互连网络的向量图模型 *

师海忠 [1†] 牛攀峰 [1] 马继勇 [1] 侯斐斐 [1]

摘要 n- 超立方体、环网、 k 元 n 超立方体、 Star 网络、煎饼 (pancake) 网络、冒泡排序 (bubble sort) 网络、对换树的 Cayley 图、 De Brujin 图、 Kautz 图、 Consecutive-d 有向图、循环图以及有向环图等已被广泛地应用做处理机或通信互连网络. 这些网络的性能通常通过它们的度、直径、连通度、 Hamiltonian 性、容错度以及路由选择算法等来度量. 首先提出了有向向量图和向量图的概念；其次，开发了有向向量图模型和向量图模型来更好地设计、分析、改良互连网络. 进一步证明了上述各类著名互连网络都可表示为有向向量图模型或向量图模型. 更重要的是该模型能够设计出新的互连网络 - 双星网络和三角形网络.

关键词 互连网络，有向向量图，向量图，双星网络，三角形网络

中图分类号 TP393

数学分类号 68M10,05C38

A Vector Graph Model for Interconnection Networks

SHI Haizhong[1†] NIU Panfeng[1] MA Jiyong[1] HOU Feifei[1]

Abstract n-cube, ring network, k-ary-n-cube, star network, pancake network, bubble sort network, Cayley graph of transposition tree, De Bruijn network, Kautz network, consecutive-d digraph, ILLIAC network, circulant digraph, circulant undirected graph, ring digraph,etc have been widely used as processor or communication networks. The performance of such networks is often measured through an analysis of their degree, diameter, connectivity, fault tolerance, routing algorithm, etc. In this paper, we proposed the concepts — vector digraph and vector graph. Second, we developed vector digraph model and vector graph model for interconnection networks for designing, analyzing, and improving above networks. Furthermore, we show that the networks mentioned above can be concisely represented in the two models. More importantly, we show that the two models enabled us to design new networks — double star network and triangle network based on vector graphs.

Keywords interconnection network, vector digraph, vector graph, double star network, triangle network

Chinese Library Classification TP393

2010 Mathematics Subject Classification 68M10,05C38

收稿日期： 2011 年 4 月 28 日.

* 基金项目：甘肃省自然科学基金 (ZS991-A25-017-G)

1. 西北师范大学数学与信息科学学院，兰州 730070 ； College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

0 引 言

处理机 / 通讯互连网络常常模型化为一个有向图或一个无向图，其顶点对应于处理机 / 通讯端口，其边对应于通讯信道，其上的通信由信息按协议沿边点交错路径的传递来实现，传输延迟由信息传递时经过的边的数目来度量. 图的顶点度、直径、对称性、连通度、路的选择算法以及结构等是我们感兴趣的网络特征.

非对称互连网络有 De Brujin 有向图 (De Brujin digraph), Kautz 有向图 (Kautz digraph), Consecutive-d 有向图 (Consecutive-d digraph), 循环有向图，有向环图等 [3−5,8−9].

对称互连网络有环网 (即无向圈), 完全图， n- 超立方体， k- 元 n- 超立方体 (k-ary n-cube), Star 网络，冒泡排序网络 (bubble sort network), 煎饼网络 (pancake network), 对换树的 Cayley 图 (Cayley graph of transposition tree), ILLIAC 网络，循环无向图等 [1−2,8−13].

在设计对称或非对称互连网络时总的目标是构造大顶点数对称或非对称图，它们具有如下特性：小顶点度 (对称图), 小出 / 入度 (非对称图), 小直径，高连通度 (对称图), 高强连通度 (非对称图), 简单路由选择算法等.

对以上对称或非对称互连网络给出统一的形式不仅能挖掘出它们的共性以便更好地研究这些互连网络，而且能更好地帮助我们设计、分析、改良互连网络. 为此，在本文中，首先我们提出了有向向量图和向量图的概念. 其次，我们证明：(1) 上述非对称互连网络能表示成有向向量图模型； (2) 上述对称互连网络能表示成向量图模型. 这也为我们利用向量理论 (包括线性代数和抽象代数 [8,14−15] 设计、分析、改良互连网络打开了大门.

1 有向向量图与向量图

为了把图论与向量理论联系起来，以便更好地实现图论与向量理论的相互渗透，进而设计出性能更好的互连网络. 在本节中，我们首次给出有向向量图与向量图的定义.

