反凸规划的分枝定界方法 *

布和额尔敦[1†]　陈国庆[2]　刘菊红[1]

摘要 本文考虑了一种带有反凸约束的凸规划问题，发展了一种锥分枝定界方法，并给出收敛性条件.

关键词 锥，分枝定界方法，全局优化

中图分类号 O22

数学分类号 90C30

Branch-and-Bound Method for Reverse Convex Programming

Buheerdun[1†]　CHEN Guoqing[2]　LIU Jühong[1]

Abstract This paper considers a convex programming with an additional reverse convex constraint. A kind of conical branch and bound method is developed and convergence conditions are obtained.

Keywords cone, branch-and-bound method, global optimization

Chinese Library Classification O22

2010 Mathematics Subject Classification 90C30

0 引 言

考虑的问题是：

$$
\text{(RCP)} \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g(x) \geqslant 0 \\ & h(x) \leqslant 0 \end{array}
$$

其中 $f, g, h: R^N \to R$ 是有限凸函数.

求解上述问题 (RCP) 的主要困难在于 (RCP) 带有一个反凸约束 $g(x) \geqslant 0$, 它不仅破坏了规划问题的凸性，甚至使得问题的可行域变得不连通．一般而言，其局部极值并非是问题的全局极值．故通常的求解局部最优解的方法变得无能为力． H Tuy[1] 和

收稿日期： 2009 年 1 月 6 日.

* 基金项目：内蒙古自治区高等学校科学研究项目 (NJ10059)

1. 内蒙古农业大学理学院，呼和浩特 010018; College of Science, Inner Mongolia Agricultural University, Huhhot 010018, China

2. 内蒙古大学数学科学学院，呼和浩特 010021; College of Mathematics Science, Inner Mongolia University, Huhhot 010021, China

† 通讯作者 Corresponding author

S Yamad[2] 提出过外部逼近方法和内部逼近方法．当目标函数 $f(x)$ 和 $h(x)$ 为线性时，R T Hillestad[3] 和 R Horst[4] 曾经提出过分枝定界思想，本文基于这个思想，对于一般的 (RCP) 问题给出了一种算法．记

$$D=\{x:h(x)\leqslant 0,g(x)\geqslant 0\}\ ,\ G=\{x:g(x)<0\}\ ,\ F(\bar{x})=\{x:f(x)\leqslant f(\bar{x})\},$$

则 (RCP) 变成为

$$\min_{x\in D} f(x).$$

1 基本假设及预备知识

(i) $D\neq\phi$, 且 G 有界；

(ii) 对于原点 O, 满足：

$$h(0)\leqslant 0,\quad g(0)<0,\quad f(0)<\alpha=\min_{x\in\ D} f(x).$$

由 [1] 知，此假设是合理的 (通过坐标平移). 由假设可得：

引理 1.1[1] 设 $f,\ g,\ h$ 在 R^N 上连续并且次可微，则

(1) $\{x:h(x)\leqslant 0,\ f(x)\leqslant\alpha\}\subset\bar{G}(\bar{G}$ 为 G 的闭包),

(2) 对于任意实数 c,d, 水平集

$$\{x:h(x)\leqslant 0,\ f(x)\leqslant c\},\ \{x:h(x)\leqslant 0,\ g(x)\leqslant d\}$$

有界．记 $\partial G=\{x:g(x)=0\}$, 定义映射 $\pi:R^N\rightarrow\ \partial G,\ \ \pi(x)=tx,\ \ t=\max\{\theta:g(\theta x)\leqslant 0,\theta>0\}$.

引理 1.2 对于 $\forall x\in R^N$, 若 $g(x)>0$, 则 $f(\pi(x))<f(x)$, 即 (RCP) 的解必在 $\{x:h(x)\leqslant 0\}\cap\partial G$ 上到达.

证明 设 $\pi(t)=tx,\ t>0$, 因为 $g(x)>0$, 所以必有 $t<1$, 由 $f(x)$ 的凸性及假设 (ii), 得：

$$f(\pi(x))\leqslant tf(x)+(1-t)f(0)<tf(x)+(1-t)f(x)=f(x).$$

2 算法

2.1 分拆方法及锥的构造

定义 2.1 设 $M,M_i\subset R^N\ (i\in I)$ 为顶点在原点的多面体凸锥，对于 $M_i\subset M$, 如果有 $\bigcup\limits_{i\in I} M_i=M$ 且 $M_i\cap M_j=\partial M_i\cap\partial M_j,(\forall i,j\in I,i\neq j)$, 则称 $\{M_i,i\in I\}$ 为 M 的一个分拆，其中 ∂M_i 表示 M_i 的边界 (其中 I 是正整数集).

