 值都很接近真实值，取电极的某一径向直线作为观察线，第 1 次迭代与第 20 次迭代后各场电位、电场强度和电荷密度的数值解与解析解的比较如图 2 所示。

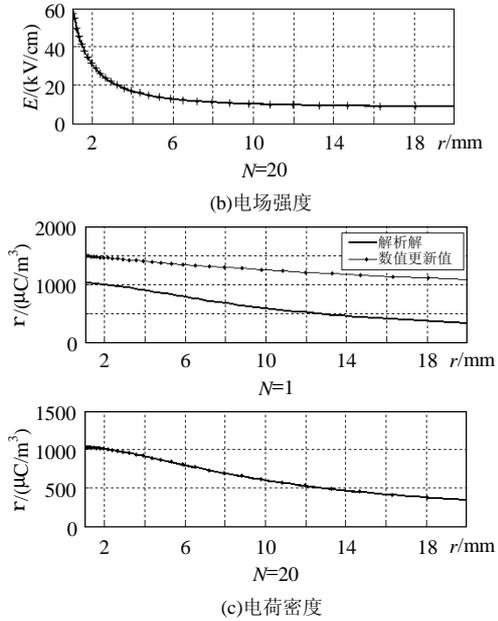
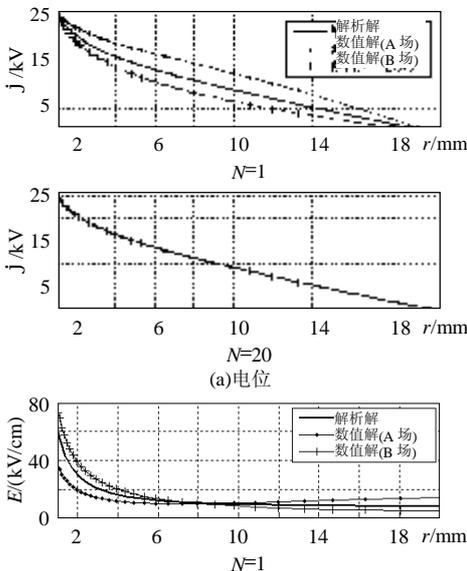


图 2 迭代 1 次和 20 次时各场量数值解与解析解比较
Fig.2 Comparison of numerical and analytical solution after the first and twentieth iteration

取 0.5% 作为容许误差，第 14 次迭代后已满足要求，其中 2 场电位误差为 0.089%，连续 2 次电荷密度的误差为 0.475%，各迭代步中 2 场场量的误差(化成以 10 为底的对数)随迭代步变化曲线如图 3 所示。

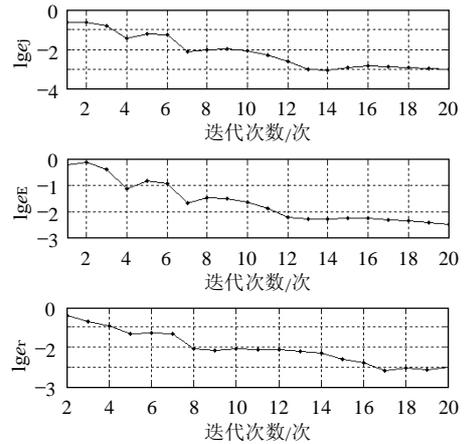


图 3 各迭代步各场量的对数误差曲线
Fig.3 Logarithmic error curve of results for each iteration

4 导线—地离子流场计算

第 3 节所述方法可推广至导线—地结构的离子流场计算。Hara 等人对户外高压直流线路模型进行了一系列离子流场的测量实验，在文献[20]中给出了实验结果和分析。其中正极性线路实验模型的原始参数为：导线半径为 0.25cm，距地高度为 2m； k_+ 为 $1.4 \times 10^{-4}\text{ m}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$ ，起始电晕场强为 45.05kV/cm，起始电晕电压 83kV(实验测得)。

以外加电压为 200kV 的结果作为参照,采用本文方法对文献[20]中的同样模型进行计算,其整体剖分及导体局部剖分如图 4 所示,由于更新公式中需要得到导体表面场强与边界条件比较,而场强值由节点电位计算值通过差分得到,因此为增加导体表面场强的计算精度,在导体表面单元的径向尺寸应足够小。

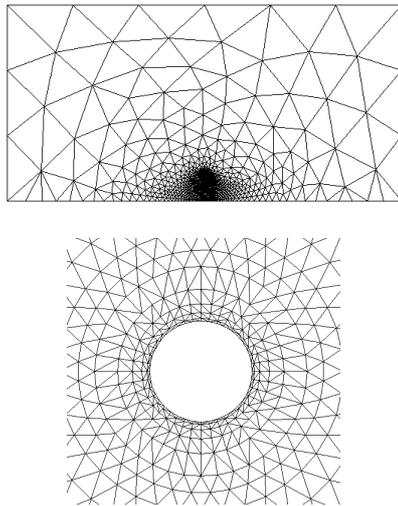


图 4 导线—地模型整体剖分及导体周围局部剖分
Fig.4 Global meshes and meshes near conductor for line-ground model