定义 1.1 设 V 是环 S 上的 n 维向量的非空集合， Φ 是环 S 上的 n 阶方阵的非空集合， Ψ 是环 S 上的 n 维向量的非空集合，有向图 G 定义如下：

$$G \text{ 的顶点集 } V(G)=V,$$

从 $(a_1,a_2,...,a_n)$ 到 $(b_1,b_2,...,b_n)$ 连一有向边当且仅当存在 $M\in\Phi$ 和 $(c_1,c_2,...,c_n)\in\Psi$ 使 $(b_1,b_2,...,b_n)=(a_1,a_2,...,a_n)M+(c_1,c_2,...,c_n)$, 称此有向图 G 为环 S 上的具有生成集 V,Φ 和 Ψ 的 n 维有向向量图，记为 $S^n(V,\Phi,\Psi)$, 简称有向向量图.

定义 1.2 设 V 是环 S 上的 n 维向量的非空集合， Φ 是环 S 上的 n 阶方阵的非空集合， Ψ 是环 S 上的 n 维向量的集合，且 Φ 和 Ψ 满足：

$i)$. 对任意 $M\in\Phi$, 有 M 可逆且 $M^{-1}\in\Phi$;

$ii)$. 对任意 $(c_1,c_2,....,c_n)\in\Psi$, 任意 $M\in\Phi$ 有 $-(c_1,c_2,...,c_n)M^{-1}\in\Psi$.

无向图 G 定义如下：

$$G \text{ 的顶点集 } V(G)=V,$$

$(a_1,a_2,...,a_n)$ 与 $(b_1,b_2,...,b_n)$ 连一边当且仅当存在 $M\in\Phi$ 和 $(c_1,c_2,...,c_n)\in\Psi$ 使 $(b_1,b_2,...,b_n)=(a_1,a_2,...,a_n)M+(c_1,c_2,...,c_n)$, 称此无向图 G 为环 S 上的具有生成集 V, Φ 和 Ψ 的 n 维向量图，记为 $S^n(V,\pm\Phi,\pm\Psi)$, 简称为向量图.

2 有向向量图模型

许多著名的非对称互连网络，例如， De Brujin 有向图 $B(d,t)$, Kautz 有向图 $K(d,t)$, Generalized De Brujin 有向图 $G_B(d,n)$, Imase-Itoh 有向图 $G_I(d,n)$, Consecutive-d 有向图 $G(n,d,q,r)$ 等 ([5]), 都是特殊的有向向量图．下面我们一一给出证明：

2.1 De Brujin 有向图 $B(d,t)$

$B(d,t)$ 可通过下述方式说明它是有向向量图.

定义 2.1.1[5] $B(d,t)$ 定义为如下有向图：

$B(d,t)$ 的顶点集为 $Z=\{i=x_1d^{t-1}+x_2d^{t-2}+\cdots+x_{t-1}d+x_t\in Z_{d^t},x_1,x_2,\cdots,x_t\in\{0,1,2,\cdots,d-1\}\}$;

从 $i=x_1d^{t-1}+x_2d^{t-2}+\cdots+x_{t-1}d+x_t$ 到 $j=y_1d^{t-1}+y_2d^{t-2}+\cdots+y_{t-1}d+y_t$ 连一有向边当且仅当 $j=id+k(mod(d^t)),k=0,1,\cdots,d-1$.

由定义 2.1.1 及定义 1.1 知：

定理 2.1.1 $B(d,t)$ 正好是如下有向向量图 $S^1(V,\Phi,\Psi):S=Z_{d^t},V=\{(i)|i\in Z_{d^t}\}$, 即是 Z_{d^t} 上的一维向量的集合， $\Phi=\{(d)|d\in Z_{d^t}\}$, 即是 Z_{d^t} 上的一阶方阵且取值为 d, $\Psi=\{(k)|k=0,1,\cdots,d-1\in Z_{d^t}\}$.

2.2 Kautz 有向图 $K(d,t)$

$K(d,t)$ 可通过下述方式说明它是有向向量图.

$K(d,t)$ 可定义为：

定义 2.2.1[5] 设 $n=d^{t-1}(d+1)$, $K(d,t)$ 定义为如下有向图：

$K(d,t)$ 的顶点集为 $Z=Z_n$,

从 i 到 j 连一有向边当且仅当 $j\equiv -d(i+1)+k(modn)$ 对某个 $k=0,1,\cdots,d-1$ 成立.