定义 2.2 设 $S=\bar{co}\{v^1,v^2,\cdots,v^N\}$ 为 R^N 中的 $N-1$ 维单纯形 (其中 $v^1,v^2,\cdots,v^N\in$

R^N 为线性无关的), 则称顶点在原点 O, 各棱边穿越 $\upsilon^i \quad (i=1,2,\cdots,N)$ 的凸多面体锥 $M=\bigcup\limits_{\theta\geqslant 0}\theta S$ 为由单纯形 S 所确定的锥.

任取一个多胞形 $T=\bar{co}\{\upsilon^j: j\in J\}\subset R^N$(其中 J 是正整数集), 满足

(1) $\quad 0\in \text{int}\, T$, (2) T 的每个 $N-1$ 维面都是一个如下形式的 $N-1$ 维单纯形

$$S_i=\bar{co}\{\upsilon^{j_{k_i}}: j_{k_i}\subset J, k=1,2,\cdots,N\}$$

$\upsilon^{j_{k_1}},\upsilon^{j_{k_2}},\cdots,\upsilon^{j_{k_N}}$ 线性无关, $\quad (i\in I)$.

设由 S_i 所确定的锥为 $M_i,(i\in I)$, 取 M_i 的一个子类

$$m_0=\{M_i: i\in I_0\subset I\}$$

满足 $F(x^*)\cap D\subset \bigcup\limits_{M\in m_0} M$. 其中 x^* 表示 (RCP) 的全局最优解. 对于任意集 $D'\subset R^N$, 记

$$\min f(D')=\min\{f(x): x\in D'\}.$$

2.2 算法

步 0 按上述方式取初始锥子类 $m_0=\{M_i: i\in I\}$, 取初始点 $x^0\in D$. 对每一个 M_i, 若已判明 $M_i\cap D\cap F(x^0)=\phi$(说明 M_i 中不含比 x^0 更好的可行点), 将 M_i 从 m_0 中删除，否则计算 $\min f(M_i\cap D\cap F(x^0))$ 的一个上界 $\alpha(M_i)=f(x_{M_i})$, 若 $x_{M_i}\in D\cap F(x^0)$, 则置 $x^0=x_{M_i}$. 计算 $\min f(M_i\cap D\cap F(x^0))$ 的一个下界 $\beta(M_i), i\in I$. 记剩余锥类仍为 m_0. 计算 $\beta_0=\min\limits_{i\in I}\{\beta(M_i), M_i\in m_0\}, x^0=f(x^0)$. 若 $\alpha_0=\beta_0$, 则停，即 x^0 为最优解，否则转步 2.

步$\boldsymbol{k}$ $(k=1,2,\cdots,)$ 此时已有当前可行点 x^{k-1}, 锥类 m_{k-1}, 上、下界 α_{k-1}, β_{k-1} 满足

$$\beta_{k-1}\leqslant \min f(D\cap F(x^{k-1}))\leqslant \alpha_{k-1}.$$

对每一个 $M\in m_{k-1}$, 有上、下界 $\alpha(M)$, $\beta(M)$ 满足

$$\beta(M)\leqslant \min f(M\cap D\cap F(x^{k-1}))\leqslant \alpha(M).$$

$(k.1)$ 选择 $M\in m_{k-1}$, 将之分拆为若干个子锥，记为 P_k.

$(k.2)$ 选择 $M\in P_k$, 若已判明 $M\cap D\cap F(x^{k-1})=\phi$, 将 M 从 P_k 中删除，否则计算 $\min f(M\cap D\cap F(x^{k-1}))$ 的一个上界 $\alpha(M)=f(x_M)$. 若 $x_M\in D\cap F(x^{k-1})$, 置 $x^{k-1}=x_M$. 计算 $\min f(M\cap D\cap F(x^{k-1}))$ 的一个下界 $\beta(M)$, 记剩余锥类仍为 P_k.