经过计算发现,空间 r 初值的选取,对迭代收敛的速度有较大影响(在 r 初值与真实值偏差太大时可能造成迭代不收敛),本文采用如下公式计算 r 的初值^[9]

$$r(x, y) = \frac{r_0}{[1 + (x^2 + (y - h)^2)/h^2]^2} \quad (11)$$

其中: h 为导线高度,坐标原点取为导线正下方的地平面上; x, y 为各节点的空间坐标; r_0 为一常数,需要在计算中尝试。计算结果表明,当迭代到第 22 步时,电位和电荷密度的迭代误差已小于 0.5%。迭代最后得到的线路周围空间电位分布和空间电荷密度分布如图 5 所示。

为了比较采用 Kaptsov 假设与否对结果的影响,分别编制了 2 组程序,二者算法一致,只是在电场强度边界条件的选择上有差别,其中程序 1 采用公式(1)确定导体表面场强,程序 2 采用 Kaptsov 假设确定导体表面场强。从计算结果可见,采用公式(1)的方法所得结果更接近实测值。地面电场强度和电流密度的计算结果与实验结果的比较如图 6 所示(由于室外实验有小于 1m/s 的自然风,其电流密度的实验数据显示不对称性)。

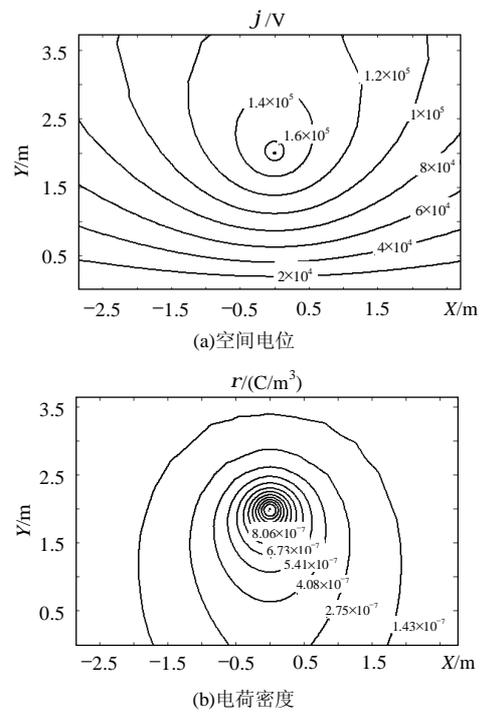


图 5 文献[20]模型的计算结果
Fig.5 Results of model in Ref.[20]

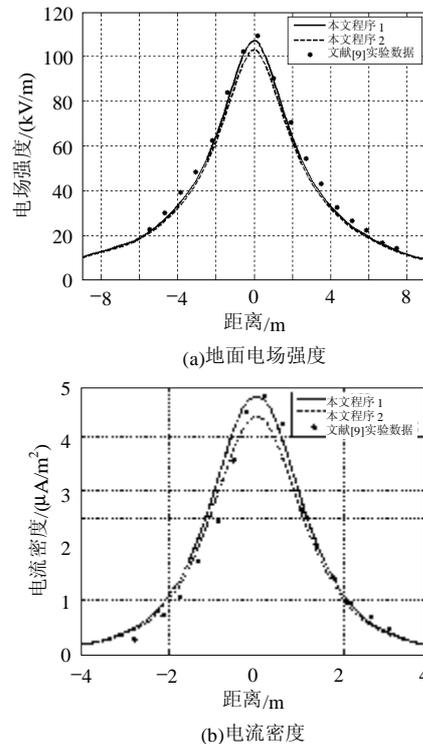


图 6 文献[20]实验模型计算结果与实验结果的比较
Fig.6 Comparison of numerical and experimental results for model in Ref.[20]

5 结论

本文采取有限元方法,将高压直流离子流场的计算转化为在给定边界条件下对泊松方程和电流

连续性方程的迭代求解, 得出以下结论:

(1) 本文方法不需 Deutsch 假设。对于导体表面场强, 采用参考实验数据的经验公式而非 Kaptzov 假设, 通过计算对比, 其结果比采用 Kaptzov 假设的方法的结果更接近实测结果数据。