由定义 2.2.1 及定义 1.1 知：

定理 2.2.1 $K(d,t)$ 正好是如下有向向量图 $S^1(V,\Phi,\Psi)$: $S=Z_n$, 这里 $n=d^{t-1}(d+1)$, $V=\{(i)|i\in Z_n\}$, 即 v 是 Z_n 上的一维向量的全体组成的集合． $\Phi=((-d)|-d\in Z_n)$, 即 Φ 是 Z_n 上取值为 $-d$ 的一阶方阵组成的集合， $\Psi=\{(-d+k)\mid k=0,1,\cdots,d-1\in Z_n\}$.

2.3 Generalized De Brujin 有向图 $G_B(d,n)$

Generalized De Brujin 有向图定义如下：

定义 2.3.1[5] 设 n 和 d 是两个自然数且 $d\leqslant n$, Generalized De Brujin 有向图 $G_B(d,n)$ 定义为如下有向图：

$G_B(d,n)$ 的顶点为 Z_n,

从 i 到 j 连一有向边当且仅当 $j=di+k(modn)$, 对某个 $k=0,1,\cdots,d-1$ 成立.

由定义 2.3.1 和定义 1.1 知：

定理 2.3.1. $G_B(d,n)$ 正好是如下有向向量图 $S^1(V,\Phi,\Psi)$: $S=Z_n$, $V=\{(i)|i\in Z_n\}$, 即是 V 是 Z_n 上的一维向量的全体组成的集合， $\Phi=\{(d)\mid d\in Z_n\}$, 即 Φ 是 Z_n 上的取值为 d 的一阶方阵组成的集合， $\Psi=\{(k)|k=0,1,\cdots,d-1\in Z_n\}$.

2.4 Imase-Itoh 有向图 $G_I(d,n)$

Imase-Itoh 有向图 $G_I(d,n)$ 定义如下：

定义 2.4.1[5] 设 n 和 d 是两个自然数且 $d\leqslant n$. Imsae-Itoh 有向图 $G_I(d,n)$ 定义为如下有向图：

$G_I(d,n)$ 的顶点集为 Z_n,

从 i 到 j 连一有向边当且仅当 $j=-d(i+1)+k(modn)$, 对某个 $k=0,1,2,\cdots,d-1\in Z_n$ 成立.

由定义 2.4.1 及定义 1.1 知：

定理 2.4.1. Imase-Itoh 有向图 $G_I(d,n)$ 正好是如下有向向量图 $S^1(V,\Phi,\Psi)$:

$S=Z_n, V=\{(i)\mid i\in Z_n\}$, 即 V 是 Z_n 上的一维向量的全体组成的集合， $\Phi=\{(-d)|-d\in Z_n\}$, 即是 Z_n 上的取值为 $-d\in Z_n$ 的一阶方阵组成的集合， $\Psi=\{(-d+k)\mid -d\in Z_n, k=0,1,\cdots,d-1\in Z_n\}$.

2.5 Consecutive-d 有向图 $G(d,n,q,r)$

Consecutive-d 有向图 $G(d,n,q,r)$ 定义如下：

定义 2.5.1[5] 设 n 和 d 是两个自然数且 $d\leqslant n$, 给定 $q\in Z_n\backslash\{0\}, r\in Z_n$. Consecutive-d 有向图 $G(d,n,q,r)$ 定义如下有向图：

$$G(d,n,q,r) \text{ 的顶点集为 } Z_n$$

从 i 到 j 连一有向边当且仅当 $j\equiv qi+r+k(modn)$, 对某个 $k=0,1,\cdots,d-1\in Z_n$ 成立. 由定义 2.5.1 和定义 1.1 知：

定理 2.5.1 $G(d,n,q,r)$ 正好是如下有向向量图 $S^1(V,\Phi,\Psi)$ ： $S=Z_n, V=\{(i)\mid i\in Z_n\}$, 即是 Z_n 上的一维向量的全体组成的集合. $\Phi=\{(q)\mid q\in Z_n\backslash\{0\}\}$ 是 $Z_n\backslash\{0\}$ 上的取值为 q 的一阶方阵组成的集合， $\Psi=\{(r+k)\mid r\in Z_n, k=0,1,\cdots,d-1\in Z_n\}$.