$(k.3)$ 置 $m_k=(m_{k-1}\setminus\{M\})\cup P_k$, 计算 $\alpha_k=f(x^{k-1})$, 置 $x^k=x^{k-1}$, 计算 $\beta_k=\min\{\beta(M): M\in m_k\}$.

$(k.4)$ 若 $\alpha_k=\beta_k$, 则停，即 x^k 为最优解，否则转步 $k+1$.

由上面叙述的算法知， $\alpha_k-\beta_k$ 刻画了当前可行解 x^k 与最优解 x^* 之间目标函数

值的接近程度，故对于给定的精度 $\varepsilon > 0$, 当 $\alpha_k - \beta_k \leqslant \varepsilon$ 时，算法可停止.

上述分枝定界算法，其效率主要依赖于如下三个因素：

(1) 每步计算中 $M \in m_k$ 的选择准则，(2) 锥 M 的分拆方法，(3) $M \cap D \cap F(x^k) = \phi$ 的判定及 $\alpha(M), \beta(M)$ 的估计.

在具体给出上述三个因素之前，我们现讨论它们要满足的算法收敛性条件.

3 收敛性

定义 3.1 对每个 $M \in \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=p}^{\infty} m_k$, 如果有 $\min f(M \cap D \cap F(x^k)) \geqslant \alpha^*$(其中 $\alpha^* = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k$) 则称选择准则是完备的 (由算法构造知， $\{\alpha_k\}$ 为单调下降有界序列).

由此定义知，对于 $\forall p$, 当 $\bigcap\limits_{k=p}^{\infty} m_k = \phi$ 时，选择准则的完备性自然成立．当某一锥 M 一直未被选择时，则算法执行完毕后， M 中必不含有更好的可行点.

定义 3.2 称锥分拆方法是穷尽的，若对任意无穷递降锥子列 $M_{k_i}, \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_{k_i}$ 为一条始于原点的半射线 $\{\theta\hat{x} | \theta \geqslant 0\}, \hat{x} \in R^N$.

定义 3.3 称上、下界 $(\alpha(M), \beta(M))$ 运算是相容的，如果对于任意无穷递降子列 M_{k_i}, 当 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_{k_i}$ 为一条半射线时，必有 $\lim\limits_{i\to\infty}(\alpha(M_{k_i}) - \beta(M_{k_i})) = 0$.

定理 3.1 上述算法或者有限步内停止，求得 (RCP) 的全局最优解；或者产生无穷点列 $\{x^k\}$, 如果算法所使用的锥选择准则是完备的，分拆方法是穷尽的，上、下界运算是相容的，则有

$$\lim_{k\to\infty} f(x^k) = \min f(D).$$

证明 记 $\mu^* = \min f(D)$, $\alpha^* = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \lim\limits_{k\to\infty} f(x^k)$. 由算法的构造，显然有 $\mu^* \leqslant \alpha^*$. 故只证 $\mu^* \geqslant \alpha^*$, 即对 $\forall x \in D$ 均有 $f(x) \geqslant \alpha^*$ 即可．对于 $\forall x \in D$, 区分如下三种情形：

(1) 若 $x \in M$, M 在某 k 步被删除，则必有 $f(x) \geqslant f(x^k) \geqslant \alpha^*$.

(2) 若 $x \in M \in \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=p}^{\infty} m_k$, 则由选择方式的完备性知， $\min f(M \cap D \cap F_\alpha^*) \geqslant \alpha^*$, 从而 $f(x) \geqslant \alpha^*$, 其中 $F_\alpha^* = \{x : f(x) \geqslant \alpha^*\}$.

(3) 若 $x \in M$, M 是非上述 (1), (2) 两种情形，则 M 必在某 k_1 步被分拆为若干子锥，其中必存在某子锥包含 x, 设为 M_{k_1}, M_{k_1} 又在某 $k_2 > k_1$ 步被分拆为若干个子锥，存在 M_{k_2} 包含 $x, \cdots$, 如此下去，得到一列无穷降锥子列 $\{M_{k_i}\}$, 由分拆方法的穷尽性，上、下界运算的相容性得： $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha(M_{k_i}) = \lim\limits_{i\to\infty} \beta(M_{k_i}) = \alpha^*$, 由 $f(x) \geqslant \beta(M_{k_i})$ 知 $f(x) \geqslant \alpha^*$.