(2) 提出一种空间电荷更新公式, 同时考虑了2场电位计算值之差及导体表面场强计算值与给定值之差, 得到了较好的收敛效果。

(3) 空间电荷初值的设定对收敛速度有较大影响, 与实际值偏差过大可能造成不收敛, 本文采用的初值分布公式(11)适用于对导线—地结构的单极离子流场的迭代计算。

(4) 该方法通过与可获得解析解的算例比较, 得到了比较精确的结果, 其有效性也在与 HVDC 模型实验数据的比较中得到验证。

(5) 采取相应有限元剖分, 可获得地面和空间任一点的场量, 包括电位、电场强度和离子流密度, 可进一步计算线路的环境影响和伏安特性。

参考文献

- [1] 周文俊, 阮江军, 邬雄. 特高压输电线路对电视信号接收的影响研究[J]. 中国电机工程学报, 2001, 21(4): 83-87.
Zhou Wenjun, Ruan Jiangjun, Wu Xiong. Television interference from very high voltage transmission lines[J]. Proceedings of the CSEE, 2001, 21(4): 83-87(in Chinese).
- [2] Janischewskij W, Gela G. Finite element solution for electric fields of coronating DC transmission lines[J]. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 1979, 98(3): 1000-1012.
- [3] 秦柏林, 盛剑霓, 严璋. 高压直流输电系统下的三维离子流场计算[J]. 中国电机工程学报, 1989, 9(2): 27-33.
Qin Bailin, Sheng Jianni, Yan Zhang. 3-Dimensional analysis of ion flow field under HVDC transmission systems[J]. Proceedings of the CSEE, 1989, 9(2): 27-33(in Chinese).
- [4] 赵毓君. 高压直流输电工程技术[M]. 北京: 中国电力出版社, 2004.
- [5] Aboelsaad M M, Shafai L, Rashwan M. Numerical assessment of unipolar corona ionised field quantities using the finite-element method[J]. IEE Proceedings, 1989, 136(2): 79-86.
- [6] Abdel-Salam M, Al-Hamouz Z. A new finite-element analysis of an ionized field in coaxial cylindrical geometry[J]. J.Phys.D, Appl. Phys., 1992, 25(10): 1551-1555.
- [7] Al-Hamouz Z, Abdel-Salam M. Finite-element solution of monopolar corona on bundle conductors[J]. IEEE Transactions on Industry Applications, 1999, 35(2): 380-386.
- [8] Qin Bailin, Sheng Jianni, Yan Zhang, et al. Accurate calculation of ion flow field under HVDC bipolar transmission lines[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 1988, 3(1): 368-376.
- [9] Yu M, Kuffel E. A new algorithm for evaluating the fields associated with HVDC power transmission lines in the presence of corona and strong wind[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1993, 29(2): 1985-1988.
- [10] Suda T, Sunaga Y. Calculation of large ion densities under HVDC transmission lines by the finite difference method[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 1995, 10(4): 1896-1905.
- [11] Li Xin, Raghuvver M R, Ciric I R. A new method for solving ionized fields associated with HVDC transmission lines [C]. Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena, Virginia Beach, USA, 1995: 455-458.
- [12] Li Xin, Raghuvver M R, Ciric I R. Analytical solution and scaled model of a unipolar HVDC transmission line[C]. Electrical Insulation and Dielectric Phenomena, Austin, Texas, USA, 1999: 142-145.
- [13] Abdel-Salam M, Al-Hamouz Z. Analysis of monopolar ionized field as influenced by ion diffusion[J]. IEEE Transactions on Industry Applications, 1995, 31(3): 484-493.
- [14] 林鹤云. 三维涡流场的一种迭代解法[J]. 中国电机工程学报, 1999, 19(11): 73-75.
Lin Heyun. An iteration method for solving three dimensional eddy currents[J]. Proceedings of the CSEE, 1999, 19(11): 73-75(in Chinese).
- [15] 余海涛, 邵可然, 周克定. 迎风——线性棱边单元法[J]. 中国电机工程学报, 1996, 16(2): 92-94.
Yu Haitao, Shao Keran, Zhou Keding. Upwind – linear edge elements method[J]. Proceedings of the CSEE, 1996, 16(2): 92-94(in Chinese).
- [16] 李伟力, 丁树业, 靳慧勇. 基于耦合场的大型同步发电机定子温度场的数值计算[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(13): 129-134.
Li Weili, Ding Shuye, Jin Huiyong. Numerical calculation of large synchronous generator stator temperature fields based on coupled fields[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(13): 129-134(in Chinese).
- [17] 李军, 邓清华, 丰镇平. 蜂窝汽封和迷宫式汽封流动性能比较的数值研究[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(16): 109-111, 131.
Li Jun, Deng Qinghua, Feng Zhenping. Comparison of the flow characteristics for the honeycomb and labyrinth seal using numerical simulation[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(16): 109-111, 131(in Chinese).
- [18] Ciric I R, Li Xin, Raghuvver M R. Investigation of ionized fields due to bundled unipolar dc transmission lines in the presence of wind [J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 1999, 14(1): 211-217.
- [19] 韩社教, 戴栋, 马西奎, 等. 应用有限元法计算氧化锌避雷器电位分布[J]. 中国电机工程学报, 2001, 21(12): 105-108, 114.
Han Shejiao, Dai Dong, Ma Xikui, et al. Calculation of potential distribution for zinc-oxide surge arrester by finite element method [J]. Proceedings of the CSEE, 2001, 21(12): 105-108, 114(in Chinese).
- [20] Hara M, Hayashi N, Shiotsuki K, et al. Influence of wind and conductor potential on distributions of electric field and ion current density at ground level in DC high voltage line to plane geometry[J]. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 1982, 101(4): 803-814.

收稿日期: 2006-06-06.

作者简介:

张宇(1979—), 男, 博士研究生, 从事电磁场理论及其工程应用研究, zhangyuemc@163.com;

阮江军(1968—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 从事电磁场数值计算及电磁兼容研究。

(编辑 车德竞)