2.6 双环网络

双环网络主要有：分布式双环计算机网络 (distributed double loop computer network), 菊花链环网络 (daisy chain loop network), 前环后跳网络 (forward loop backward hoop network), 一般双环网络 (general double loop network) 等. 下面我们说明这些都是特殊的有向向量图.

定义 2.6.1[9] 分布式双环计算机网络 $dD(n)$ 定义为如下有向图：

$$dD(n) \text{ 的顶点集为 } Z_n,$$

$$dD(n) \text{ 的边集为 } E=\{(i,j): j-i\equiv 1, n-1(modn).$$

由定义 2.6.1. 及定义 1.1 知：

定理 2.6.1 $dD(n)$ 正好是如下有向向量图 $S^1(V,\Phi,\Psi)$:

$S=Z_n, V=\{(i)\mid i\in Z_n\}$, 即是 Z_n 上的全体一维向量组成的集合. $\Phi=\{(1)\mid 1\in Z_n\}$, 即为一阶单位矩阵组成的集合， $\Psi=\{(1),(n-1)\mid 1,n-1\in Z_n\}$, 即为 Z_n 上的两个一维向量 (1) 和 (n-1) 组成的集合.

定义 2.6.2[9] 菊花连环网络 $dC(n)$ 定义为如下有向图：

$$dC(n) \text{ 的顶点集为 } Z_n,$$

$$dC(n) \text{ 的边集为 } E=\{(i,j): j-i\equiv 1, n-2modn\}.$$

由定义 2.6.2 及定义 1.1 知：

定理 2.6.2 $dC(n)$ 正好是如下有向向量图 $S^1(V,\Phi,\Psi)$:

$S=Z_n, V=\{(i)\mid i\in Z_n\}$, 即是 Z_n 上的全体一维向量组成的集合. $\Phi=\{(1)\mid 1\in Z_n\}$, 即为 Z_n 上的一阶单位矩阵组成的集合， $\Psi=\{(1),(n-2)|1,n-2\in Z_n\}$.

定义 2.6.3[9] 前环后跳网 $fB(n,s)$ 定义为如下有向图：

$$fB(n,s) \text{ 的顶点集为 } Z_n,$$

$$fB(n,s) \text{ 的边集 } E=\{(i,j): j-i\equiv 1, n-s(modn)\}$$

其中 s 的确定是使得该网络有最小的直径和平均距离.

由定义 2.6.3 和定义 1.1 知：

定理 2.6.3 $fB(n,s)$ 正好是如下有向向量图 $S^1(V,\Phi,\Psi)$:

$S=Z_n, V=\{(i)\mid i\in Z_n\}$, 即是 Z_n 上的全体一维向量组的集合. $\Phi=\{(1)|1\in Z_n\}$, 即是 Z_n 上的一阶单位矩阵组成的集合, $\Psi=\{(1),(n-s)\mid 1,n-s\in Z_n\}$, 即为 Z_n 上的两个一维向量 (1) 和 (n-s) 组成的集合.

定义 2.6.4[9] 一般双环网 $gD(n,r,s)$ 定义为如下有向图:

$gD(n,r,s)$ 的顶点集为 Z_n,

$gD(n,r,s)$ 的边集 $E=\{(i,j):j-i\equiv r,s(modn)\}$

其中 $r,s(1\leqslant r<s<n)$ 的选择是使得该网络有最小的直径或者平均距离.

由定义 2.6.4 及定义 1.1 知:

定理 2.6.4 一般双环网 $gD(n,r,s)$ 正好是如下有向向量图 $S^1(V,\Phi,\Psi)$:

$S=Z_n, V=\{(i)\mid i\in Z_n\}$, 即是 Z_n 上的全体一维向量组的集合. $\Phi=\{(1)|1\in Z_n\}$, 即是 Z_n 上的一阶单位矩阵组成的集合, $\Phi=\{(r),(s)\mid r,s\in Z_n\}$, 即为 Z_n 上的两个一维向量 (1) 和 (n-s) 组成的集合.