4 锥选择准则的构造

准则 1 对于每个 M, 定义 $\tau(M)$ 为 M 在算法执行中生成时的迭代步次，选择 $M=\arg\min\{\tau(M'):M'\in m_k\}$, 即选择 m_k 中最早生成的 M(其中 $\tau(M)=\min\{\tau(M'):M'\in m_k\}$).

准则 2 对于每个锥 M, 定义 $\delta(M)$ 为 $N-1$ 维单纯形面 $M\cap\partial T$ 的直径，选择 $M=\arg\min\{\delta(M'):M'\in m_k\}$, 即选择 m_k 中“最大”的锥.

准则 3 选择 $M=\arg\min\{\beta(M'):M'\in m_k\}$, 即选择 m_k 中“最有前途”的锥 M.

引理 4.1 若算法使用准则 1, 则对任意正整数 p, 有 $\bigcap\limits_{k=p}^{\infty} m_k=\phi$. 对于准则 2, 若算法使用的锥分拆方式是穷尽的，则 $\bigcap\limits_{k=p}^{\infty} m_k=\phi$.

证明 设对 $\forall k\in I$, $|P_k|\leqslant l$(其中 $|P_k|$ 表示 P_k 所包含的锥的个数), 设算法使用准则 1, 因为 m_k 所含的锥的总数为 $|m_k|=|m_0|+\sum\limits_{i=1}^{k-1}|P_i|-(k-1)$, 所以 M 必在第 $|m_k|+(l-2)(k-1)$ 步之前被选择而分拆，故 $\bigcap\limits_{k=p}^{\infty} m_k=\phi$.

设算法使用准则 2, 且锥分拆方式是穷尽的，若存在 $M\in\bigcap\limits_{k=p}^{\infty} m_k$, 且算法执行无穷次, 则 m_0 中至少存在一锥在算法执行中含有无穷降锥子列 $\{M_{k_i}\}$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}\delta(M_{k_i})=0$. 因此存在充分大的 i_0, 使得 $\delta(M_{k_0})<\delta(M)$ 成立. 这与第 k_0 步的选择准则 2 相矛盾，故 $\bigcap\limits_{k=p}^{\infty} m_k=\phi$.

引理 4.2 若分拆方式是穷尽的，上、下界运算是相容的，则选择准则 3 是完备的.

证明 设 $M\in\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=p}^{\infty} m_k$, 不妨假设 $M\in\bigcap\limits_{k=p_0}^{\infty} m_k$. 因为 $\min f(M\cap D)\geqslant\beta(M)$, 故只证 $\beta(M)\geqslant\alpha^*$ 即可. 由分拆方式的穷尽性知道, 至少存在一列无穷降锥子列 $\{M_{k_i}\}$(其中 $M_{k_i}\in m_{k_i}$), $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_{k_i}$ 为一条半射线, 由上、下界运算是相容性得，$\lim\limits_{i\to\infty}(\alpha(M_{k_i})-\beta(M_{k_i}))=0$, 所以有 $\lim\limits_{i\to\infty}\beta(M_{k_i})=\alpha^*$. 再由选择准则 3 得， $\beta(M_{k_i})\leqslant\beta(M)$, $(\forall k_i\geqslant p_0)$, 故 $\beta(M)\geqslant\alpha^*$.

5 锥分拆方式

设 M 为顶点在原点 O, 各棱边穿越单纯形 $S=\bar{co}\{v^1,v^2,\cdots,v^N\}$ 的多面体凸锥.

分拆方式 1

设 $[v^{i_1},v^{i_2}]$ 为 S 中边长最大的边即 $||v^{i_1}-v^{i_2}||=\max\{||v^i-v^j||\}$. 记 $\omega=\frac{v^{i_1}+v^{i_2}}{2}$,

以始于原点，穿越点 ω 的半射线将 M 分拆为由单纯形

$$\begin{aligned} S_1 &= \bar{co}\{\upsilon^1, \upsilon^2, \cdots, \upsilon^{i_1-1}, \omega, \upsilon^{i_1+1}, \cdots, \upsilon^N\}, \\ S_2 &= \bar{co}\{\upsilon^1, \upsilon^2, \cdots, \upsilon^{i_2-1}, \omega, \upsilon^{i_2+1}, \cdots, \upsilon^N\} \end{aligned}$$

所确定的凸锥 M_1, M_2; 容易知道，

$$M = M_1 \cup M_2, \quad M_1 \cap M_2 = \partial M_1 \cap \partial M_2.$$

称该分拆方式为对分拆方式. 由 [5] 知，若算法始终使用对分拆方式，则分拆方式是穷尽的.

分拆方式 2

记

$$\begin{aligned} &\delta(S) = \max\{||\upsilon^i - \upsilon^j||\}, \\ &\delta(i, S) = \max\{||\upsilon^i - \upsilon^j|| : i = 1, 2, \cdots, N\}, \\ &I(S) = \{i : \delta(i, S) > (1 - \tfrac{1}{N})\delta(S)\}. \end{aligned}$$

取 $\omega = (\sum\limits_{i \in I(S)} \upsilon^i)/I(S)$, 以始于原点，穿越点 ω 的半射线将 M 分拆成 $I(S)$ 个子锥 $M_i, i \in I(S)$, 每个锥 M_i 均由单纯形 $\bar{co}\{\upsilon^1, \upsilon^2, \cdots, \upsilon^{i-1}, \omega, \upsilon^{i+1}, \cdots, \upsilon^N\}$ 所确定. 由 [6] 知，该分拆方式是穷尽的.

除了以上两种分拆方式以外，还有其他的分拆方式，这里不提了.

6 判别 $M \cap D \cap F(x^k) = \phi$ 及上、下界 $\alpha(M)$, $\beta(M)$ 的构造

设 M 为顶点在原点 O, 各棱边穿越单纯形 $S = \bar{co}\{\upsilon^1, \upsilon^2, \cdots, \upsilon^N\}$ 的 N 个 (线性无关) 顶点 $\upsilon^1, \upsilon^2, \cdots, \upsilon^N$ 的多面体凸锥，设算法执行到第 k 步. 记

$$\begin{aligned} D'(x^{k-1}) &= \{x : h(x) \leqslant 0\} \cap F(x^{k-1}) \\ &= \{x : h(x) \leqslant 0\} \cap \{x : f(x) \leqslant f(x^{k-1})\}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

定义映射 $\sigma : S \to \partial D'(x^{k-1})$ 如下：

$$\sigma(x) = tx, t = \max\{\theta : \theta x \in D'(x^{k-1}), \theta \geqslant 0\} \tag{6.2}$$

即 $\sigma(x)$ 为半射线 $\{\theta x : \theta \geqslant 0\}$ 与 $D'(x^{k-1})$ 的交点，由引理 1.1 知 $D'(x^{k-1})$ 为有界凸集，再注意到基本假设 (ii),$0 \in D'(x^{k-1})$. 故 t 唯一存在且有限.

记 $f_h(x) = \max\{h(x), f(x) - f(x^{k-1})\}$, 设 $\partial f_h(x)$ 为 f_h 在点 x 的次微分. 对每个 υ^i, 取

$$\begin{aligned} &p^i \in f_h(\sigma(\upsilon^i)) \quad i = 1, 2, \cdots, N. \\ &K = \{x :\ \langle p^i, x - \sigma(\upsilon^i)\rangle \leqslant 0, i = 1, 2, \cdots, N\} \end{aligned} \tag{6.3}$$

记 A 为以 $p^1,p^2,\cdots,p^N$ 为行的 $N\times N$ 矩阵, $b=(b_1,b_2,\cdots,b_N)^{\mathrm{T}}$, 其中 $b_i=\langle p^i,\sigma(\upsilon^i)\rangle$, 则 K 可表示为 $Ax\leqslant b$. 对每个 $i=1,2,\cdots,N$, 定义 $y^i=y^i(M)$ 为

$$y^i=\theta_i\upsilon^i,\theta_i=\max\{\theta:g(\theta\upsilon^i)\leqslant 0,\theta\geqslant 0)\}. \tag{6.4}$$

由 G 的有界性, g 的凸性及 $g(0)\leqslant 0$ 知, θ_i 唯一存在且有限.