2.7 循环有向图

定义 2.7.1 设 Z_n 为模 n 剩余类环, $P\subseteq Z_n\backslash\{0\}$. 循环有向图 $G(n,P)$ 定义为如下有向图:

$G(n,P)$ 的顶点集为 Z_n,

$G(n,P)$ 的边集 $E=\{(i,j)|$ 存在 $s\in P$ 使 $j-i\equiv s(modn)\}$.

由定义 2.7.1 及定义 1.1 知:

定理 2.7.1 循环有向图 $G(n,S)$ 正好是如下有向向量图 $S^1(V,\Phi,\Psi)$:

$S=Z_n, V=\{(i)\mid i\in Z_n\}$, 即为 Z_n 上的全体一维向量组成的集合, $\Phi=\{(1)\mid 1\in Z_n\}$, 即为 Z_n 上的一阶单位矩阵的集合, $\Psi=\{(s)\mid s\in P\}$, 即为 P 上的全体一维向量组成的集合.

2.8 有向环图

有向环图 $D(R,\Omega,W)$ 定义如下:

定义 2.8.1[8] 设 R 是一个含单位元的有限环, Ω 和 W 是 R 的两个非空子集, 有向环图 $D(R,\Omega,W)$ 定义为如下有向图:

$D(R,\Omega,W)$ 的顶点集为 R,

$D(R,\Omega,W)$ 的边集为 E= $\{(x,y)\mid$ 存在 $q\in\Omega, r\in W$ 使 y=xq+r $\}$.

由定义 2.8.1 和定义 1.1 知:

定理 2.8.1 $D(R,\Omega,W)$ 正好是如下有向向量图 $S^1(V,\Omega,\Phi)$:

$S=R, V=\{(x)\mid x\in R\}$, 即为 R 上的全体一维向量组成的集合, $\Phi=\{(q)\mid q\in\Omega\}$, 即为 Ω 上的一阶方阵组成的集合, $\Psi=\{(r)\mid r\in W\}$, 即为 W 上的全体一维向量组成的集合.

3 向量图模型

许多著名互连网络, 例如, 环网, n- 超立方体, d 元 n 维超立方体 (d-ary n-hypercube), Star 网络, 煎饼 (Pancake) 网络, 冒泡排序网络, 对换树 (transposition tree), 等等, 都是特殊的向量图. 对此, 下面我们一一证明.

3.1 环网

环网的拓扑结构为无向图. 具体定义如下:

定义 3.1.1 环图 C_n 定义为如下无向图：

C_n 的顶点集为 Z_n,

C_n 的边集为 $E=\{[i,j]:\text{存在 } r\in\{\pm 1\}\subseteq Z_n \text{ 使 } j-i\equiv r(modn)\}$.

由定义 3.1.1 和定义 1.2 知：

定理 3.1.1 环网 C_n 正好是如下向量图 $S^1(V,\pm\Phi,\pm\Psi)$:

$S=Z_n, V=\{(i)\mid i\in Z_n\}$, 即是 Z_n 上的全体一维向量组成的集合，$\Phi=\{(1)\mid 1\in Z_n$ 是 Z_n 的单位元 $\}$, 即为 Z_n 上的一阶单位元矩阵组成的集合，$\Psi=\{(1),(-1)\mid 1,-1\in Z_n\}$, 即为 Z_n 上的取值为 1 或 -1 的一维向量组成的集合.

3.2 n 维超立方体

定义 3.2.1 n 维超立方体 Q_n 定义为如下无向图：

Q_n 的顶点集为 $V=\{x_1x_2\cdots x_n\mid x_i\in Z_2, i=1,2,\cdots,n\}$, $x=x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y=y_1y_2\cdots y_n$ 连一边当且仅当 x 和 y 有且仅有一个坐标不同.

由定义 3.2.1 和定义 1.2 知：

定理 3.2.1 Q_n 正好是如下向量图 $S^n(V,\pm\Phi,\pm\Psi)$:

$S=Z_2, V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in Z_2, i=1,2,\cdots,n\}, \Phi=\{E_n\mid E_n$ 为 Z_2 上的 n 阶单位矩阵 $\}$, $\Psi=\{(1,0,\cdots\cdots,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)\mid 1,0\in Z_2\}$.

注意 $-(1,0,\cdots,0)=(1,0,\cdots,0), -(0,1,\cdots,0)=(0,1,\cdots,0),\cdots,-(0,0,\cdots,1)=(0,0,$
$\cdots,1)$.