记 H 为通过 $y^1,y^2,\cdots,y^N$ 的超平面, 设 z 为 $M\cap D'(x^k)$ 内与 H 距离最大之点 (若一点 x 与原点 O 位于 H 同一侧, 则 x 与 H 距离取负值, 否则取正值). 设 H' 为平行于 H 且通过点 z 的超平面, 记 z^i 为半射线 $\{\theta\upsilon^i:\theta\geqslant 0\}$ 与 H' 的交点, $i=1,2,\cdots,N$.

考虑如下的线性规划子问题

$$\text{(LP)}\qquad \begin{array}{ll}\max & \sum\limits_{i=1}^{N}\lambda_i/\theta_i\\ \text{s.t.} & AB\lambda\leqslant b,\quad \lambda\geqslant 0\end{array}$$

其中, B 为以 $\upsilon^1,\upsilon^2,\cdots,\upsilon^N$ 为列的 $N\times N$ 矩阵, λ 为以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$ 为列的矢量.

引理 6.1 若 λ^* 为 (LP) 的最优解, 则

(1) $z=B\lambda^*,z^i=\alpha^*y^i$, 其中 $\alpha^*=\sum\limits_{i=1}^{N}\lambda_i^*/\theta_i$;

(2) 若 $\alpha^*<1$, 则 $D\cap M\cap F(x^k)=\phi$; 若 $\alpha^*\geqslant 1$, 则当 $h(\pi(z))\leqslant 0$ 时, $\alpha(M)=f(\pi(z))$ 为 $\min f(D\cap M\cap F(x^k))$ 的一个上界.

证明 对任意 $x\in M$ 均具有形式 $x=\sum\limits_{i=1}^{N}\lambda_i\upsilon^i=B\lambda,\lambda\geqslant 0$. 设 μ 为半射线 $\{\theta x:\theta\geqslant 0\}$ 与超平面 H 的交点, 则 $\mu=\sum\limits_{i=1}^{N}\eta_iy^i=1$, 其中 $\sum\limits_{i=1}^{N}\eta_i=1,\eta_i\geqslant 0$, 注意到 $x=\sum\limits_{i=1}^{N}(\lambda_i/\theta_i)y^i$, 即 $x=\alpha\mu$, 其中 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{N}(\lambda_i/\theta_i)$. 故 $\mu-x=(1-\alpha)\mu$, 这说明 x 到 H 的距离为原点 O 到 H 的距离的 $(1-\alpha)$ 倍, 故 (1) 成立.

由 K 的定义, 容易知道 $M\cap D'(x^k)\subset M\cap K$, 若 $\alpha^*<1$, 则 $M\cap K\subset S_0=\bar{co}\{0,y^1,y^2,\cdots,y^N\}$, 且 $(M\cap K)\backslash S_0=\phi$. 由 G 的凸性, $S_0\subset\bar{G}(\bar{G}$ 表示 G 的闭包), 从而对任意的 $x\in D\cap M\cap F(x^k)$, 都有 $g(x)<0$. 这说明 $D\cap M\cap F(x^k)=\phi$. 若 $\alpha^*\geqslant 1,h(\pi(z))\leqslant 0$, 则显然有 $\pi(z)\in M\cap D$, 故

$$\alpha(M)=f(\pi(z))\geqslant\min f(D\cap M\cap F(x^k)).$$

由上述引理 6.1 可知, 通过求解线性规划子问题 (LP), 我们得到判别 $D\cap M\cap F(x^k)=\phi$ 的一个估计准则: 当 $\alpha^*<1$ 时, 则 $D\cap M\cap F(x^k)=\phi$. 当 $\alpha^*=1$ 时, 即使 $D\cap M\cap F(x^k)\neq\phi$, 也必有 $f(x)=f(x^k)$. 所以, 当 $\alpha^*\leqslant 1$ 时, 从 m_k 中删除 M, 否则计算上界 $\alpha(M)=f(\pi(z))$. 若 $\pi(z)\in D$, 则取 $\alpha(M)=f(x^k)$ 即可.

由于 $\beta(M)=\min\{f(x):x\in M\cap K\cap H^+\}$, 其中 H^+ 表示由超平面 H 分界的不含原点 O 的半空间. 再由引理 1.2 知, $\beta(M)=\min\{f(x):x\in M\cap K\cap H\}$, 而求解 $\min\{f(x):x\in M\cap K\cap H\}$ 可化为如下形式的子问题:

$$
\text{(SP)}\qquad
\begin{array}{ll}
\min & f(\beta\lambda) \\
\text{s.t.} & AB\lambda \leqslant b \\
& \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i/\theta_i = 1 \\
& \lambda \geqslant 0
\end{array}
$$

其中， A, B, λ, θ_i 的意义同前.