3.3 d 元 n 维超立方体

定义 3.3.1 设 Z_d 是模 d 剩余类环且 $d\geqslant 2$, d 元 n 维超立方体 $Q_n(d)$ 定义为如下无向图：

$Q_n(d)$ 的顶点集为 $V=\{x_1x_2\cdots x_n\mid x_i\in Z_d, i=1,2,\cdots,n\}$, $x=x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y=y_1y_2\cdot y_n$ 连一边当且仅当 x 和 y 有且仅有一个坐标不同且仅差 $1\in Z_n$ 或 $-1\in Z_n$.

由定义 3.3.1 和定义 1.1 知

定理 3.3.1 $Q_n(d)$ 正好是如下向量图 $S^n(V,\pm\Phi,\pm\Psi)$: $S=Z_n, V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in Z_d, i=1,2,\cdots,n\}$,

$\Phi=\{E_n\mid E_n$ 为 Z_d 上的 n 阶单位矩阵 $\}$,

$\Psi=\{(\pm 1,0,\cdots,0),(0,\pm 1,0,0,0),\cdots,(0,0,\cdots,\pm 1)\mid 1,0\in Z_d$ 分别为 Z_d 的单位元和零元， $-1\in Z_d$ 为 1 的负元 $\}$.

3.4 Star 网络

为了给出 Star 网络的定义，先给出 Cayley 图的定义：

定义 3.4.1[9] 设 $\Gamma=(Z,\circ)$ 是非平凡有限群， A 是 Z 的非空子集，还满足：

(1)A 不含 Γ 的单位元;

(2)$A^{-1}=A$, 其中 $A^{-1}=\{x^{-1}\mid x\in A\}$. 定义无向图 G 如下：

G 的顶点集为 Γ， x 与 y 之间连一边当且仅当 $x^{-1}y\in A$,

称 G 为群 Γ 关于 A 的 Cayley 图，记为 $C_\Gamma(A)$.

定义 3.4.2 Star 网络 S_n 定义为如下的 Cayley 图 $C_\Gamma(A)$: Γ 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的全体置换构成的对称群， $A=\{i23\cdots(i-1)1(i+1)\cdots n\mid 2\leqslant i\leqslant n\}$.

由定义 3.4.2 及定义 1.2 知：

定理 3.4.1 Star 网络 S_n 正好是如下向量图 $S^n(V,\pm\Phi,\pm\Psi)$: $S=R$, 即为实数域, $V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1x_2\cdots x_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任意排列 $\}$. $\Phi=\{E_n(1,i)\mid E_n(1,i)$ 为

单位矩阵 E_n 互换第 1 列与第 i 列得到的初等矩阵, $2 \leqslant i \leqslant n\}$, $\Psi = \{(0,0,\cdots,0)\}$.

3.5 煎饼 (Pancake) 网络

定义 3.5.1 煎饼 (pancake) 网络 P_n 定义为如下的 Cayley 图 $C_\Gamma(A)$:

Γ 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的全体置换构成的对称群,

A=$\{i(i-1)\cdots 21(i+1)(i+2)\cdots n \mid 2 \leqslant i \leqslant n\}$.

由定义 3.5.1 及定义 1.2 知:

定理 3.5.1 煎饼 (Pancake) 网络 P_n 正好是如下向量图 $S^n(V,\pm\Phi,\pm\Psi)$: $S=R$, 即为实数域, $V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1x_2\cdots x_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任意排列 $\}$.

$$\Phi=\left\{\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}&0\\0&E_{n-2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}&0\\0&E_{n-3}\end{pmatrix},\cdots,\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\cdots 0&1\\0&0&\cdots 1&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\\1&0&\cdots 0&0\end{pmatrix}&0\\0&E_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\cdots 0&0&1\\0&0\cdots 0&1&0\\0&0\cdots 1&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\\1&0\cdots 0&0&0\end{pmatrix}\right\},$$

其中 E_i 为 i 阶单位矩阵, $i=1,2,\cdots,n-2$, $\Psi=\{(0,0,\cdots,0)\}$.

3.6 冒泡排序 (bubble sort) 网络

定义 3.6.1 冒泡排序 (bubble sort) 网络 B_n 定义为如下 Cayley 图 $C_\Gamma(A)$:

Γ 为 $\{1,2,\cdots,n\}$, 上的全体置换构成的对称群,

$A=\{12\cdots(i-2)i(i-1)(i+1)\cdots n \mid 2 \leqslant i \leqslant n\}$.