如果 $f(x)$ 具有某种简单形式，比如 $f(x)$ 为线性或二次函数形式，使子问题 (SP) 的求解相对简单快速时，可直接求解 (SP) 而得到 $\min f(M\cap D\cap F(x^k))$ 的一个下界 $\beta(M)=f(B\lambda^*)$, 其中 λ^* 为 (SP) 的最优解. 否则，可用 $f(x)$ 在 M 上的某个简单形式的下包络函数 $\varphi: M\to R^1,(\varphi(x)\leqslant f(x),\forall x\in M)$ 来代替 $f(x)$ ，求得下界 $\beta(M)$. 下面，当 $\varphi(x)$ 为线性函数时，给出求解 $\beta(M)$ 的简单方法：

记 $\upsilon_\theta=(\sum\limits_{i=1}^{N}\upsilon^i)/N$, 取 $p_0\in\partial f(\theta_f(\upsilon_0))$, $\sigma_f(\upsilon_0)$ 为 $\{\theta\upsilon_0:\theta\geqslant 0\}$ 与 $f(x)=f(x^{k-1})$ 之交点. 令 $\varphi(x)=\langle p_0, x-\sigma_f(\upsilon_0)\rangle$, $\forall x\in M$, 不难看出， $\varphi(x)\leqslant f(x)$, $\forall x\in M$. 由 φ 的线性性质知： φ 在 $M\cap K\cap H$ 上的极小值必在 $M\cap K\cap H$ 的极点达到. 再由 H 的定义知， $M\cap H=\bar{co}\{y^1,y^2,\cdots,y^N\}$($y^i$ 的定义见 (4) 式). 取

$$y^{i_0}=\arg\min\{\varphi(y^i):\ i=1,2,\cdots,N\}.$$

记

$$I=\{i:\langle p^i, y^{i_0}-\sigma_f(\nu^i)\rangle>0,\ i=1,2,\cdots,N\},$$

$$I\times J=\{(i,j):\langle p^i, y^j-\sigma_f(\upsilon^i)\rangle<0,\quad j\neq i_0;\ i,j=1,2,\cdots,N\}.$$

则线段 $[y^{i_0}, y^j]$ 只能与 $\langle p^i, y^j-\sigma_f(\upsilon^i)\rangle=0$ 有交点，设交点为 ω_{ij}, $(i,j)\in I\times J$, 则

$$\min\{\varphi(x):x\in M\cap K\cap H=\varphi(\omega_{ij}),\ (i,j)\in I\times J\}.$$

注 6.1 算法执行过程中，可能发生线性规划问题 (LP) 无有限最优解的情况，此时既不能提供 $D\cap M\cap F(x^k)$ 是否为空的信息，也不能产生 $\min f(D\cap M\cap F(x^k))$ 的上界 $\alpha(M)=f(x_M)$, 其中 $x_M=D\cap F(x^k)$. 为了提供多面集 K 逼近 $D\cap M\cap F(x^k)$ 的逼近度，可选择适当的点 $\upsilon_0\in M$(比如取 $\upsilon_0=(\sum\limits_{i=1}^{N}\upsilon^i)/N$) 在多面集 K 中增加约束 $\langle p^0, x-\sigma(\upsilon_0)\rangle\leqslant 0$, 其中 $p^0\in\partial f_h(\sigma(\upsilon_0))$. 当线性规划子问题 (LP) 的解 λ^* 为有限时，若 $\alpha^*>1$, 且 $x_M=\pi(z)$ 对当前可行解 x^k 未产生改善或改善不明显时，我们通过点 $\sigma(z)$ 作 $f_h(x)$ 的切平面，在多面集 K 中增加约束 $K'=K\cap\{x:\ \langle p_z, x-\sigma(z)\rangle\leqslant 0\}$ (其中 $p_z=\partial f_h(z)$) 来提高 K' 逼近 $D\cap M\cap F(x^k)$ 的程度. 对应于多面集 K' 的线性子规划问题 (LP$'$) 与原 (LP) 的差别只在于多一个约束，故求解 (LP$'$) 时，可充分利用前一次信息，节约计算量. 该方式可以反复进行以便提高判别 $M\cap D\cap F(x^{k-1})=\phi$ 的速度和上界 $\alpha(M)$ 的逼近度. 对于下界 $\beta(M)$, 也可以类似的方式反复改善，每次改善均在前一次计算的基础上进行.