由定义 3.6.1 及定义 1.2 知:

定理 3.6.1 冒泡排序网络 B_n 正好为如下向量图 $S^n(V,\pm\Phi,\pm\Psi)$: $S=R$, 即为实数域, $V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1x_2\cdots x_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任意排列 $\}$, $\Phi=\{E_n(i,i+1) \mid E(i,i+1)$ 为 E_n 互换第 i 列和第 $i+1$ 列得到的初等矩阵, $1 \leqslant i \leqslant n-1\}$, $\Psi=\{(0,0,\cdots,0)\}$.

3.7 对换树的 Cayley 图

设 Γ 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的所有置换构成的对称群, 则 $123\cdots n$ 为 Γ 的单位元. 把单位元 $123\cdots n$ 中的两个符号 i 和 $j(1 \leqslant i,j \leqslant n, i \neq j)$ 互换得到的置换 $T(i,j)$ 称为一个对换, 这样的对换一共有 $\binom{n}{2}$. 考虑一个图 $G(n,E)$: 其顶点集为 $\{1,2,\cdots,n\}$, 顶点 i 和 $j(i \neq j)$ 连一边就意味着有一个对换 $T(i,j)$, 这里 E 为 $G(n,E)$ 的边集. 这样一个图 $G(n,E)$ 的边集正好对应对换的一个集合, 反之也对, 所以 E 表示相应对换的集合, 因而这个图称为一个对换图, 记为 $G(n,E)$; 若该图是一棵树, 则称为对换树, 记为 $T(n,E)$([1]).

显然, Star 网络和冒泡排序网络 B_n 的生成元集均为特殊的对换树, 分别为一条从 1 到 n 的路和一颗星 ([1]).

进而我们有

定义 3.7.1[7] 对换树 $T(n,E)$ 的 Cayley 图的定义为如下 Cayley 图 $C_\Gamma(A)$:

Γ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的所有置换构成的对称群, 其中 $A=E$ 即为与 $T(n,E)$ 的边集对应的对换集合. 把此 Cayley 图记为 $C(T(n,E))$.

Star 网络 S_n 和冒泡排序网络 B_n 均为特殊的对换树的 Cayley 图.

由定义 3.7.1 及定义 1.2 知:

定理 3.7.1 $C(T(n,E))$ 正好是如下向量图 $S^n(V,\pm\Phi,\pm\Psi)$: $S=R$, 即为实数域, $V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1x_2\cdots x_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任意排列 $\}$, $\Phi=\{E_n(i,j)\mid E(i,j)$ 为 E_n 互换第 i 列和第 j 列得到的初等矩阵, $1\leqslant i,j\leqslant n, i\neq j$, 且对换 (i,j) 是 $T(n,E)$ 的一条边 $\}$, $\Psi=\{(0,0,\cdots,0)\}$.

更一般地有

定义 3.7.2[1] 对换图 $G(n,E)$ 的 Cayley 图 $C(G(n,E))$ 定义为如下 Cayley 图 $C_\Gamma(A)$: Γ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的由对换集 $A=E$ 生成的置换群，其中 $A=E$ 即为与 $G(n,E)$ 的边集对应的对换集合.

由定义 3.7.2 及定义 1.2 知：

定理 3.7.2 $C(G(n,E))$ 正好是如下向量图 $S^n(V,\pm\Phi,\pm\Psi)$: $S=R$, 即为实数域, $V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1x_2\cdots x_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任意排列 $\}$, $\Phi=\{E_n(i,j)\mid E(i,j)$ 为 E_n 互换第 i 列和第 j 列得到的初等矩阵, 且对换 (i,j) 是 $G(n,E)$ 的一条边，$1\leqslant i,j\leqslant n, i\neq j\}$, $\Psi=\{(0,0,\cdots,0)\}$.

4 两类新的互连网络

下面给出两类新的互连网络的定义：

定义 4.1 双星网络 DS_n 定义如下向量图 $S^{2n}(V,\pm\Phi,\pm\Psi)$: $S=R$, 即为实数域, $V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})\mid x_1x_2\cdots x_{2n}$ 是 $1,2,\cdots,2n$ 的任意排列 $\}$, $\Phi=\{E_{2n}(1,i)\mid E(1,i)$ 为 E_{2n} 互换第 1 列和第 i 列得到的初等矩阵, $2\leqslant i\leqslant n$ 或 $i=2n\}\cup\{E(2n,j)\mid E(2n,j)$ 为互换第 $2n$ 与第 j 列得到的初等矩阵, $n+1\leqslant j\leqslant 2n-1\}$, $\Psi=\{(0,0,\cdots,0)\}$.

定义 4.2 三角形网络 TR_{3n} 定义如下向量图 $S^{3n}(V,\pm\Phi,\pm\Psi)$: $S=R$, 即为实数域, $V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{3n})\mid x_1x_2\cdots x_{3n}$ 是 $1,2,\cdots,3n$ 的任意排列 $\}$, $\Phi=\{E_{3n}(1,i)\mid E(1,i)$ 为互换 E_{3n} 第 1 列和第 i 列得到的初等矩阵, $2\leqslant i\leqslant n+1\}\cup\{E(1,2n+1)\}\cup\{E(n+1,j)\mid E(n+1,j)$ 为 E_{3n} 互换第 $n+1$ 与第 j 列得到的初等矩阵, $n+2\leqslant j\leqslant 2n+1\}\cup\{E(2n+1,k)\mid E(2n+1,k)$ 为 E_{3n} 互换第 $2n+1$ 列和第 k 列得到的初等矩阵, $2n+2\leqslant k\leqslant 3n\}$, $\Psi=\{(0,0,\cdots,0)\}$.

5 结 束 语

在本文中提出了两个新的概念：有向向量图 $S^n(V,\Phi,\Psi)$ 和向量图 $S^n(V,\Phi,\Psi)$, 并证明了许多著名互连网络都是特殊的有向向量图或向量图，并利用这两个新的概念设计出两类新的互连网络. 可以预言，利用这两个概念还可以设计出其它新的互连网络. 当然讨论有向向量图和向量图的性质以及本文设计出的两类新的互连网络的性质也是今后研究的有趣课题；另外，有向向量图和向量图在图论、互连网络、线性代数以及抽象代数之间架起了一座立交桥，从而为这些学科的相互渗透提供了条件.

参 考 文 献

[1] Akers S B, Krishnamurthy B. A group-theoretic model for symmetric interconnection networks [J]. *IEEE Transactions on Computers*, 1989, **38**(4): 555-565.

[2] Barnes G H, Brown R M, Kato M, et al. The ILLIAC IV Computers [J]. *IEEE Transactions on Computers,* 1968, **17**: 746-757

[3] Du D Z, Hwang F K. Generalized de Brujin digraphs [J]. *Networks*, 1988, **18**(1): 27-38
[4] Du D Z, Hsu D F, Peck G W. Connectivity of consecutive-d digraph [J]. *Discrete Applied Mathematics,* 1992, **37/38**: 169-177
[5] Du D Z, Hsu D F, et al. Combinatorial Network Theory [M]. Kluwer Academic Publishers, 1996, 65-105
[6] Biggs N L. Algebraic Graph Theory [M]. Cambridge University Press, 1993
[7] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory With Application [M]. London and Basingstoke: MacMillan Press LTD, 1976.
[8] 师海忠. 互连网络的代数环模型 [D]. 北京：中国科学院应用数学研究所， 1998
[9] 徐俊明. 组合网络理论 [M]. 北京：科学出版社， 2007
[10] Andre F, Verjus J P. Hypercubes and Distributed Computers [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Halland, 1989.
[11] Bettayeb S. On the k-ary hypercube [J]. *Theoretical Computer Science*, 1995, **140**: 333-339
[12] Preparata F P, Vuillemin J. The cube-connected cycles: A versatile network for parallel computation [J]. *Communication of the Association for Computing Machinery,* 1981, **24**(5): 300-309
[13] Lakshmivarahan S, Jwo J S, Dhall S. Symmetric in interconnection networks based on Cayley graph of permutation groups: A survey [J]. *Parallel Computing,* 1993, **19**: 361-407
[14] 高随祥. 图论与网络流理论 [M]. 北京：高等教育出版社， 2009
[15] 聂灵沼，丁石孙. 代数学引论 [M]. 北京：高等教育出版社， 1988