定理 6.1 按上述方式构造的上、下界运算是相容的.

证明 设 $\{M_{k_i}\}$ 由算法产生的无穷递降锥子列，相应于 M_{k_i} 的单纯形面为

$$S_{k_i}=\bar{co}\{\upsilon_{k_i}^1,\upsilon_{k_i}^2,\cdots,\upsilon_{k_i}^N\}.$$

不妨设 M_{k_i} 是由 $M_{k_{i-1}}$ 在第 k_{i-1} 步分拆而得到的. 分拆方式的穷尽性有

$$\lim_{i\to\infty}\delta(S_{k_i})=\lim_{i\to\infty}\max_{j_1\neq j_2}\{||\upsilon_{k_i}^{j_1}-\upsilon_{k_i}^{j_2}||\}=0 \tag{6.5}$$

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}m_{k_i}\{\theta\hat{x}:\theta\geqslant 0\}$, 其中 $\hat{x}\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}S_{k_i}$. 记 $\alpha^*=\lim\limits_{i\to\infty}\alpha(M_{k_i})=\lim\limits_{i\to\infty}f(x^{k_i})$,(由 $\alpha(M_{k_i})$ 的构造， $\alpha(M_{k_i})=f(x^{k_i}), f(x^{k_i})$ 为单调下降有界序列). 由 m_{k_i} 的定义知道 $\alpha(M_{k_i}),\beta(M_{k_i})$ 在第 k_{i-1} 步被计算. 设 $y_{k_i}^j,z_{k_i},z_{k_i}^j$ 和 α^* 分别在第 k_{i-1} 步中得到相应于 y^j,z,z^j 和 α^*(见引理 6.1) 的数值，注意到 π, σ 的连续性，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{i\to\infty}\max_{j_1\neq j_2}\{||\pi(\upsilon_{k_i}^{j_1})-\pi(\upsilon_{k_i}^{j_2})||\}=0,\\
&\lim_{i\to\infty}\max_{j_1\neq j_2}\{||y_{k_i}^{j_1}-y_{k_i}^{j_2}||\}=0,\\
&\lim_{i\to\infty}\max_{j_1\neq j_2}\{||\sigma_f(\upsilon_{k_i}^{j_1})-\sigma_f(\upsilon_{k_i}^{j_2})||\}=0.
\end{aligned}$$

又因为 $\alpha_{k_i}^*>1$, $\forall i=1,2,\cdots$ 从而有

$$\lim_{i\to\infty}\alpha(M_{k_i})=\alpha^*=f(\sigma(\hat{x}))=\lim_{i\to\infty}\beta(M_{k_i}).$$

注 6.2 上述反凸规划的直接背景之一是几何布局问题，我们把装填和覆盖、设备布局和集成电路布图设计等问题都可化为不可微非凸规划问题，在适当的条件下，又把它可化成一类带有反凸约束的凸规划问题. 例如，设 M 为凸集， $G(\supset M)\subset R^N$ 是开凸集，则 $\min\limits_{x\in R^N\setminus G}f(x)=d(x,M)$ 就是一个反凸规划问题.

参考文献

[1] Tuy H. Convex programs with an additional reverse convex constraint[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1987, **52**: 463-486.

[2] Yamda S, Tanino T, Inviguchi M. Inner approximation method for a reverse convex programming problem[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2000, **107**(2): 355-389.

[3] Hillestad R J. Optimization problems subject to a budget constraint with economies of scale[J]. *Operations Research*, 1975, **23**(6): 1091-1098.

[4] Horst R. Introduction to Global Optimization[M]. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1995.

[5] Thdai V N G, Tuy H. Convergent algorithms for minimizing a concave function[J]. *Math Oper Res*, 1980, **5**: 556-566.

[6] Tuy H, Khatchaturov V, Utkin S. A class of exhaustive Cone splitting procedure in conical algorithms for concave minimization[J]. *Optimization*, 1987, **18**: 791-807.